Ueber die Differentialgleichungen der Reihen $\mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x)$ und $\mathfrak{F}(\varrho, \sigma, \tau; x)$.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die unendliche Reihe

$$\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}; x)$$
$$= 1 + \frac{x}{1 \cdot \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1}} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot \varrho_1(\varrho_1+1)\,\varrho_2(\varrho_2+1) \ldots \varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)} + \cdots$$

genügt, nach § 5 des Aufsatzes des Verfassers „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe" *), einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + L_2 x^{n-3}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots$$
$$+ L_{n-2}\,x\frac{d^2y}{dx^2} + L_{n-1}\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

in der $L_1, L_2, \ldots L_{n-1}$ gewisse von $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$ abhängige Constante bedeuten. Im Folgenden soll auf diese Differentialgleichung in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ näher eingegangen, und deren Lösung durch bestimmte Integrale behandelt werden. Die dem Fall $n = 3$ entsprechende Reihe

$$(1) \qquad \mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x) = 1 + \frac{x}{1 \cdot \varrho\sigma} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot \varrho(\varrho+1)\,\sigma(\sigma+1)} + \cdots$$

ist ein particuläres Integral der Gleichung

$$(2) \qquad x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (\varrho + \sigma + 1)\,x\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho\sigma\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

welche ausserdem durch die mehrdeutigen Particulärlösungen

*) Band 38 dieser Annalen, S. 586. (Die Ausdrücke für $L_1, L_2, \ldots L_{n-1}$ sind daselbst in Gl. (26) und (33) angegeben.)

$$(3)\qquad x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1;\ x),$$
$$(4)\qquad x^{1-\sigma}\mathfrak{F}(2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x)$$

befriedigt wird. Die Differentialgleichung 4ter Ordnung

$$(5)\qquad x^3\frac{d^4y}{dx^4}+(\varrho+\sigma+\tau+3)\,x^2\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1)\,x\frac{d^2y}{dx^2}+\varrho\sigma\tau\frac{dy}{dx}-y=0$$

hat einerseits die eindeutige Reihe

$$(6)\quad \mathfrak{F}(\varrho,\sigma,\tau;\ x)=1+\frac{x}{1\,.\,\varrho\sigma\tau}+\frac{x^2}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)\,\sigma(\sigma+1)\,\tau(\tau+1)}+\cdots,$$

andererseits die Producte

$$(7)\qquad x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1,\ \tau-\varrho+1;\ x),$$
$$(8)\qquad x^{1-\sigma}\mathfrak{F}(2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1,\ \tau-\sigma+1;\ x),$$
$$(9)\qquad x^{1-\tau}\mathfrak{F}(2-\tau,\ \varrho-\tau+1,\ \sigma-\tau+1;\ x)$$

zu particulären Integralen (s. die erwähnte Arbeit). Es gilt hierbei die Voraussetzung, dass keine der Constanten

$$\varrho,\ \sigma,\ \tau,\ \varrho-\sigma,\ \varrho-\tau,\ \sigma-\tau$$

gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null sei.

Man gelangt nun zu Lösungen der Differentialgleichung (2) in Gestalt bestimmter Integrale, indem man für y das Integral

$$y=\int_g^h e^{\frac{x}{v}}\,v^{-\sigma}\,V\,dv$$

einsetzt und V als Function von v durch eine Differentialgleichung 2ter Ordnung bestimmt. Analog wird auf die Gleichung (5) die Substitution

$$y=\int_{g'}^{h'} e^{\frac{x}{w}}\,w^{-\tau}\,W\,dw$$

angewendet. Die nur von w abhängige Grösse W genügt einer Differentialgleichung 3ter Ordnung von der Form (2). Die auf diese Weise erhaltenen Lösungen von (2) sind Doppelintegrale, die Lösungen von (5) dreifache Integrale.

Die nachstehenden §§ 2—6 beziehen sich auf die Gleichung (2), die §§ 7—9 auf die Gleichung (5). Es ergiebt sich, dass die obigen Reihen auf verschiedene Arten durch bestimmte Integrale darstellbar sind. Werden die bestimmten Integrale, die man mittelst der angeführten Substitution als Lösungen von (2), resp. (5) findet, nach steigenden Potenzen von x entwickelt, so treten Euler'sche Integrale, bezw. Integrale $\bar{\Gamma}$, $\mathfrak{E}$, $\overline{E}$ (s. Band 35 dieser Annalen, S. 495) als constante Multiplicatoren der Reihen auf.

§ 2.

Die Differentialgleichung (2) geht durch die Substitution

$$(10)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} V dv,$$

wo g und h zunächst als constant gelten sollen, und V eine Function von v allein bedeutet, in die Gleichung

$$\int_g^h e^{\frac{x}{v}} x^2 v^{-\sigma-3} V dv + (\varrho + \sigma + 1) \int_g^h e^{\frac{x}{v}} x v^{-\sigma-2} V dv$$
$$+ \int_g^h e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} V \left(\frac{\varrho\sigma}{v} - 1\right) dv = 0$$

über. Mit Hülfe der Formel der theilweisen Integration findet man

$$\int_g^h e^{\frac{x}{v}} \frac{x}{v^2} v^{-\sigma} V dv = -\left[e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} V\right]_{v=g}^{v=h} + \int_g^h e^{\frac{x}{v}} \frac{d(v^{-\sigma} V)}{dv} dv$$

und durch zweimalige Anwendung derselben Formel

$$\int_g^h e^{\frac{x}{v}} \frac{x^2}{v^2} v^{-\sigma-1} V dv$$
$$= -\left[e^{\frac{x}{v}} x v^{-\sigma-1} V + e^{\frac{x}{v}} v^2 \frac{d(v^{-\sigma-1} V)}{dv}\right]_{v=g}^{v=h} + \int_g^h e^{\frac{x}{v}} \frac{d}{dv}\left(v^2 \frac{d(v^{-\sigma-1} V)}{dv}\right) dv.$$

Wird also durch M die Function

$$(11)\qquad M = -e^{\frac{x}{v}} \left\{ x v^{-\sigma-1} V + v^2 \frac{d(v^{-\sigma-1} V)}{dv} + (\varrho + \sigma + 1) v^{-\sigma} V \right\}$$

bezeichnet, so folgt, wie eine kurze Rechnung zeigt, aus (2) die Gleichung

$$(12)\qquad [M]_{v=g}^{v=h} + \int_g^h e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} \left\{ v \frac{d^2 V}{dv^2} + (\varrho - \sigma + 1) \frac{dV}{dv} - V \right\} dv = 0.$$

Man definirt die Function V als ein Integral der Differentialgleichung

$$(13)\qquad v \frac{d^2 V}{dv^2} + (\varrho - \sigma + 1) \frac{dV}{dv} - V = 0$$

und unterwirft die Grössen g und h der Bedingung

$$(14)\qquad [M]_{v=h} - [M]_{v=g} = 0.$$

Dann ist das bestimmte Integral (10) eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (2).

Nimmt man in (10) die Integralgrenze h als variabel an, so hat man für $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \int_g^h e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma-1} V dv + \left[e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} V\right]_{v=h} \cdot \frac{dh}{dx}.$$

Hier verschwindet der zweite Summandus der rechten Seite, wenn man $h = -\epsilon x$ setzt und unter ϵ eine unendlich kleine positive reelle Constante versteht. Denn neben der Grösse $e^{-\frac{1}{\epsilon}}$, in welche der Factor $e^{\frac{x}{v}}$ für $v = -\epsilon x$ übergeht, kommen die negativen Potenzen von ϵ nicht in Betracht (V ist für $v = 0$ entweder stetig oder wie eine Potenz von v unstetig). Ebenso zeigt man, dass die für ein constantes h geltenden Ausdrücke der höheren Differentialquotienten von y auch im Falle $h = -\epsilon x$ in Kraft bleiben. Daher darf für h, und nicht minder für g, ausser constanten Werthen auch der Werth $-\epsilon x$ in (10) und (14) gewählt werden. Da der Ausdruck M für $v = -\epsilon x$ verschwindet, so wird der Bedingung (14) durch die Werthe $g = h = -\epsilon x$ genügt. In der That ergeben sich die mehrdeutigen Hauptlösungen der Differentialgleichung (2) aus dem Integral (10), wenn man als Weg der Variable v eine geschlossene Curve nimmt, die im Punkte $-\epsilon x$ beginnt und endigt (§ 4). Das eindeutige particuläre Integral von (2) wird aus (10) durch Anwendung unendlicher Werthe für g und h erhalten.

