

### Untersuchung der Microscop-Micrometer des Altonaer Meridiankreises, von Dr. C. F. Pape.

Im Jahre 1856 erhielt der hiesige *Reichenbachsche* Meridiankreis, bei dem bislang die Ablesungen mittelst Nonien ausgeführt wurden, von den Gebrüdern *Repsold* eine solche Einrichtung, dass die von *Hansen* vorgeschlagene Methode der Ablesungen durch Microscope mit Hülfsbögen angewandt werden konnte. (Vgl. Astr. Nachr. № 1061.) Es wurde ein System von 4 Microscopen so angebracht, dass im Felde jedes derselben gleichzeitig die Theilung des Kreises und die eines der Hülfsbögen sichtbar ist. Da nun die *Hansen-*sche Methode den grossen Vortheil hat, dass sie die Untersuchung aller benutzten Theilstriche ohne grosse Mühe gestattet, dass sie folglich Ablesungen gewährt, die von den Fehlern der Striche absolut frei sind, so schien es doppelt lohnend, neben der Untersuchung der Theilungsfehler, die im Jahre 1857 zum Theil vollendet wurde, auch die Micrometer der Microscope einer Prüfung zu unterziehen, da die Fehler derselben möglicher Weise mit den Theilungsfehlern von gleicher Ordnung sein konnten. Diese Untersuchung habe ich ausgeführt, und ich gebe im Folgenden einen kurzen Bericht darüber.

#### 1.

Im Gesichtsfelde jedes der 4 Microscope sieht man, wie erwähnt, gleichzeitig die Theilstriche des Kreises und eines der Hülfsbögen; beide Theilungen sind durch eine schmale Spalte von einander getrennt, welche die Mitte des Gesichtsfeldes durchschneidet. Die auf der Alhidade befindlichen Hülfsbögen sind mit dem einen Pfeiler fest verbunden, so dass sich die Theilung des Kreises gegen die festen Hülfsbögen beliebig verstellen, zugleich aber, durch Klemmen des Kreises, in einer bestimmten Lage unveränderlich erhalten lässt. Gegen beide Theilungen lässt sich nun das Microscopsystem verstellen, indem es vermittelt einer Schraube um die Achse des Kreises gedreht und auf jeden beliebigen Punkt des Hülfsbogens eingestellt werden kann. Durch diese Einrichtung wird eine Untersuchung der Microscope sehr erleichtert.

Durch eine Verstellung des Kreises kann man einen Theilstrich desselben parallel zu einem Theilstrich des Hülfsbogens auf jeden gewünschten Abstand beider Striche verschieben; dieses Intervall kann man durch Einstellung der beiden parallelen Spinnfäden des Microscops auf jeden der

Theilstriche und durch Ablesung der Trommel mit den Angaben der letztern vergleichen. Da nun das Microscopsystem parallel zu beiden Theilungen verschiebbar ist, so ist es klar, dass man jeden beliebigen Theil der Schraube durch dasselbe Intervall prüfen und somit die Werthe der Schraubenwindungen in verschiedenen Theilen der Schraube, wie auch die Ungleichheiten in den einzelnen Windungen, erkennen kann.

Bei Micrometern, welche zu Differentialbeobachtungen dienen, (Helimeter, Fadenmicrometer etc.), kann man durch eine zweckmässige Beobachtungsmethode den Einfluss der letztern, der periodischen, Ungleichheit ganz eliminiren; es ist nur die fortschreitende Ungleichheit zu untersuchen. Hier ist die letztere von geringem Einfluss, indem man nur wenige (2–3) Windungen der Schraube anwendet, dagegen muss die periodische Ungleichheit möglichst sicher ermittelt werden, indem ihre Elimination unmöglich ist.

Die Trommeln der Micrometerschrauben sind in 90 Theile getheilt, zugleich entsprechen 2 Windungen der Schraube dem Abstände zweier Theilstriche des Kreises oder  $180''$ , so dass ein Theil der Trommel genau oder sehr nahe  $1''$  ist. Bei der hiesigen Art der Beobachtungen ist man von den Aenderungen dieses Werthes unabhängig, indem bei jeder Ablesung auf 2 Striche des Hülfsbogens eingestellt wird. Durch die Vergleichung des bekannten Abstandes der Striche mit den Angaben der Trommel erhält man für jede Beobachtung den richtigen Werth der Theile der Trommel, so dass Verschiebungen im Microscopsystem, senkrecht zum Limbus, keinen Einfluss auf die Beobachtungen ausüben.

Zur Untersuchung der fortschreitenden Ungleichheit machte ich den Abstand zwischen einem Theilstrich des Kreises und einem Strich auf dem Hülfsbogen  $= 90''$ , was einer vollen Revolution der Schraube gleichkommt. Mit diesem Intervall verglich ich 6 Windungen der Schraube, 3 auf jeder Seite desjenigen Punktes, welcher dem Mittelpunkt des Gesichtsfeldes entspricht, und den ich den Nullpunkt nennen will. Ich stellte das Microscopsystem so, dass bei der Einstellung der beiden Fäden des Microscops auf den einen der beiden Striche die Ablesung der Trommel sehr nahe  $-3^{\text{R}} 0''$  ergab; die Einstellung auf den zweiten Strich gab dann nahe  $-2^{\text{R}} 0''$ . Dann wurde das Microscopsystem so weit verschoben, bis