§ 3.

Für die Differentialgleichung (13), in welcher die Constante $\varrho - \sigma + 1$ kurz durch s bezeichnet werden möge, lassen sich verschiedene Lösungen mittelst einfacher bestimmter Integrale angeben. Es sollen hier die zwei Arten der Lösung, welche in den Aufsätzen des Verfassers im 38ten *) und in diesem **) Bande der Annalen verzeichnet sind, nach einander benutzt werden. Die Hauptintegrale der Differentialgleichung

$$v \frac{d^2 V}{dv^2} + s \frac{dV}{dv} - V = 0$$

lauten in Reihenform

$$\mathfrak{F}(s; v) = 1 + \frac{v}{1 . s} + \frac{v^2}{1 . 2 . s(s+1)} + \cdots \tag{15}$$

und

$$v^{1-s} \mathfrak{F}(2-s; v) = v^{1-s} \left\{ 1 + \frac{v}{1 . (2-s)} + \frac{v^2}{1 . 2 (2-s)(3-s)} + \cdots \right\}. \tag{16}$$

Nun ist nach dem erwähnten Aufsatze in diesem Bande (Gl. (10) und (13))

---

*) „Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten", §§ 2—4, S. 228—240.

**) „Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten", S. 174.

$$(17) \qquad \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{-s}\, du = \bar{\Gamma}(1-s)\, \mathfrak{F}(s; v),$$

$$(18) \qquad \overline{\int}_{-cv}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{-s}\, du = \bar{\Gamma}(s-1)\, v^{1-s}\, \mathfrak{F}(2-s; v),$$

und nach dem Aufsatze im 38ten Bande (Gl. (33), (21), (23))

$$(19) \quad \overline{\int}_{\infty}^{(0,v,0,v)} e^{-2\sqrt{u}}(u-v)^{\frac{1}{2}-s} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2^{2s-1} e^{-2\pi i s}\, \bar{\Gamma}(2-2s)\, \mathfrak{F}(s; v),$$

$$(20) \quad \int_0^v \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-v)^{\frac{1}{2}-s} \frac{du}{\sqrt{u}} = -\overline{\int}_{v}^{(0)} e^{-2\sqrt{u}}(u-v)^{\frac{1}{2}-s} \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}-s}\, 2\, E\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} - s\right) v^{1-s}\, \mathfrak{F}(2-s; v), \qquad \left(s < \tfrac{3}{2}\right)$$

$$(21) \quad \overline{\int}_0^{(v)} \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-v)^{\frac{1}{2}-s} \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_c^{(v,0,v-,0-)} e^{-2\sqrt{u}}(u-v)^{\frac{1}{2}-s} \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= 2\,\bar{E}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} - s\right) v^{1-s}\, \mathfrak{F}(2-s; v),$$

wo für die Integrale mit geschlossener Integrationscurve die auf S. 472 des 35ten Bandes dieser Annalen angegebene abgekürzte Schreibweise angewendet ist. Die bestimmten Integrale (17) bis (21) können demnach, als particuläre Lösungen der Gleichung (13), an Stelle von V in das Integral (10) eingesetzt werden. In (20) ist angenommen, dass der reelle Theil von s kleiner als $\frac{3}{2}$, d. h. der reelle Theil von $\varrho - \sigma$ kleiner als $\frac{1}{2}$ sei. Diese Bedingung kann jedoch immer erfüllt werden, da die Differentialgleichung (2) symmetrisch in Bezug auf die Constanten ϱ und σ ist.

Unter $E(a, b)$ wird hier das Euler'sche Integral erster Art

$$E(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, du$$

verstanden, während $\bar{E}(a, b)$ und $\bar{\Gamma}(a)$ die in Band 35 dieser Annalen, S. 510 und 514, bezeichneten (Hankel'schen) Integrale sind.

§ 4.

Als Integrationsweg von (10) möge zunächst ein vom Punkte $-cx$ ausgehender positiver Umlauf um den Nullpunkt gewählt, und dieser Weg nach Fig. 1 aus der geradlinigen Strecke von $-\mathfrak{e}x$ bis $\mathfrak{f}$, dem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise $\mathfrak{K}$ und der Strecke von $\mathfrak{f}$ bis $-\mathfrak{e}x$ zusammengesetzt werden. Aus (10) entstehen dann, falls für V die Integrale (18) und (17) substituirt werden (in denen s den Werth $\varrho-\sigma+1$ hat), die Ausdrücke

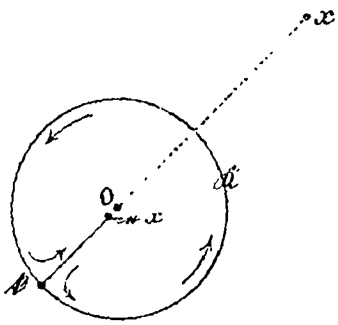

Fig. 1.

$$(22)\qquad \overline{\int}_{-\mathfrak{e}x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{-\mathfrak{e}v}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}\, du,$$

$$(23)\qquad \overline{\int}_{-\mathfrak{e}x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}\, du.$$

Setzt man ferner für V die Integrale (20) und (19) ein, so gelangt man zu den Doppelintegralen

$$(24)\qquad \overline{\int}_{-\mathfrak{e}x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \int_0^v \left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}},$$

$$(25)\qquad \overline{\int}_{-\mathfrak{e}x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{\infty}^{(0,v,0,v)} e^{-2\sqrt{u}}(u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Die Reihenentwickelungen der Integrale (22) bis (25) nach steigenden Potenzen von x ergeben sich unmittelbar aus der Formel

$$(26)\qquad \overline{\int}_{-\mathfrak{e}x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{p-1}\left\{c_0+c_1 v+c_2 v^2+c_3 v^3+\cdots\right\} dv$$
$$=x^p\,\overline{\Gamma}(-p)\left\{c_0+\frac{c_1 x}{p+1}+\frac{c_2 x^2}{(p+1)(p+2)}+\frac{c_3 x^3}{(p+1)(p+2)(p+3)}+\cdots\right\},$$

welche der Verfasser in dem Aufsatze „Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen“ *) abgeleitet hat. Für $c_0+c_1 v+\cdots$ werden in (26) nach einander die Reihen substituirt, welche auf den rechten Seiten der Gleichungen (17) bis (20) stehen (die Constante p wird gleich $1-\varrho$ oder $1-\sigma$). Dann findet man für die Integrale (22) und (23) die Gleichungen

$$(27)\qquad \begin{cases} \overline{\int}_{-\mathfrak{e}x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{-\mathfrak{e}v}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}\, du \\ =\overline{\Gamma}(\varrho-1)\,\overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\, x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1;\ x), \end{cases}$$

$$(28)\qquad \begin{cases} \overline{\int}_{-\mathfrak{e}x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}\, du \\ =\overline{\Gamma}(\sigma-1)\,\overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\, x^{1-\sigma}\,\mathfrak{F}(2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x), \end{cases}$$

*) Dieser Band, Seite 171.

während das Integral (24) in den Ausdruck

$$(29)\ (-1)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, 2\,\bar{\Gamma}(\varrho-1)\, E\left(\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) x^{1-\varrho}\, \mathfrak{F}(2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1;\ x)$$

und das Integral (25) in den Ausdruck

$$(30)\ 2^{2\varrho-2\sigma+1}\, e^{2\pi i(\sigma-\varrho)}\, \bar{\Gamma}(\sigma-1)\, \bar{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)\, x^{1-\sigma}\, \mathfrak{F}(2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x)$$

übergeht. Abgesehen von constanten Factoren stimmen also die Integrale (22) und (24) mit der Reihe (3), die Integrale (23) und (25) mit der Reihe (4) überein.

§ 5.

Es möge nunmehr angenommen werden, dass in (10) die Variable v von dem unendlich entfernten Punkte der negativen reellen Axe ausgeht und nach einem positiven Umlauf um den Nullpunkt zu $-\infty$ zurückkehrt. In dieses Integral, für welches man die abgekürzte Bezeichnung

$$(31)\qquad \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, V\, dv$$

hat, wird an Stelle von V wiederum ein particuläres Integral der Differentialgleichung (13) substituirt.

Nach Formel (11) des oben erwähnten Aufsatzes „Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung etc." (dieser Band, S. 176) besteht, wenn der reelle Theil von s grösser als 1 ist, die zu (17) analoge Gleichung

$$(32)\qquad \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{-s}\, du = \bar{\Gamma}(1-s)\, \mathfrak{F}(s;\ v).$$

Für den Integrationsweg gilt hierbei die nähere Bestimmung, dass die Variable u, die im Uebrigen die imaginäre Axe durchläuft, den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgehen soll. Man setze in (31) für V das Integral (32) und zugleich für die Constante s den Werth $\varrho-\sigma+1$ ein. Das hierdurch entstehende Doppelintegral

$$(33)\qquad \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}\, du$$

geht, wenn $e^{\frac{x}{v}}$ entwickelt wird, in die Reihe

$$N_0 + N_1\,\frac{x}{1} + N_2\,\frac{x^2}{1.2} + \cdots + N_\nu\,\frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots$$

über, in welcher N_ν (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das constante Doppelintegral

$$N_\nu = \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} v^{-\sigma-\nu}\, dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}\, du$$

bezeichnet. Aus der Gleichung (21) der vorstehenden Abhandlung „Ueber fünf Doppelintegrale" (Seite 188 dieses Bandes, woselbst $a = 1 - \varrho - \nu$, $b = 1 - \sigma - \nu$ genommen wird) folgt aber

$$N_\nu = \bar{\Gamma}(1 - \varrho - \nu)\,\bar{\Gamma}(1 - \sigma - \nu),$$

unter der Voraussetzung, dass die reellen Theile von $\varrho - 1$, $\sigma - 1$ und $\varrho - \sigma$ positiv sind. Indem man die letztere Annahme macht und die Formel*)

$$(34)\qquad \bar{\Gamma}(a - \nu) = (-1)^\nu \frac{\bar{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\dots(a-\nu)}$$

berücksichtigt, erhält man die Gleichung

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{l} \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1}\, du \\ \qquad = \bar{\Gamma}(1-\varrho)\,\bar{\Gamma}(1-\sigma)\,\mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x). \end{array}\right.$$

Das Doppelintegral (33) ist also gleich dem Product aus der Reihe (1) und einer constanten Grösse.

Zu einer anderen Form der eindeutigen particulären Lösung der Differentialgleichung (2) gelangt man, wenn man in (31) für V das bestimmte Integral (20), unter Fortlassung einer Potenz von -1, einführt. Es ergiebt sich dann das Doppelintegral

$$(36)\qquad \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_0^v \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right) (v - u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}},$$

welches sich durch die Substitution $u = vu'$, $du = v\,du'$, in den Ausdruck

$$\bar{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho}\, dv \int_0^1 \left(e^{2\sqrt{u'v}} + e^{-2\sqrt{u'v}}\right) (1 - u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

verwandelt. Wird $e^{\frac{x}{v}} = 1 + \frac{x}{v} + \cdots$ gesetzt, so entsteht hieraus die Reihe

$$P_0 + P_1 \frac{x}{1} + \cdots + P_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots,$$

in der P_ν die Constante

$$P_\nu = \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^1 \left(e^{2\sqrt{u'v}} + e^{-2\sqrt{u'v}}\right) (1 - u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

bedeutet. Durch Einführung der Variable $\mathfrak{u} = +\sqrt{u'}$ erhält man dann

$$P_\nu = 2\bar{\int}_{-\infty}^{(0)} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^1 \left(e^{2\mathfrak{u}\sqrt{v}} + e^{-2\mathfrak{u}\sqrt{v}}\right) (1 - \mathfrak{u}^2)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, d\mathfrak{u}.$$

*) Band 35 dieser Annalen, Seite 515.

Mithin ist die Formel (24) der vorstehenden Abhandlung (Seite 191 dieses Bandes) anwendbar, aus der, unter der Voraussetzung, dass die reellen Theile von $\varrho - 1$ und $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ positiv sind,

$$P_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1} E\left(\varrho - \frac{1}{2} + \nu,\ \sigma - \varrho + \frac{1}{2}\right) \bar{\Gamma}(2 - 2\varrho - 2\nu)$$

folgt. Da nun für das Euler'sche Integral erster Art die Reductionsformel

$$(37)\quad E(a + \nu, b) = \frac{a(a+1)\dots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+\nu-1)} E(a, b)$$

gilt, und $\bar{\Gamma}(2 - 2\varrho - 2\nu)$ sich nach (34) umformen lässt, so findet man (nachdem einige Factoren sich fortgehoben haben) P_ν gleich dem Quotienten

$$P_\nu = \frac{2^{2\varrho-1} E\left(\varrho - \frac{1}{2},\ \sigma - \varrho + \frac{1}{2}\right) \bar{\Gamma}(2 - 2\varrho)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+\nu-1)\,\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+\nu-1)}.$$

Auf diese Weise entsteht für das Integral (36) die Gleichung

$$(38)\quad \begin{cases} \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} dv \int_0^v \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(v - u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \dfrac{du}{\sqrt{u}} \\ = 2^{2\varrho-1} E\left(\varrho - \frac{1}{2},\ \sigma - \varrho + \frac{1}{2}\right) \bar{\Gamma}(2 - 2\varrho)\, \mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x). \end{cases}$$

§ 6.

Es sollen noch zwei weitere Doppelintegrale betrachtet werden, die sich von der Reihe (1) nur durch das Hinzutreten constanter Factoren unterscheiden. Das erste derselben ist das Integral

$$(39)\quad \bar{\int}_{\infty}^{(0,0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} dv \int_0^v e^{-2\sqrt{u}} (v - u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}},$$

welches durch die Substitution $u = vu'$, $du = v\,du'$, in den Ausdruck

$$(40)\quad \bar{\int}_{\infty}^{(0,0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho} dv \int_0^1 e^{-2\sqrt{u'v}} (1 - u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

übergeht. Die Variable v soll in (39) und (40) einen Weg durchlaufen, der im unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe beginnt und nach zweimaliger positiver Umkreisung des Nullpunktes zu dem genannten unendlich fernen Punkte zurückkehrt. Man setze in (40) $e^{\frac{x}{v}} = 1 + \frac{x}{v} + \cdots$ und definire Q_ν als das Integral

$$Q_\nu = \int_\infty^{\overline{(0,0)}} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^1 e^{-2\sqrt{u'v}} (1-u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

(für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$). Dann ist das obige Integral gleich der Reihe

$$Q_0 + Q_1 \frac{x}{1} + \cdots + Q_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots.$$

Durch die Substitution $+\sqrt{u'} = \mathrm{u}$ verwandelt sich aber Q_ν in den Ausdruck

$$Q_\nu = 2\int_\infty^{\overline{(0,0)}} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^1 e^{-2\mathrm{u}\sqrt{v}} (1-\mathrm{u}^2)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, d\mathrm{u},$$

der nach Formel (28) des vorstehenden Aufsatzes (Seite 193 dieses Bandes), unter der Voraussetzung, dass die reellen Bestandtheile von $\varrho - 1$ und $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ positiv sind, mit dem Werthe

$$2^{2\varrho+2\nu-1} e^{-2\pi i\varrho} E\left(\varrho - \tfrac{1}{2} + \nu,\ \sigma - \varrho + \tfrac{1}{2}\right) \bar{\Gamma}(2 - 2\varrho - 2\nu)$$

identisch ist. Hieraus folgt, dass Q_ν aus dem im vorigen Paragraphen behandelten Integral P_ν entsteht, wenn letzteres mit $e^{-2\pi i\varrho}$ multiplicirt wird. Das Integral (39) ist also gleich dem Producte

$$2^{2\varrho-1} e^{-2\pi i\varrho} E\left(\varrho - \tfrac{1}{2},\ \sigma - \varrho + \tfrac{1}{2}\right) \bar{\Gamma}(2 - 2\varrho)\, \mathfrak{F}(\varrho, \sigma;\ x).$$