die Einstellung des ersten Theilstrichs  $-2''0''$ , die des zweiten  $-1''0''$  ergab u. s. w. Auf diese Weise fuhr ich fort, das Microscopsystem über die Theilung zu verschieben, bis die Einstellung des ersten Strichs die Ablesung  $+2''0''$  und dann die des zweiten  $+3''0''$  ergab; dann wurde dieselbe Messungsreihe in umgekehrter Ordnung wiederholt, bis ich auf den Punct zurückkam, von dem ich ausgegangen war. Hiedurch wurde es möglich, die Messungen von dem Einfluss der Zeit proportionaler Aenderungen in dem Abstände des Microscops vom Limbus, oder in dem Abstände der beiden Theilstriche, frei zu machen. Um für die Ermittlung der Ungleichheit eine hinlänglich sichere Grundlage zu erhalten, wiederholte ich diese Messungen 6 Mal; da nun jeder Strich 2 Mal eingestellt ist, also bei jeder Messung hin und zurück 4 Mal, so beruht der schliessliche Werth einer Revolution auf 24 Einstellungen jedes der beiden Striche.

Die Messungen zur Ermittlung der periodischen Ungleichheit wurden auf ganz ähnliche Art ausgeführt. Ich wählte als Intervall  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{2}$  Revolution, oder  $15''$ ,  $30''$  und  $45''$ . Jede der 6 Revolutionen von  $-3''$  bis  $+2''$  wurde mit diesen Intervallen verglichen. Bei den Abständen von  $15''$  nahm ich als Anfangspuncte der Messungen  $0''$ ,  $15''$ ,  $30''$ ,  $45''$  u. s. w., bei  $30''$  Abstand die Puncte  $0''$ ,  $30''$ ,  $60''$ , endlich bei  $45''$ ,  $0''$  und  $45''$ . Aus den Messungen aller 6 Revolutionen, die ein sehr nahe gleiches Verhalten zeigten, wurde dann ein Mittel genommen. Die 3 Messungsreihen mit  $15''$ ,  $30''$  und  $45''$  Intervall wurden schliesslich so combinirt, dass sich aus ihnen, ganz wie bei der Ermittlung der Theilungsfehler, die wahrscheinlichsten Werthe der Intervalle von  $15''$  zu  $15''$  ergaben, an die ich dann eine periodische Formel anzuschliessen suchte.

Es ist wohl kaum nöthig, noch zu bemerken, dass ich bei der Einstellung auf einen Theilstrich jedes Mal die Schraube in gleicher Richtung drehte.

## 2.

Als ich auf die eben beschriebene Weise die Microscope I. und IV. geprüft hatte, fand sich bei der Reduction der Messungen ein ganz gleiches Verhalten beider Schrauben, indem beide eine starke und in gleichem Sinne wirkende fortschreitende Ungleichheit zeigten. Eine genaue Untersuchung ergab bald, dass eine Unvollkommenheit in der Lage der Kreise die Ursache war. Dieselbe bewirkte eine Aenderung der Intervalle der Striche, die mit den Revolutionen der Schraube fortschritt und im Resultat der Messungen sich mit der fortschreitenden Ungleichheit vereinigte.

Die Ebene des Kreises fällt nämlich nicht genau mit der Ebene der Hülfsbögen zusammen, sondern liegt den Microscopen etwas näher. Diese Unvollkommenheit hat

keinen Einfluss, wenn der eingestellte Strich des Kreises genau die Mitte des Gesichtsfeldes, den Nullpunct, durchschneidet, indem sein Abstand von einem benachbarten Strich des Hülfsbogens dann richtig gemessen wird. Sobald man aber das Microscop gegen beide Striche verschiebt, so dass der Theilstrich des Kreises rechts oder links vom Nullpunct erscheint, wird die Projection desselben auf die Ebene des Hülfsbogens durch parallaxische Verschiebung eine etwas fehlerhafte Lage erhalten. Diese Verschiebung ist direct abhängig von der Erhebung der Ebene des Kreises über die Ebene des Hülfsbogens. Sie bewirkt, dass man dasselbe Intervall auf der einen, z. B. rechten, Seite des Nullpuncts grösser, auf der andern kleiner findet, während man nur dann den richtigen Werth erhält, wenn der Strich auf dem Kreise genau durch den Nullpunct geht.

Vertauscht man nun aber durch Verschiebung des Kreises die beiden Theilstriche so, dass, wenn früher der Strich auf dem Kreise rechts von dem auf dem Hülfsbogen war, er jetzt links von ihm erscheint, und wiederholt die Messung, so wird man auf der rechten Seite des Nullpuncts jetzt das Intervall kleiner, auf der linken Seite dagegen grösser finden, so dass im Mittel aus beiden Messungen der richtige Werth des Intervalls, aus der Differenz beider der doppelte Betrag der parallaxischen Verschiebung sich ergibt. Es ist hierbei vorausgesetzt, dass bei beiden Messungen der Theilstrich des Kreises gleiche Abstände vom Nullpunct hatte; diese Bedingung lässt sich immer erfüllen.