Es soll nunmehr von der Annahme, dass der reelle Theil von $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ positiv sei, abgesehen werden. Dann kann man statt des Integrals (40) das analog gebildete Integral

$$(41) \qquad \int_\infty^{\overline{(0,0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho}\, dv \int_0^{\overline{(1)}} e^{-2\sqrt{u'v}} (1-u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

anwenden, in welchem die Variable u' vom Nullpunkte aus einen positiven Umlauf um den Punkt 1 ausführt. Der Weg von v ist derselbe wie in (39) und (40). Das Integral (41) liefert, wenn $e^{\frac{x}{v}}$ entwickelt wird, die Reihe

$$\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1 \frac{x}{1} + \mathfrak{Q}_2 \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \mathfrak{Q}_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots,$$

in der

$$\mathfrak{Q}_\nu = \int_\infty^{\overline{(0,0)}} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^{\overline{(1)}} e^{-2\sqrt{u'v}} (1-u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

gesetzt ist. Der Werth von $\mathfrak{Q}_\nu$ ergiebt sich aus der Formel (33) der vorstehenden Abhandlung (Seite 196 dieses Bandes). Denn wenn man

$+\sqrt{u'} = \mathfrak{u}$ substituirt, so umkreist auch $\mathfrak{u}$, vom Nullpunkte aus, den Punkt 1 im positiven Sinne (cfr. Seite 195 dieses Bandes), so dass die Gleichung

$$\mathfrak{Q}_\nu = 2 \int_\infty^{\overline{(0,0)}} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^{\overline{(1)}} e^{-2\mathfrak{u}\sqrt{v}} \left(1 - \mathfrak{u}^2\right)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} d\mathfrak{u}$$

erhalten wird. Folglich ist nach der angeführten Formel

$$\mathfrak{Q}_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1}\, e^{\pi i\left(\sigma-3\varrho-\frac{1}{2}\right)}\, \overline{E}\left(\varrho-\tfrac{1}{2}+\nu,\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) \bar{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu).$$

Für die Grösse $\overline{E}\left(\varrho-\frac{1}{2}+\nu,\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)$ wird die Reductionsformel (Band 35 dieser Annalen, S. 511)

$$(42)\qquad \overline{E}(a+\nu,\ b) = \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)}\, \overline{E}(a,\ b)$$

benutzt. Dann findet man für das Integral (41) die Gleichung

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\infty^{\overline{(0,0)}} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\varrho}\, dv \int_0^{\overline{(1)}} e^{-2\sqrt{u'v}} \left(1-u'\right)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u'}} \\ &= 2^{2\varrho-1}\, e^{\pi i\left(\sigma-3\varrho-\frac{1}{2}\right)}\, \overline{E}\left(\varrho-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) \bar{\Gamma}(2-2\varrho)\, \mathfrak{F}(\varrho,\ \sigma;\ x), \end{aligned}\right.$$

in welcher der reelle Theil der Constante $\varrho - 1$ als positiv vorausgesetzt ist.

Die in §§ 4 und 5 abgeleiteten particulären Integrale der Differentialgleichung (2) ergaben sich aus dem Integral (10), indem in letzteres particuläre Lösungen der Differentialgleichung (13) an Stelle von V substituirt wurden. Man bemerke, dass dies von den Integralen (39) und (41) nicht gilt. Diese Integrale entstehen aus (10), wenn man für V die Function

$$(44)\qquad \int_0^v e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}},$$

resp. die Function

$$(45)\qquad \int_0^{\overline{(v)}} e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

einsetzt und die Variable v den oben bezeichneten Integrationsweg durchlaufen lässt. Die Ausdrücke (44) und (45) genügen aber nicht der Differentialgleichung (13)

$$v\frac{d^2V}{dv^2} + (\varrho-\sigma+1)\frac{dV}{dv} - V = 0,$$

sondern einer Differentialgleichung von der Form*)

$$(46)\qquad v\frac{d^2V}{dv^2}+(\varrho-\sigma+1)\frac{dV}{dv}-V=\chi(v).$$

In der That lässt sich das in § 2 angegebene Verfahren dahin ausdehnen, dass die Gleichung (13) durch die Gleichung (46), in der $\chi(v)$ irgend eine Function von v bedeutet, ersetzt wird. Man hat dann, wie aus (12) folgt, statt der Bedingung (14) die Bedingung

$$(47)\qquad [M]_{v=h}-[M]_{v=g}+\int_g^h e^{\frac{x}{v}}\,v^{-\sigma}\,\chi(v)\,dv=0$$

zu nehmen. Es ändert sich also nur die Gleichung, welche sich auf die Grenzen g, h des Integrals (10) bezieht.

§ 7.

Man geht nun dazu über, die in (5) angegebene Differentialgleichung 4ter Ordnung

$$x^3\frac{d^4y}{dx^4}+(\varrho+\sigma+\tau+3)\,x^2\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1)\,x\frac{d^2y}{dx^2}+\varrho\sigma\tau\frac{dy}{dx}-y=0$$

zu behandeln. Dieselbe gestattet eine ähnliche Lösung durch bestimmte Integrale wie die Differentialgleichung (2). Durch die Substitution

$$(48)\qquad y=\int_{g'}^{h'} e^{\frac{x}{w}}\,w^{-\tau}\,W\,dw,$$

wo W nur von w abhängen soll, nimmt die Gleichung (5) die Form

$$\int_{g'}^{h'} e^{\frac{x}{w}}\,x^3\,w^{-\tau-4}\,W\,dw+(\varrho+\sigma+\tau+3)\int_{g'}^{h'} e^{\frac{x}{w}}\,x^2\,w^{-\tau-3}\,W\,dw$$
$$+(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1)\int_{g'}^{h'} e^{\frac{x}{w}}\,x\,w^{-\tau-2}\,W\,dw$$
$$+\int_{g'}^{h'} e^{\frac{x}{w}}\,w^{-\tau}\left(\frac{\varrho\sigma\tau}{w}-1\right)W\,dw=0$$

an. Indem man die Formel der theilweisen Integration auf den ersten Summandus dieser Gleichung dreimal, auf den zweiten zweimal, auf den dritten einmal anwendet (cfr. § 2), findet man

$$[M']_{w=g'}^{w=h'}+\int_{g'}^{h'} e^{\frac{x}{w}}\,w^{-\tau}\left\{\begin{array}{c} w^2\dfrac{d^3W}{dw^3}+(\varrho'+\sigma'+1)w\dfrac{d^2W}{dw^2}\\ +\varrho'\sigma'\dfrac{dW}{dw}-W\end{array}\right\}dw=0,$$

wo unter M' der Ausdruck

---

*) Man vergleiche § 2 der Abhandlung des Verfassers „Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten", Band 38 dieser Annalen, Seite 229.

$$(49)\quad M' = -e^{\frac{x}{w}} \left\{ \begin{array}{l} w^{-\tau-2}\{x^2-(\tau+2)wx+(\tau+1)(\tau+2)w^2\}\, W \\ + w^{-\tau}\{x-2(\tau+1)w\}\,\frac{dW}{dw} + w^{-\tau+2}\frac{d^2W}{dw^2} \\ + (\varrho+\sigma+\tau+3)\,w^{-\tau-1}\left\{(x-[\tau+1]w)\,W + w^2\frac{dW}{dw}\right\} \\ + (\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1)\,w^{-\tau}\,W \end{array} \right\}$$

und unter ϱ', σ' die Constanten

$$(50)\qquad \varrho' = \varrho - \tau + 1, \qquad \sigma' = \sigma - \tau + 1$$

verstanden werden. Die Function W sei nun ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$(51)\qquad w^2\frac{d^3W}{dw^3} + (\varrho'+\sigma'+1)\,w\,\frac{d^2W}{dw^2} + \varrho'\sigma'\frac{dW}{dw} - W = 0.$$

Zugleich mögen die Grössen g', h', für welche man nach § 2 entweder Constante oder den Werth $-\mathfrak{e}x$ setzt, die Bedingung

$$(52)\qquad [M']_{w=h'} - [M']_{w=g'} = 0$$

befriedigen. Dann genügt das bestimmte Integral (48) der Differentialgleichung (5).

Die Gleichung (51) entsteht aus (2), wenn man ϱ', σ', w, W statt ϱ, σ, x, y schreibt. Also kann man für W Doppelintegrale von der Art, wie sie in den vorstehenden Paragraphen erhalten wurden, substituiren. Der Ausdruck (48) geht hierdurch in ein dreifaches Integral über.

§ 8.

Um zu den mehrdeutigen Hauptintegralen der Differentialgleichung (5) zu gelangen, lässt man in (48) die Variable w den in § 4 (Fig. 1) erwähnten Integrationsweg durchlaufen, der im Punkte $-\mathfrak{e}x$ beginnt und endigt und den Nullpunkt im positiven Sinne umkreist. Man bildet also das Integral

$$(53)\qquad \int_{-\mathfrak{e}x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{w}}\, w^{-\tau}\, W\,dw.$$

Werden hierin für W die zu (22) und (23) analogen Doppelintegrale

$$(54)\qquad \int_{-\mathfrak{e}w}^{\overline{(0)}} e^{\frac{w}{v}}\, v^{\tau-\sigma-1}\,dv \int_{-\mathfrak{e}v}^{\overline{(0)}} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}\,du,$$

$$(55)\qquad \int_{-\mathfrak{e}w}^{\overline{(0)}} e^{\frac{w}{v}}\, v^{\tau-\sigma-1}\,dv \int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}\,du$$

eingesetzt, so entstehen die dreifachen Integrale

$$(56)\qquad \bar{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} dw \bar{\int}_{-\epsilon w}^{(0)} dv \bar{\int}_{-\epsilon v}^{(0)} \Phi\, du,$$

$$(57)\qquad \bar{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} dw \bar{\int}_{-\epsilon w}^{(0)} dv \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} \Phi\, du,$$

in denen Φ die Function

$$(58)\qquad \Phi = e^{\frac{x}{w}}\, w^{-\tau}\, e^{\frac{w}{v}}\, v^{\tau-\sigma-1}\, e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}$$

und ϵ (wie in §§ 3 und 4) eine unendlich kleine positive reelle Constante bezeichnet.

Zur Entwickelung der Integrale (56) und (57) nach steigenden Potenzen von x wird wiederum die Formel (26), in welcher w an die Stelle von v tritt, benutzt. Nach Berücksichtigung der Gleichungen (27) und (28) (mit ϱ', σ', w statt ϱ, σ, x) findet man für das Integral (56) den Ausdruck

$$(59)\quad \bar{\Gamma}(\varrho-1)\, \bar{\Gamma}(\varrho-\sigma)\, \bar{\Gamma}(\varrho-\tau)\, x^{1-\varrho}\, \mathfrak{F}(2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1,\ \tau-\varrho+1;\ x)$$

und für das Integral (57) den Ausdruck

$$(60)\quad \bar{\Gamma}(\sigma-1)\, \bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\, \bar{\Gamma}(\sigma-\tau)\, x^{1-\sigma}\, \mathfrak{F}(2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1,\ \tau-\sigma+1;\ x).$$

Reihen derselben Art, die sich von (7) und (8) nur durch constante Factoren unterscheiden, ergeben sich, wenn in (53) für W die zu (24) und (25) analogen Doppelintegrale substituirt werden.

Man erhält ferner dreifache Integrale, die, von einem constanten Factor abgesehen, in die Reihe (9) übergehen, indem man für die Grösse W in (53) eines der Doppelintegrale nimmt, welche die eindeutige Hauptlösung der Differentialgleichung (51) darstellen (§§ 5 und 6). Es sollen hier zwei der bezüglichen Ausdrücke angegeben werden, bei denen für W nach einander das zu (33) und das zu (41) analoge Integral gewählt ist. Aus den Formeln (26), (35) und (43) folgt

$$(61)\quad \begin{cases} \bar{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} dw \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} dv \bar{\int}_{-\infty i}^{+\infty i} \Phi\, du \\ = \bar{\Gamma}(\tau-1)\, \bar{\Gamma}(\tau-\varrho)\, \bar{\Gamma}(\tau-\sigma)\, x^{1-\tau}\, \mathfrak{F}(2-\tau,\ \varrho-\tau+1,\ \sigma-\tau+1;\ x) \end{cases}$$

und

$$(62)\quad \begin{cases} \bar{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} dw \bar{\int}_{\infty}^{(0,0)} dv \bar{\int}_{0}^{(1)} \Psi\, du \\ = \mathfrak{C}\, x^{1-\tau}\, \mathfrak{F}(2-\tau,\ \varrho-\tau+1,\ \sigma-\tau+1;\ x), \end{cases}$$

wo unter Φ die Function (58), unter Ψ die Function

$$(63)\qquad \Psi = e^{\frac{x}{w}}\, w^{-\tau}\, e^{\frac{w}{v}}\, v^{\tau-\varrho-1}\, e^{-2\sqrt{uv}}\, (1-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, u^{-\frac{1}{2}}$$

und unter $\mathfrak{C}$ die Constante

$$2^{2\varrho-2\tau+1}\, e^{-\pi i\left(3\varrho-\sigma-2\tau+\frac{1}{2}\right)}\, \bar{\Gamma}(\tau-1)\,\bar{\Gamma}(2\tau-2\varrho)\,\bar{E}\left(\varrho-\tau+\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)$$

verstanden wird. In (61) sind die reellen Theile von $\varrho-\sigma$, $\varrho-\tau$, $\sigma-\tau$, in (62) der reelle Theil von $\varrho-\tau$ als positiv vorausgesetzt.

§ 9.

Für das Integral (48) soll schliesslich ein Integrationsweg gewählt werden, der (wie der Weg von v in (39), (40), (41)) seinen Anfang und sein Ende in dem unendlich entfernten Punkt der positiven reellen Axe hat und einen zweimaligen positiven Umlauf um den Nullpunkt enthält. An Stelle von W wird wiederum ein Doppelintegral nach u und v eingeführt; jedoch soll für v ein ähnlicher Integrationsweg zur Anwendung kommen, wie für das Integral (17) des Aufsatzes „Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen" *) angegeben ist. Es seien $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ die Producte

(64) $$\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}\, e^{-i\varkappa}, \qquad \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}\, e^{i\varkappa},$$

in denen $\varkappa$ eine reelle, zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegende Constante, und $\mathfrak{c}$ wiederum einen unendlich kleinen reellen positiven Werth bedeutet. Man betrachtet, indem man Ω die Function

(65) $$\Omega = e^{\frac{x}{w}}\, w^{-\tau}\, e^{\frac{w}{v}}\, v^{\tau-\sigma-1}\, e^{-2\sqrt{u}}\, (u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, u^{-\frac{1}{2}}$$

nennt, das dreifache Integral

(66) $$\overline{\int_{\infty}^{(0,0)}} dw \int_{\mathfrak{c}_1 w}^{\mathfrak{c}_2 w} dv \int_0^v \Omega\, du,$$

das sich, abgesehen von einem constanten Factor, als identisch mit der Reihe (6) erweist. Der Weg der Variable v möge, für einen beliebigen der vorkommenden Werthe von w, nach Fig. 2 aus einer geradlinigen Strecke von $\mathfrak{c}_1 w$ bis zum Punkte m_1, einem Kreisbogen $m_1 d m_2$, welcher in positiver Drehungsrichtung durchlaufen wird, und der geradlinigen Strecke von m_2 bis zum Punkte $\mathfrak{c}_2 w$ bestehen. Die beiden genannten geraden Wegstrecken bilden mit der Verbindungslinie der Punkte 0 und w den stumpfen Winkel $\varkappa$. Man setzt in (66) die reellen Theile der Constanten $\varrho-1$ und $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ als positiv voraus.