Um zu untersuchen, ob die Ebene beider Kreise parallel, oder ob für verschiedene Ablesungen ein verschiedener Werth der parallaxischen Verschiebung vorhanden sei, habe ich für die Puncte  $0''$ ,  $30''$ ,  $60''$  etc. den doppelten Betrag der letztern für einen Abstand von 3 Revolutionen vom Nullpunct abgeleitet. Ich erhielt, wenn  $p$  die parallaxische Verschiebung bezeichnet:

$2p$		$2p$		$2p$	
$0''$	$2''675$	$120''$	$2''837$	$240''$	$2''425$
$30$	$1,850$	$150$	$2,812$	$270$	$2,500$
$60$	$1,793$	$180$	$2,050$	$300$	$3,012$
$90$	$3,225$	$210$	$1,987$	$330$	$2,612$

Im Mittel  $2''481$ . Es zeigt sich eine kleine periodische Aenderung, die durch die Formel  $0''60 \sin (2z + 30''0)$  beiläufig dargestellt wird, wenn man für  $z$   $0''$ ,  $30''$  etc. substituirt. Dies deutet eine kleine Ungleichförmigkeit in der Lage beider Kreise an. Beiläufig bemerkt, beträgt hiernach die Erhebung der Ebene des Kreises über die der Hülfsbögen nur  $\frac{1}{20}$  Linie, wodurch zugleich der Umstand erklärt wird, dass man trotz des ungleichen Abstandes der beiden Theilungen von den Microscopen, in der Deutlichkeit der Striche beider keinen Unterschied wahrnehmen kann. —

Bei den Beobachtungen der Zenithdistanzen der Gestirne kann man den Einfluss der parallactischen Verschiebung vermeiden, wenn man das Microscop so stellt, dass der Theilstrich des Kreises durch den Nullpunct geht. Allein da man die Oerter der Gestirne für die beiläufige Einstellung vor der Beobachtung nicht immer genau kennt, und somit nach der Einstellung des Nullpuncts des Microscops auf den Theilstrich letztern oft nothwendig etwas verschieben muss, um den Stern durch die Mitte der Fäden passiren zu lassen, so kann man die obige Bedingung nicht immer in aller Schärfe erfüllen. Es ist daher oft nothwendig, an die Beobachtungen eine kleine Correction anzubringen, die vom Abstände des Strichs vom Nullpunct abhängig ist und in den meisten Fällen 0"1 kaum übersteigen wird.

Die Messungen zur Ermittlung der Ungleichheiten der Microscope II. und III. sind auf die oben erwähnte Weise durch Vertauschung der Theilstriche von dem Einfluss der parallactischen Verschiebung befreit. Diejenigen für die Microscope I. und IV. habe ich durch Anbringung des Betrages dieser Verschiebung davon befreit, was um so mehr möglich war, da ich bei der Untersuchung eines Microscops immer denselben Strich des Kreises benutzt habe, für den ich nach-

	Reihe A				Mittel
-3 <sup>z</sup>	91,775	90,625	89,400		90,600
-2	91,550	90,325	89,025		90,300
-1	90,750	89,400	88,675		89,608
0	90,450	89,750	88,075		89,425
+1	90,125	89,550	87,800		89,158
+2	88,725	89,775	87,450		88,650

Leitet man nun aus den Mittelwerthen solche Werthe ab, welche

Reihe A	Reihe B	$\frac{A+B}{2}$	Abw. v. Mittel
-3 <sup>z</sup>	90"980	89"876	-0"124
-2	90,680	90,074	+0,074
-1	89,986	90,017	+0,017
0	89,800	90,006	+0,006
+1	89,532	90,171	+0,171
+2	89,022	89,858	-0,142

Aus der Vergleichung der Differenzen der Revolutionswerthe, wie sie sich aus den einzelnen Messungen ergeben, findet sich der wahrscheinliche Fehler des Resultats einer vollständigen Messung, bei der jeder Strich 4 Mal eingestellt ist = 0"154 und hieraus der wahrscheinliche Fehler jeder

in der Columnne  $\frac{A+B}{2}$  enthaltenen Zahl 0"063. Vergleicht man diesen wahrscheinlichen Fehler mit den obigen Abweichungen vom Mittel, so sieht man, dass sich eine fortschreitende Ungleichheit aus den Messungen nicht erkennen lässt; die Abweichungen vom Mittel sind nicht viel grösser, als die Grösse des wahrscheinlichen Fehlers sie im voraus

träglich direct die parallactische Verschiebung ermitteln konnte. Vorausgesetzt ist hierbei, dass die letztere, also auch, dass die gegenseitige Lage der Kreise inzwischen unverändert geblieben ist. Hierüber kann ich noch nicht entscheiden; spätere Messungen werden aber andeuten, ob überhaupt Verschiebungen in der Lage der Kreise vorkommen, und ob es nöthig sein wird, die im Folgenden gegebenen Resultate für die Microscope I. und IV. zu verbessern. Uebrigens würde der Betrag dieser Verbesserung höchstens einige Hundertel einer Secunde erreichen können.

3.

Von einem der Microscope, *M* III., gebe ich hier die Art, wie die Resultate aus den Messungen abgeleitet sind, etwas ausführlicher, — bei den drei übrigen, die auf gleiche Art behandelt sind, werde ich die Resultate der Messungen kürzer anführen. Diejenigen Messungsreihen, bei denen der Strich auf dem Kreise scheinbar rechts vom Striche auf dem Hilfsbogen war, bezeichne ich mit dem Buchstaben *A*, die, bei denen die Lage der Striche vertauscht war, mit *B*.

Die Messungen zur Untersuchung der fortschreitenden Ungleichheit der Schraube in Intervallen von 90" ergaben Folgendes:

	Reihe B			Mittel
	91,375	89,675	90,375	90,475
	91,550	90,925	91,075	91,183
	92,750	90,750	91,825	91,775
	92,875	91,475	91,475	91,942
	93,225	92,250	92,175	92,550
	92,500	92,025	92,775	92,433

das Mittel aus allen genau gleich 90" machen, so erhält man erwarten liess. Ich betrachte daher die Schraube als fehlerfrei in Bezug auf fortschreitende Ungleichheit.