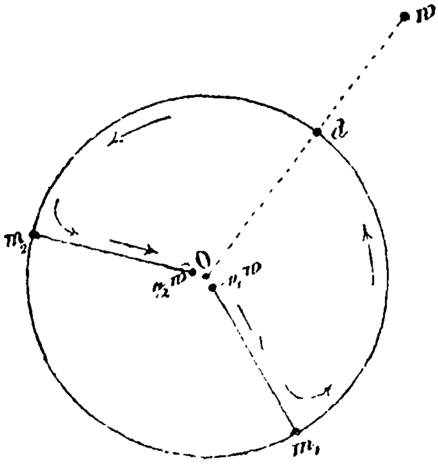

Fig. 2.

*) Dieser Band, Seite 172.

Das Integral (66) nimmt durch die Substitution

$$u = v\mathfrak{u} = \mathfrak{v}w\mathfrak{u}, \qquad v = w\mathfrak{v},$$
$$du = v\,d\mathfrak{u} = \mathfrak{v}w\,d\mathfrak{u}, \quad dv = w\,d\mathfrak{v}$$

die Gestalt

$$\int_{\infty}^{\overline{(0,0)}} e^{\frac{x}{w}}\, w^{-\varrho}\, dw \int_{e_1}^{e_2} e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}}\, \mathfrak{v}^{\tau-\varrho-1}\, d\mathfrak{v} \int_0^1 e^{-2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}w}}\, (\mathfrak{u}-1)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, \frac{d\mathfrak{u}}{\sqrt{\mathfrak{u}}}$$

an. Wird hierin $e^{\frac{x}{w}} = 1 + \frac{x}{w} + \cdots$ gesetzt, so hat man für das Integral (66) die Entwickelung

$$(67) \qquad (-1)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \left\{ \Lambda_0 + \Lambda_1 \frac{x}{1} + \Lambda_2 \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \Lambda_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots \right\},$$

woselbst Λ_ν (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das constante dreifache Integral

$$\int_{\infty}^{\overline{(0,0)}} w^{-\varrho-\nu}\, dw \int_{e_1}^{e_2} e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}}\, \mathfrak{v}^{\tau-\varrho-1}\, d\mathfrak{v} \int_0^1 e^{-2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}w}}\, (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, \frac{d\mathfrak{u}}{\sqrt{\mathfrak{u}}}$$

bezeichnet. In Λ_ν wird die Variable $\mathfrak{w} = +\sqrt{w}$ eingeführt, welche den Nullpunkt einmal umkreist, wenn w zwei Umläufe um denselben macht. Nennt man

$$(68) \qquad \Omega' = 2\mathfrak{w}^{1-2\varrho-2\nu}\, e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}}\, \mathfrak{v}^{\tau-\varrho-1}\, e^{-2\mathfrak{w}\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}\, (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, \mathfrak{u}^{-\frac{1}{2}},$$

so ergiebt sich für Λ_ν der Ausdruck

$$(69) \qquad \Lambda_\nu = \int_{\infty}^{\overline{(0)}} d\mathfrak{w} \int_{e_1}^{e_2} d\mathfrak{v} \int_0^1 \Omega'\, d\mathfrak{u}.$$

Die Rechnung, durch welche man den Werth des letzteren Integrals ermittelt, ist derjenigen analog, die in § 4 der vorstehenden Abhandlung „Ueber fünf Doppelintegrale" angestellt wurde. Man ändert die Integrationsfolge, indem man zeigt, dass nach $\mathfrak{w}$ zuerst integrirt werden darf. Zu diesem Behuf soll zunächst bewiesen werden, dass die zu $\mathfrak{u} = 0$ und $\mathfrak{v} = 0$ benachbarten Integralelemente nur einen verschwindend kleinen Beitrag zum Werthe von Λ_ν liefern. Es seien δ und ε zwei endliche, jedoch überaus kleine positive reelle Constante, und ε_1, ε_2 die Producte

$$\varepsilon_1 = \varepsilon e^{-i\varkappa}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon e^{i\varkappa},$$

wo unter $\varkappa$ die in (64) genannte (zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegende) Constante verstanden wird. Die drei Integrale

$$
(70) \quad \begin{cases}
\mathfrak{G} = \int_\infty^{\overline{(0)}} d\mathfrak{w} \int_{\mathfrak{e}_1}^{\mathfrak{e}_2} d\mathfrak{v} \int_0^\delta \Omega'\, d\mathfrak{u}, \\
\mathfrak{H}_1 = \int_\infty^{\overline{(0)}} d\mathfrak{w} \int_{\mathfrak{e}_1}^{\varepsilon_1} d\mathfrak{v} \int_\delta^1 \Omega'\, d\mathfrak{u}, \\
\mathfrak{H}_2 = \int_\infty^{\overline{(0)}} d\mathfrak{w} \int_{\varepsilon_2}^{\mathfrak{e}_2} d\mathfrak{v} \int_\delta^1 \Omega'\, d\mathfrak{u}
\end{cases}
$$

enthalten diejenigen Elemente von Λ_ν, in denen $\mathfrak{u}$ oder $\mathfrak{v}$ unendlich klein ist. Indem man $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ in ihre einzelnen Bestandtheile zerlegt, kann man nachweisen, dass sie mit δ, ε zugleich beliebig klein werden.

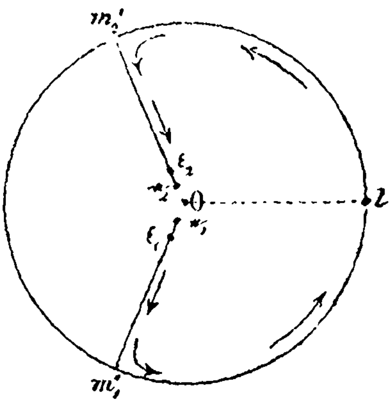

Fig. 3.

In dem Integral (69) sowohl als in dem Integral $\mathfrak{G}$ durchläuft die Variable $\mathfrak{v}$ einen Weg, der nach Fig. 3 aus den Abschnitten $\mathfrak{e}_1 m_1'$, $m_1' l m_2'$ und $m_2' \mathfrak{e}_2$ gebildet wird. Bezeichnet man mod. $\mathfrak{v}$ durch r und setzt $\mathfrak{v} = r e^{\vartheta i}$, so folgt

$$
e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}} = e^{\frac{1}{r}(\cos\vartheta - i \sin\vartheta)}.
$$

Auf den geradlinigen Strecken $\mathfrak{e}_1 m_1'$ und $m_2' \mathfrak{e}_2$ ist $\cos\vartheta$ negativ ($\vartheta = -\varkappa$ auf $\mathfrak{e}_1 m_1'$, $\vartheta = +\varkappa$ auf $m_2' \mathfrak{e}_2$); daher nimmt $e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}}$ nur endliche, resp. unendlich kleine Werthe an. Ebenso ist der Werth von $e^{-2\mathfrak{w}\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}$ hier stets ein endlicher. Denn in $\sqrt{\mathfrak{v}}$, $= \sqrt{r}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i \sin\frac{\vartheta}{2}\right)$, und folglich auch in $\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}$ ist der reelle Bestandtheil positiv $\left(\text{da } -\frac{\varkappa}{2} \leqq \frac{\vartheta}{2} \leqq \frac{\varkappa}{2}\right)$, so dass für grosse positive reelle Werthe von $\mathfrak{w}$ die Grösse $e^{-2\mathfrak{w}\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}$ sich der Null nähert. Das in $\mathfrak{G}$ vorkommende Doppelintegral

$$
\int_{\mathfrak{e}_1}^{\mathfrak{e}_2} e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}} \mathfrak{v}^{\tau-\varrho-1} d\mathfrak{v} \int_0^\delta e^{-2\mathfrak{w}\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}} (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \mathfrak{u}^{-\frac{1}{2}} d\mathfrak{u}
$$

ist demnach für ein genügend kleines δ kleiner als jede angebbare Zahl. Dieser Schluss überträgt sich auf diejenigen Bestandtheile von $\mathfrak{G}$, bei denen nach $\mathfrak{w}$ über endliche Wegstrecken integrirt wird. Es bleibt übrig zu zeigen, dass wenn p irgend eine positive reelle Zahl ist, das Integral

$$
\mathfrak{G}' = \int_p^\infty d\mathfrak{w} \int_{\mathfrak{e}_1}^{\mathfrak{e}_2} d\mathfrak{v} \int_0^\delta \Omega'\, d\mathfrak{u}
$$

mit δ zugleich beliebig klein wird.

In $\mathfrak{G}'$ ist, wie aus den obigen Bemerkungen folgt, mod. $e^{-2\mathfrak{w}\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}$ kleiner als 1, da der reelle Theil des Exponenten das negative Vorzeichen hat. Setzt man

$$\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2, \quad \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \quad \tau = \tau_1 + i\tau_2,$$

wo ϱ_1, ϱ_2, σ_1, σ_2, τ_1, τ_2 reelle Zahlen bedeuten, so wird

$$\text{mod.}\left[(1-\mathfrak{u})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\right] = (1-\mathfrak{u})^{\sigma_1-\varrho_1-\frac{1}{2}}, \quad \text{mod.}\,[\mathfrak{w}^{1-2\varrho-2\nu}] = \mathfrak{w}^{1-2\varrho_1-2\nu};$$

denn $1-\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ sind reell und positiv. Ferner ist

$$\text{mod.}\left(e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}}\right) = \text{mod.}\left(e^{\frac{1}{r}[\cos\vartheta - i\sin\vartheta]}\right) = e^{\frac{1}{r}\cos\vartheta}$$

und

$$\text{mod.}\,(\mathfrak{v}^{\tau-\varrho-1}) = \text{mod.}\,(r^{\tau-\varrho-1}\,e^{[\tau-\varrho-1]\,\vartheta i}) = r^{\tau_1-\varrho_1-1}\,e^{-\vartheta(\tau_2-\varrho_2)}.$$

Für die zu integrirende Function in $\mathfrak{G}'$ gilt also die Ungleichheit

$$\text{mod.}\,\Omega' < 2\,\mathfrak{w}^{1-2\varrho_1-2\nu}\,e^{\frac{1}{r}\cos\vartheta - \vartheta(\tau_2-\varrho_2)}\,r^{\tau_1-\varrho_1-1}(1-\mathfrak{u})^{\sigma_1-\varrho_1-\frac{1}{2}}\,\mathfrak{u}^{-\frac{1}{2}}.$$

Es sind nun die einzelnen Abschnitte des Integrationsweges von $\mathfrak{v}$ zu unterscheiden. Es sollen durch $\mathfrak{G}_1'$, $\mathfrak{G}_2'$, $\mathfrak{G}_3'$ die Theile von $\mathfrak{G}'$, welche den drei Strecken $\mathfrak{c}_1 m_1'$, $m_1' l m_2'$, $m_2'\mathfrak{c}_2$ des Integrals nach $\mathfrak{v}$ entsprechen, bezeichnet werden, so dass

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}_1' + \mathfrak{G}_2' + \mathfrak{G}_3'$$

ist. Für das Integral $\mathfrak{G}_1'$, in welchem $\mathfrak{v}$ die Werthe $re^{-\varkappa i}$ (von $r = \mathfrak{c}$ bis $r = l$) durchläuft, besteht die Ungleichheit

$$\text{mod.}\,\mathfrak{G}_1' < e^{\varkappa(\tau_2-\varrho_2)}\,\mathfrak{P}\mathfrak{D}\int_{\mathfrak{c}}^{l} e^{\frac{1}{r}\cos\varkappa}\,r^{\tau_1-\varrho_1-1}\,dr,$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{D}$ die Grössen

$$\mathfrak{P} = 2\int_p^\infty \mathfrak{w}^{1-2\varrho_1-2\nu}\,d\mathfrak{w} = \frac{2p^{2-2\varrho_1-2\nu}}{2\varrho_1+2\nu-2},$$

$$\mathfrak{D} = \int_0^\delta (1-\mathfrak{u})^{\sigma_1-\varrho_1-\frac{1}{2}}\,\frac{d\mathfrak{u}}{\sqrt{\mathfrak{u}}}$$

bedeuten. Die rechte Seite der letzteren Ungleichheit geht, wenn $\varkappa$ durch $-\varkappa$ ersetzt wird, in einen Ausdruck über, der grösser als mod. $\mathfrak{G}_3'$ ist. Nun sind sowohl $\mathfrak{P}$ und $e^{\varkappa(\tau_2-\varrho_2)}$ als auch das Integral

$$\int_{\mathfrak{c}}^{l} e^{\frac{1}{r}\cos\varkappa}\,r^{\tau_1-\varrho_1-1}\,dr$$

(in welchem die zu integrirende Function an der unteren Grenze verschwindet) endliche Werthe. Andererseits findet man für $\mathfrak{D}$ mit Hülfe des Satzes vom Mittelwerth die Gleichung

$$\mathfrak{D} = (1-\delta')^{\sigma_1-\varrho_1-\frac{1}{2}}\int_0^\delta \frac{d\mathfrak{u}}{\sqrt{\mathfrak{u}}} = 2\,\delta^{\frac{1}{2}}\,(1-\delta')^{\sigma_1-\varrho_1-\frac{1}{2}},$$

in der $0 < \delta' < \delta$ ist. Demnach nehmen $\mathfrak{D}$, und folglich auch mod. $\mathfrak{G}_1'$ und mod. $\mathfrak{G}_3'$ mit δ zugleich bis zur Null ab. Dasselbe gilt von der Grösse $\mathfrak{G}_2'$. Da in $\mathfrak{G}_2'$

$$\mathfrak{v} = l e^{\vartheta i}, \quad d\mathfrak{v} = l i e^{\vartheta i} \, d\vartheta$$

zu setzen ist, so ergiebt sich die Ungleichheit

$$\text{mod.}\ \mathfrak{G}_2' < l^{\tau_1 - \varrho_1}\, \mathfrak{P}\mathfrak{D} \int_{-\varkappa}^{\varkappa} e^{\frac{1}{l}\cos\vartheta - (\tau_2 - \varrho_2)\vartheta}\, d\vartheta,$$

deren rechte Seite wiederum den Factor $\mathfrak{D}$ enthält, während $l^{\tau_1 - \varrho_1}$, $\mathfrak{P}$ und das Integral nach ϑ endliche Grössen bezeichnen.

Es ist somit bewiesen, dass das in (70) genannte Integral $\mathfrak{G}$ einen zu vernachlässigenden Werth hat, sobald für δ eine genügend kleine endliche Zahl gewählt wird.

Man kann ferner leicht zeigen, dass die Grössen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ beliebig klein werden, weil die in ihnen enthaltenen Integrale nach $\mathfrak{v}$ diese Eigenschaft haben. Für positive reelle $\mathfrak{w}$ ist auch hier mod. $e^{-2\mathfrak{w}\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}$ kleiner als 1, so dass analoge Schlüsse wie bei $\mathfrak{G}_1'$ und $\mathfrak{G}_3'$ angewendet werden können.

In dem Integral (69) sind die unendlich kleinen Werthe von $\mathfrak{u}$, resp. $\mathfrak{v}$, noch als unendlich klein gegen die Werthe $\frac{1}{\mathfrak{w}}$, in denen $\mathfrak{w}$ unendlich gross wird, anzusehen, da nach $\mathfrak{w}$ zuletzt integrirt werden soll. Dieses Verhältniss kehrt sich um, falls man die Integrationsfolge in der Art ändert, dass die Integration nach $\mathfrak{w}$ zuerst ausgeführt wird. Aus dem Umstande, dass die Ausdrücke $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ beliebig klein sind, geht indessen hervor, dass der genannte Wechsel in dem gegenseitigen Verhältnis der unendlich kleinen Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\frac{1}{\mathfrak{w}}$ keinen Einfluss auf den Werth des Integrals Λ_ν ausübt.