Da der wahrscheinliche Fehler einer einmaligen Einstellung eines Striches unter 0"2 ist, so würde man bei den Werthen  $\frac{A+B}{2}$  einen wahrscheinlichen Fehler von noch nicht 0"04 erwarten können. Der erheblich grössere Werth, den ich vorher fand, zeigt also, dass in der Lage der Kreise zu einander, oder in der Stellung des Microscopträgers Aenderungen vor sich gegangen sind, die der Sicherheit der Beobachtungen Eintrag gethan haben. Es hat sich überhaupt bei diesen Messungen das Resultat herausgestellt, dass die Lage des geklemmten Kreises gegen die Alhidade beständigen kleinen Aenderungen unterworfen war, obwohl ich immer sorgfältig das Instrument durch eine Erschütterung vor der ersten Einstellung von Spannungen zu befreien suchte. Es sind dies Aenderungen von nicht unbedeutendem Betrage, z. B. bis 0"5, die aber aus dem Zusammentreffen verschiedener Fehlerquellen hervorzugehen scheinen, deren directe Ermittlung oder Beseitigung so gut wie unmöglich ist.

Ich lasse nun noch die Messungen zur Untersuchung der periodischen Ungleichheit folgen; die hier gegebenen Werthe sind die aus beiden Messungsreihen *A* und *B* zusammengezogenen, also frei vom Einfluss der parallactischen Verschiebung:

Intervall 45"			Intervall 30"		
0"	45"		0"	30"	60"
—3 <sup>R</sup>	45,412	45,563	—3 <sup>R</sup>	30,300	30,430
—2	45,562	45,937	—2	30,137	30,650
—1	45,862	45,582	—1	29,812	30,300
0	45,837	45,737	0	30,075	30,375
+1	45,788	46,200	+1	30,025	30,350
+2	46,087	45,900	+2	30,312	30,587
Mittel	45,758	45,820	Mittel	30,110	30,449

Das Verhalten der Schraube in allen untersuchten Windungen ist sich so nahe gleich, dass ich ohne Bedenken die Mittelzahlen aus den Messungen als die Werthe betrachte, welche in den Revolutionen —3 bis +2 die in der Schraube vorhandenen Ungleichheiten erkennen lassen. Die Zahlenangaben für die einzelnen Revolutionen sind nicht direct mit einander vergleichbar, indem ich, um das Instrument während der Tage, an welchen die Messungen angestellt wurden, den Beobachtungen nicht zu entziehen, nothwendig die Messungen nach Abschluss der einzelnen Revolutionen unterbrechen, und eine neue Revolution mit verändertem Intervall untersuchen musste.

Es ergibt sich noch der wahrscheinliche Fehler jeder der obigen Zahlen, die sämmtlich als gleich genau angesehen werden können = 0"109; der wahrscheinliche Fehler der Mittelwerthe ist also = 0"035.

4.

Aus den vorstehenden Mittelwerthen der Intervalle von 15", 30" und 45" sind nun die wahrscheinlichsten Werthe der Intervalle von 15" zu 15" abzuleiten. Es seien  $\frac{90''}{n} + w'_n$ ,  $\frac{90''}{n} + w''_n$ ,  $\frac{90''}{n} + w'''_n$  etc. die wahren Werthe der Angaben der Trommel für Einstellungen in Intervallen von  $\frac{90''}{n}$  bei den Anfangspuncten 0,  $\frac{90''}{n}$ , 2.  $\frac{90''}{n}$  etc. Ebenso seien  $\frac{90''}{p} + w'_p$ ,  $\frac{90''}{p} + w''_p$  etc. die wahren Werthe für Intervalle von  $\frac{90''}{p}$  u. s. w., und  $\frac{90''}{q} + w'_q$ ,  $\frac{90''}{q} + w''_q$  für Intervalle von  $\frac{90''}{q}$ .

Nun möge das Intervall, mit dem die Messungen ausgeführt sind, statt  $\frac{90''}{n}$ ,  $\frac{90''}{p}$  etc. gewesen sein  $\frac{90''}{n} + c$ ,  $\frac{90''}{p} + c$ ,  $\frac{90''}{q} + c$ . Die wirklich gemessenen Werthe seien nun

Intervall 15"						
0"	15"	30"	45"	60"	75"	
—3 <sup>R</sup>	16,262	16,281	16,150	16,425	15,875	15,825
—2	15,650	15,525	16,187	16,087	15,806	15,650
—1	15,487	15,375	15,825	15,875	15,587	15,787
0	15,506	15,575	15,725	15,962	15,825	16,162
+1	14,413	14,700	14,512	15,112	14,387	14,437
+2	15,987	16,050	15,850	16,000	15,787	15,700
Mittel	15,551	15,584	15,708	15,915	15,545	15,593

oder der Aenderungen in den Theilen des Apparats sind; diese will ich mit  $a'_n, a''_n, \dots, a'_p, a''_p, \dots$  bezeichnen. Dann

hat man die Gleichungen:

$$\frac{90''}{n} + w'_n + c - a'_n = \frac{90''}{n} + v'_n$$

$$\frac{90''}{n} + w''_n + c - a''_n = \frac{90''}{n} + v''_n$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{90''}{n} + w^{n-1}_n + c - a^{n-1}_n = \frac{90''}{n} + v^{n-1}_n$$

und ähnliche Gleichungen für die übrigen Messungsreihen.