Lässt man in (69) die zu vernachlässigenden Bestandtheile $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ fort, so entsteht für Λ_ν der Ausdruck

$$(71) \qquad \Lambda_\nu = \int_{\infty}^{\overline{(0)}} d\mathfrak{w} \int_{e_1}^{e_2} d\mathfrak{v} \int_{\delta}^{1} \Omega' \, d\mathfrak{u}.$$

Hierin ist die zu integrirende (in (68) angegebene) Function Ω' für alle Werthe von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ stetig. Nennt man ferner $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, bezw. $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ beliebige Punktepaare der obigen Integrationswege von $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, so erhält man bei dem Uebergang von den Argumenten $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ zu den Argumenten $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{w}_2$ einen und denselben Werth $\Omega'(\mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_2)$, ohne Rücksicht darauf, in welcher Reihenfolge die Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ variiren. Da ausserdem die Integrationswege feststehende sind, so kann auf Grund der vorangegangenen Rechnungen die Integrationsfolge geändert werden. Indem man zuerst nach $\mathfrak{w}$ integrirt, gewinnt man aus (71) die Gleichung

$$\Lambda_\nu = 2\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}}\mathfrak{v}^{\tau-\varrho-1}\,d\mathfrak{v}\int_\delta^1 (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{d\mathfrak{u}}{\sqrt{\mathfrak{u}}}\,\overline{\int_\infty^{(0)}} e^{-2\mathfrak{w}\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}\,\mathfrak{w}^{1-2\varrho-2\nu}\,d\mathfrak{w}.$$

Es werde nun an Stelle von $\mathfrak{w}$ die Variable t durch die Substitution

$$\mathfrak{w} = \frac{t}{2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}, \qquad d\mathfrak{w} = \frac{dt}{2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}$$

eingeführt. Da $\mathfrak{u}$ reell und positiv ist, und $\mathfrak{v} = re^{\vartheta i}$ gesetzt wurde, so beginnt und endigt der Weg der Variable t in dem unendlich entfernten Punkte

$$\lim_{(s=\infty)}\left(se^{\frac{\vartheta i}{2}}\right),$$

welcher kurz durch $\mathfrak{q}'$ bezeichnet werden soll. Das Integral nach $\mathfrak{w}$ geht, weil auch t den Nullpunkt einmal im positiven Sinne umkreist, hierdurch in den Ausdruck

$$\overline{\int_\infty^{(0)}} e^{-2\mathfrak{w}\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}\,\mathfrak{w}^{1-2\varrho-2\nu}\,d\mathfrak{w} = (4\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\varrho+\nu-1}\overline{\int_{\mathfrak{q}'}^{(0)}} e^{-t}\,t^{1-2\varrho-2\nu}\,dt$$

über. Die Verbindungslinie der Punkte 0 und $\mathfrak{q}'$ bildet mit der positiven reellen Axe einen spitzen Winkel; denn es ist

$$-\frac{\varkappa}{2} \leqq \frac{\vartheta}{2} \leqq \frac{\varkappa}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} < \varkappa < \pi.$$

In Folge dessen wird die Formel (13) des Aufsatzes „Bemerkungen über das Integral $\overline{\Gamma}(a)$“ *) anwendbar, welche für das Integral nach t (obwohl die Grenze $\mathfrak{q}'$ von ϑ abhängt) den constanten Werth

$$\overline{\int_{\mathfrak{q}'}^{(0)}} e^{-t}\,t^{1-2\varrho-2\nu}\,dt = e^{-2\pi i\varrho}\,\overline{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu)$$

ergiebt. Also ist

$$\Lambda_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1}\,e^{-2\pi i\varrho}\,\overline{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu)\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}}\,\mathfrak{v}^{\tau+\nu-2}\,d\mathfrak{v}$$
$$\int_\delta^1 \mathfrak{u}^{\varrho+\nu-\frac{3}{2}}(1-\mathfrak{u})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,d\mathfrak{u},$$

woselbst die Integralgrenzen δ, ε_1, ε_2 wieder durch 0, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ ersetzt werden können. Das Integral nach $\mathfrak{v}$ hat gemäss der Formel (16)

*) Dieser Band, S. 162.

der soeben genannten Arbeit „Bemerkungen etc.“ den Werth $\bar{\Gamma}(1-\tau-\nu)$, und das Integral nach $\mathfrak{u}$ ist das Euler'sche Integral

$$E\left(\varrho+\nu-\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right).$$

Folglich besteht, unter der Annahme, dass die reellen Theile von $\varrho-1$ und $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ positiv sind, die Gleichung

$$(72)\qquad \Lambda_\nu=\int_\infty^{\overline{(0)}} d\mathfrak{w}\int_{\mathfrak{e}_1}^{'\mathfrak{e}_2} d\mathfrak{v}\int_0^1 \Omega'\, d\mathfrak{u}$$
$$=2^{2\varrho+2\nu-1}e^{-2\pi i\varrho}\bar{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu)\bar{\Gamma}(1-\tau-\nu)E\left(\varrho+\nu-\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right),$$

in der Ω' die Function (68), und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ die unendlich kleinen Grössen (64) sind. Durch Benutzung der Reductionsformeln (34) und (37) findet man dann

$$\Lambda_\nu=\frac{2^{2\varrho-1}e^{-2\pi i\varrho}\bar{\Gamma}(2-2\varrho)\bar{\Gamma}(1-\tau)E\left(\varrho-\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)\,\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+\nu-1)\,\tau(\tau+1)\ldots(\tau+\nu-1)}.$$

Wird dieser Werth in die Reihe (67) eingesetzt, so ergiebt sich für das in (66) genannte Integral die Gleichung

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_\infty^{\overline{(0,0)}} dw\int_{\mathfrak{e}_1 w}^{\mathfrak{e}_2 w} dv\int_0^v \Omega\, du\\ &\quad=\mathfrak{C}'\,\mathfrak{F}(\varrho, \sigma, \tau;\ x),\end{aligned}\right.$$

wo unter $\mathfrak{C}'$ die Constante

$$\mathfrak{C}'=(-1)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,2^{2\varrho-1}e^{-2\pi i\varrho}\bar{\Gamma}(2-2\varrho)\,\bar{\Gamma}(1-\tau)\,E\left(\varrho-\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right),$$

und unter Ω die Function (65) verstanden wird.

Das auf der linken Seite von (73) stehende dreifache Integral möge, wenn der reelle Theil von $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ negativ oder gleich Null ist, durch das Integral

$$(74)\qquad \int_\infty^{(0,0)} dw\int_{\mathfrak{e}_1 w}^{\mathfrak{e}_2 w} dv\int_0^{\overline{(v)}} \Omega\, du$$

ersetzt werden, welches sich von dem erstgenannten dadurch unterscheidet, dass die Variable u, vom Nullpunkte aus, einen positiven Umlauf um den Punkt v ausführt. Wird das Integral (74) in eine Reihe von der Form (67) entwickelt, so können für die Coefficienten, in Bezug auf die Umkehrung der Integrationsordnung, dieselben Schlüsse wie für das Integral (69) angewendet werden*). Man erhält

*) Man vergleiche auch § 5 der vorstehenden Abhandlung „Ueber fünf Doppelintegrale.“

auf diese Weise, unter der Voraussetzung, dass der reelle Theil von $\varrho - 1$ positiv ist, für das Integral (74) den Ausdruck

$$\mathfrak{C}'' \, \mathfrak{F}(\varrho, \sigma, \tau; x),$$

in welchem $\mathfrak{C}''$ die Constante

$$\mathfrak{C}'' = 2^{2\varrho-1} e^{-2\pi i \varrho} \bar{\Gamma}(2-2\varrho) \bar{\Gamma}(1-\tau) \overline{E}\left(\varrho - \frac{1}{2}, \sigma - \varrho + \frac{1}{2}\right)$$

bedeutet.*)

Kiel, im Juni 1891.

---

*) Man vergleiche auch die Abhandlung des Verfassers „Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$" im 110[ten] Bande des Crelle'schen Journals.