Nun besteht die Bedingung, dass

$$w'_n + w''_n + w'''_n + \dots + w^{n-1}_n = 0; \text{ ebenso}$$

$$w'_p + w''_p + w'''_p + \dots + w^{p-1}_p = 0 \text{ etc.}$$

Addirt man also die obigen Gleichungen, so wird

$$nc - a'_n - a''_n - \dots - a^{n-1}_n = v'_n + v''_n + \dots + v^{n-1}_n,$$

folglich:

$$c = \frac{v'_n + v''_n + \dots + v^{n-1}_n}{n} + \frac{a'_n + a''_n + \dots + a^{n-1}_n}{n}$$

Oder, wenn man setzt:

$$V = \frac{v'_n + v''_n + \dots + v^{n-1}_n}{n}, \quad A = \frac{a'_n + a''_n + \dots + a^{n-1}_n}{n},$$

$c = V + A$ : ähnliche Werthe erhält man für die übrigen Reihen.

Für die obigen Gleichungen kann man also schreiben:

$$w'_n - v'_n + V + A = a'_n$$

$$w''_n - v''_n + V + A = a''_n$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$w^{n-1}_n - v^{n-1}_n + V + A = a^{n-1}_n$$

Aus diesen Gleichungen und den ähnlichen für die andern Reihen sind nun die Werthe von  $w', w'', \dots$  abzuleiten, unter der

zukommt. Allein, da ausserdem die Bedingung stattfindet, dass  $\sum w_n = 0$ , so ist jede der obigen Gleichungen der negativen Summe der übrigen gleich. Die Unbekannten sind also nicht von einander unabhängig, und man kann nicht die Grössen  $a'_n \dots$  einzeln durch  $w'_n \dots$  und die bekannten

Grössen ausdrücken, sondern muss eine derselben oder eine Function von allen in den Gleichungen beibehalten. Am zweckmässigsten erscheint hier die Function

$$A = \frac{a'_n + a''_n + \dots + a^{n-1}_n}{n}.$$

Hiernach wird die Gleichung des Minimums

$$M = [w'_n - v'_n + V_n + A_n]^2 + [w''_n - v''_n + V_n + A_n]^2 + \text{ähnlichen Gliedern aus den übrigen Messungsreihen.}$$

Wird diese Gleichung in Bezug auf  $A_n$  differenzirt, so erhält man

$$0 = w'_n - v'_n + V_n + A_n + w''_n - v''_n + V_n + A_n + \dots + w^{n-1}_n - v^{n-1}_n + V_n + A_n$$

Also, wenn man addirt,

$$0 = \sum w_n - \sum v_n + n V_n + n A_n.$$

Nun ist  $n V_n = v'_n + v''_n + v'''_n + \dots = \sum v_n$ . Aus der Gleichung folgt also  $A_n = 0$ .

Die Gleichung des Minimums aus der  $w'_n, w''_n \dots$  abzuleiten sind, wird nun also

$$M = [w'_n - v'_n + V_n]^2 + [w''_n - v''_n + V_n]^2 \dots (+w^{n-1}_n - v^{n-1}_n + V_n)^2 + \text{ähnlichen Gliedern aus den andern Reihen.}$$

Nun ist im vorliegenden Fall  $n = 6, p = 3, q = 2$ , und man hat

$$\begin{aligned} w'_p &= w'_n + w''_n & w'_q &= w'_n + w''_n + w'''_n \\ w''_p &= w''_n + w^{IV}_n & w''_q &= w''_n + w^{IV}_n + w^{VI}_n \\ w'''_p &= w^{VI}_n + w^{VI}_n \end{aligned}$$

Hiermit werden die Gleichungen, aus denen die Unbekannten zu bestimmen sind, sehr einfach, wie folgt:

$$\begin{aligned} 3 w'_n + 2 w''_n + w'''_n &+ m' = 0 \\ 2 w'_n + 3 w''_n + w'''_n &+ m'' = 0 \\ w'_n + w''_n + 3 w'''_n + w^{IV}_n &+ m''' = 0 \\ w'''_n + 3 w^{IV}_n + w^V_n + w^{VI}_n &+ m^{IV} = 0 \\ w^{IV}_n + 3 w^V_n + 2 w^{VI}_n &+ m^V = 0 \\ w^{IV}_n + 2 w^V_n + 3 w^{VI}_n &+ m^{VI} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= V_n + V_p + V_q - v'_n - v'_p - v'_q \\ m'' &= V_n + V_p + V_q - v''_n - v''_p - v''_q \text{ etc.} \end{aligned}$$

Die aus obigen Gleichungen hervorgehenden wahrscheinlichsten Werthe sind nun

$$\begin{aligned} w'_n &= -0''0601 & \text{also} & \frac{90''}{n} + w'_n = 14''9399 \\ w''_n &= -0,0271 & \frac{90''}{n} + w''_n &= 14,9729 \\ w'''_n &= +0,0518 & \frac{90''}{n} + w'''_n &= 15,0518 \\ w^{IV}_n &= +0,2450 & \frac{90''}{n} + w^{IV}_n &= 15,2450 \\ w^V_n &= -0,1288 & \frac{90''}{n} + w^V_n &= 14,8712 \\ w^{VI}_n &= -0,0808 & \frac{90''}{n} + w^{VI}_n &= 14,9192 \end{aligned}$$

Aus der Summe der übrigbleibenden Fehlerquadrate ergibt sich der wahrscheinliche Fehler jedes beobachteten  $v'_n, v''_n$  etc.  $= 0''035$ , also genau übereinstimmend mit dem obigen Werth. Endlich der wahrscheinliche Fehler der Grössen  $w'_n, w''_n$  etc. ist  $= 0''028$ .

5.

Eine wegen der periodischen Ungleichheit der Schraube an die Ablesung  $z$  der Trommel anzubringende Correction  $\Delta z$  wird die Form haben

$\Delta z = p' \cos z + q' \sin z + p'' \cos 2z + q'' \sin 2z + \dots$  wo  $p', q', p'', q''$  Constanten sind, die von der Form der Ungleichheit abhängen, und wo in  $\cos z, \sin z$  etc.  $z$  den Winkel bezeichnet, welchen die Richtungen nach dem Nullpunct der Trommel und dem Punct der Ablesung an der Schraubenaxe einschliessen. Für eine zweite Ablesung  $z'$  wird man die Correction haben

$$\Delta z' = p' \cos z' + q' \sin z' + p'' \cos 2z' + q'' \sin 2z'.$$

Das zwischen beiden Ablesungen liegende Intervall wird also die Correction erfordern  $\Delta z' - \Delta z$  oder

$$p' \cos z' + q' \sin z' + p'' \cos 2z' + q'' \sin 2z' - p' \cos z - q' \sin z - \dots$$

Für ein Intervall  $\frac{90''}{n} + m'_n$ , welches zwischen den Ablesungen  $z'$  und  $z$  liegen möge, wird man nun haben, um es fehlerfrei also  $= \frac{90''}{n}$  zu erhalten

$$\begin{aligned} \frac{90''}{n} + m'_n + p' \cos z' + q' \sin z' + \dots - p' \cos z - q' \sin z - \dots &= \frac{90''}{n} \\ \text{oder } m'_n + p' \cos z' + q' \sin z' + \dots - p' \cos z - q' \sin z &= 0. \end{aligned}$$

Da nun  $p', q', p'', q''$  kleine Grössen sind, so wird man für

$z'$  schreiben können  $z+f$ , wo  $f$  die Drehung der Schraube im Bogen ausdrückt, welche dem Intervall  $\frac{90''}{n}$  auf der Trommel entspricht. Man hat folglich:

$$w'_n + p' [\cos (z+f) - \cos z] + q' [\sin (z+f) - \sin z] + p'' [\cos 2(z+f) - \cos 2z] + q'' [\sin 2(z+f) - \sin 2z] = 0$$

und ähnliche Gleichungen für die übrigen Werthe  $w''_n, w'''_n$  etc. Eine kleine Umformung ergiebt die bequemere Form:

$$w'_n = 2p' \sin \frac{1}{2}f \sin (z + \frac{1}{2}f) - 2q' \sin \frac{1}{2}f \cos (z + \frac{1}{2}f) + 2p'' \sin f \sin (2z + f) - 2q'' \sin f \cos (2z + f).$$

Aus den 6, den Grössen  $w', w''$  etc. entsprechenden Gleichungen sind nun die Unbekannten  $p', q', p'', q''$  unter der Bedingung, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede ein Minimum werde, abzuleiten. Man erhält für den vorliegenden Fall unmittelbar die Gleichungen:

$$6p' \sin \frac{1}{2}f = \sum w \sin (z + \frac{1}{2}f)$$

$$6q' \sin \frac{1}{2}f = -\sum w \cos (z + \frac{1}{2}f)$$

$$6p'' \sin f = \sum w \sin (2z + f)$$

$$6q'' \sin f = -\sum w \cos (2z + f)$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} 3p' &= +0''0154 \\ 3q' &= +0,3790 \\ 5,196p'' &= +0,1802 \\ 5,196q'' &= -0,2338 \end{aligned}$$

Die Correction  $\Delta z$ , welche einer Ablesung  $z$  der Trommel hinzuzufügen ist, um dieselbe von der periodischen Ungleichheit der Schraube zu befreien, ist nun für die Schraube des Microscops III.

$$\Delta z = +0''0051 \cos z + 0''1263 \sin z + 0''0347 \cos 2z - 0''0450 \sin 2z.$$

6.

Ich werde nun noch die Messungen für die übrigen Microscope auführen. Die Untersuchung in Intervallen von einer vollen Revolution ergab die folgenden Werthe eines Schraubenungsangs:

	Microscop I.	Abw. v. Mittel.	Microscop II.	Abw. v. M.	Microscop IV.	Abw. v. M.
-3 <sup>R</sup>	90''116	+0,116	89''789	-0,211	89''835	-0,165
-2	90,022	+0,022	90,043	+0,043	90,126	+0,126
-1	89,976	-0,024	89,806	-0,194	89,835	-0,162
0	89,827	-0,173	90,122	+0,122	89,808	-0,192
+1	90,063	+0,063	90,214	+0,214	90,207	+0,207
+2	89,994	-0,006	90,026	+0,026	90,186	+0,186

Eine gleichförmige Aenderung der Werthe der Windungen zeigt sich bei keinem Microscope. Da jedoch die vorstehenden Angaben noch mit einiger Unsicherheit behaftet sind, so habe ich für die beiden Revolutionen -1 und 0, welche bei den Beobachtungen allein benutzt werden, die Anzahl der Messungen verdoppelt und hiedurch die folgenden Werthe erhalten:

	Microscop I.	II.	III.	IV.
-1 <sup>R</sup>	90''059	89,988	89,913	89,937
0	89,941	90,012	90,087	90,063

Der wahrscheinliche Fehler ist bei allen Werthen sehr

nahe gleich, nämlich = 0''04. Die Abweichungen der beiden Revolutionen von der völligen Gleichheit sind, zumal für das Mittel aus allen Microscopen, so gering, dass es für die Beobachtungen gleichgültig ist, ob man die aus den obigen Zahlen hervorgehenden Verhältnisse beider Revolutionen in Rechnung nimmt, oder ob man die Werthe für alle Microscope als völlig gleich ansieht.

Die Messungen zur Untersuchung der periodischen Ungleichheit gebe ich etwas ausführlicher, nämlich für jede Windung, indem es von Interesse ist, die Aehnlichkeit der Periode in jeder einzelnen Windung zu erkennen.

#### Microscop I.

Mikroskop.											
	Intervall 45"		Intervall 30"			Intervall 15"					
	0"	45"	0"	30"	60"	0"	15"	30"	45"	60"	75"
—3 <sup>R</sup>	45"460	44,903	31"929	30,832	31,028	16"048	15"970	15"385	15"699	15"907	15"853
—2	45,400	44,822	31,940	30,969	31,264	16,248	15,932	15,829	15,902	15,975	15,964
—1	45,682	45,108	31,884	31,004	31,333	15,662	15,201	15,265	15,521	15,411	15,250
0	45,410	45,036	31,679	30,949	30,986	15,279	15,454	14,901	15,190	15,372	15,403
+1	45,771	45,259	31,965	31,218	31,522	16,150	16,206	15,496	15,551	15,682	15,597
+2	45,207	45,523	31,942	31,021	31,658	15,578	15,292	14,857	14,954	15,060	15,166
Mittel	45,488	45,109	31,890	30,999	31,299	15,833	15,676	15,289	15,469	15,568	15,539

## Microscop II.

	Intervall 45"		Intervall 30"			Intervall 15"					
	0"	45"	0"	30"	60"	0"	15"	30"	45"	60"	75"
—3 <sup>a</sup>	44''275	44,712	30''063	29,700	30,425	14''294	13''882	14''095	13''933	14''471	14''759
—2	44,125	44,487	29,850	29,725	30,637	14,496	14,159	13,897	14,234	14,522	14,147
—1	44,337	44,612	29,887	29,500	30,475	14,798	14,611	14,724	14,537	15,100	14,763
0	44,887	45,250	30,137	29,687	30,487	14,850	14,487	15,075	15,038	15,426	15,031
+1	44,687	45,050	30,500	30,175	30,813	15,377	14,903	15,010	15,403	15,465	15,328
+2	44,800	45,237	30,212	29,950	30,163	15,654	15,878	15,916	15,504	15,817	15,468
Mittel	44,519	44,891	30,108	29,789	30,500	14,912	14,653	14,786	14,775	15,133	14,919

## Microscop IV.

	Intervall 45"		Intervall 30"			Intervall 15"					
	0"	45"	0"	30"	60"	0"	15"	30"	45"	60"	75"
—3 <sup>a</sup>	45"361	43,584	30"898	30,274	29,242	16"539	17"032	16"749	15"849	16"124	16"384
—2	45,453	43,304	30,890	30,099	29,208	16,701	16,661	16,762	15,982	15,645	16,118
—1	45,178	43,571	30,652	29,645	29,404	16,664	16,706	17,004	16,049	15,782	16,333
0	45,564	43,304	30,851	29,635	29,250	16,609	16,776	16,668	15,685	16,128	16,004
+1	45,917	43,887	30,626	29,785	29,495	16,647	17,013	16,947	15,714	15,919	16,371
+2	45,205	43,458	31,038	30,206	29,624	16,909	16,951	16,876	16,293	15,961	16,687
Mittel	45,446	43,518	30,829	29,941	29,370	16,678	16,857	16,834	15,929	15,926	16,316

Die Werthe der Intervalle in den verschiedenen Windungen sind hier, wie ich schon oben erwähnt, nicht direct unter einander vergleichbar, indem meistens nur für jede einzelne Revolution der Werth des Intervalls ungeändert blieb, aus Gründen, die ich früher angeführt habe. Ich bemerke nur noch, dass die Messungen zur Untersuchung des Microscops II. sämmtlich von Herrn *Johannes Repsold* ausgeführt

sind, der seit einem halben Jahre an den Arbeiten auf der hiesigen Sternwarte Theil nimmt.

7,

Aus der Verbindung, der vorstehenden Messungsreihen ergeben sich nach der oben erörterten Methode die folgenden Werthe der Grössen  $w'$ ,  $w''$  etc.

Microscop I.		Microscop II.		Microscop IV.	
$w' = +0''3092$	$15'' + w' = 15''3092$	$w' = +0''0971$	$15'' + w' = 15''0971$	$w' = +0''2622$	$15'' + w' = 15''2622$
$w'' = +0,1521$	$15 + w'' = 15,1521$	$w'' = -0,1618$	: 14,8382	$w'' = +0,4412$	: 15,4412
$w''' = -0,2777$	$15 + w''' = 14,7223$	$w''' = -0,1288$	: 14,8812	$w''' = +0,3320$	: 15,3320
$w^{IV} = -0,1093$	$15 + w^{IV} = 14,8907$	$w^{IV} = -0,1550$	: 14,8450	$w^{IV} = -0,4303$	: 14,5697
$w^V = -0,0227$	$15 + w^V = 14,9773$	$w^V = +0,2813$	: 15,2813	$w^V = -0,4975$	: 14,5025
$w^{VI} = -0,0517$	$15 + w^{VI} = 14,9483$	$w^{VI} = +0,0674$	15,0674	$w^{VI} = -0,1076$	14,8924

Sucht man aus diesen Werthen von  $w'$ ,  $w''$ ... die Constanten  $p'$ ,  $q'$ ,  $p''$ ,  $q''$  der oben angeführten periodischen Formel so zu bestimmen, dass die Anbringung der aus ihr berechneten Correction wegen der periodischen Ungleichheit der Schraube an die Ablesung diese möglichst fehlerfrei macht, so erhält man:

Microscop I.		Microscop II.		Microscop IV.	
$3p' = +0''2710$		$3p' = -0''4150$		$3p' = +1''5059$	
$3q' = -0,5580$		$3q' = -0,3880$		$3q' = -0,1260$	
$5,196p'' = +0,4600$		$5,196p'' = +0,0040$		$5,196p'' = -0,3390$	
$5,196q'' = +0,1940$		$5,196q'' = -0,1790$		$5,196q'' = +0,0850$	

Die Verbesserung der Ablesungen wegen der periodischen Ungleichheit ergeben also die folgenden Formeln, denen ich die vorhin für Microscop III. erhaltene hinzufüge.

Microscop I.	$\Delta z = -0''1789 + 0''0904 \cos z - 0''1860 \sin z + 0''0885 \cos 2z + 0''0373 \sin 2z$
II.	$\Delta z = +0,1375 - 0,1383 \cos z - 0,1293 \sin z + 0,0008 \cos 2z + 0,0344 \sin 2z$
III.	$\Delta z = -0,0398 + 0,0051 \cos z + 0,1263 \sin z + 0,0347 \cos 2z - 0,0450 \sin 2z$
IV.	$\Delta z = -0,4365 + 0,5017 \cos z - 0,0420 \sin z - 0,0652 \cos 2z - 0,0164 \sin 2z$

Ich habe in die vorstehenden Formeln schon eine Constante eingefügt, die so gewählt ist, dass für die Ablesung 0 der Trommel auch die aus den Formeln hervorgehende Correction = 0 wird.

Diese Formeln werden nur dann vollständig ihren Zweck erfüllen, wenn die Ungleichheit sich genau durch eine Function, die bis zu dem Sinus und Cosinus des doppelten Winkels geht, darstellen lässt; wenn nicht, so werden sie nur eine genäherte Correction ergeben. Die Vergleichung mit den obigen Messungen wird zeigen, wie weit dies erreicht ist. Die Anbringung der Correction wegen periodischer Ungleichheit an die Ablesungen muss die Messungen eines Intervalls in verschiedenen Theilen der Schraube völlig gleich machen. Die obigen Werthe  $15'' + w'$ ,  $15'' + w''$  u. s. w. müssen also sämmtlich einander gleich, nämlich  $15''000$  werden, wenn man den Anfangs- und Endpuncten der Ablesungen, zwischen denen sie enthalten sind, die aus den Formeln hervorgehenden Correctionen hinzulegt. Es wird:

	Micr. I.	Micr. II.	Micr. III.	Micr. IV.
$15'' + w'$	$15''002$	$15''080$	$14''956$	$15''038$
$15 + w''$	$14,998$	$15,917$	$15,046$	$14,968$
$15 + w'''$	$15,002$	$15,086$	$14,953$	$15,005$
$15 + w^{IV}$	$14,997$	$14,919$	$15,047$	$14,941$
$15 + w^V$	$15,003$	$15,083$	$14,954$	$15,032$
$15 + w^{VI}$	$14,997$	$14,914$	$15,044$	$14,995$

Bei Microscop I. ist ein vollständiger Anschluss erreicht; bei Microscop II. und III. zeigt der Gang der Zahlen, dass dasselbe möglich ist, wenn man noch ein Glied hinzufügt, welches vom Cosinus des dreifachen Winkels abhängt. Dies Glied ist für Microscop II.  $-0''041 + 0''041 \cos 3z$ , für Microscop III.  $+0''023 - 0,023 \cos 3z$ . Hiermit wird dann die Darstellung:

$15'' + w'$	$14''998$	$15''002$
$15 + w''$	$15,003$	$15,000$
$15 + w'''$	$14,994$	$14,999$
$15 + w^{IV}$	$15,005$	$15,001$
$15 + w^V$	$15,001$	$15,000$
$15 + w^{VI}$	$15,000$	$14,998$

also vollkommen scharf. Bei Microscop IV. lassen sich die Beobachtungen überall nicht scharf durch eine Formel darstellen und es ist mir zweckmässiger erschienen, aus den beobachteten Werthen direct durch Interpolation die Correction abzuleiten. Ich füge hier nun noch eine Tafel hinzu, welche die Correctionen, die an die Ablesungen anzubringen sind, enthält. Man sieht aus ihr, dass der Einfluss dieser Werthe dem der Theilungsfehler nahe gleichkommt und dass es also von wesentlichem Interesse ist, durch eine Untersuchung der Microscope ihre Fehler kennen zu lernen.

Correctionstafel.

Ablesung	Micr. I.	Micr. II.	Micr. III.	Micr. IV.	Mittel
0"	0''00	0''00	0''00	0''00	0''00
10	-0,18	-0,09	+0,04	-0,16	-0,10
20	0,42	-0,06	+0,07	-0,42	-0,21
30	-0,46	+0,06	+0,09	-0,70	-0,25
40	-0,28	+0,14	+0,09	-1,01	-0,27
50	-0,25	+0,27	-0,05	-0,90	-0,23
60	-0,08	+0,35	-0,21	-0,61	-0,14
70	-0,08	+0,17	-0,15	-0,23	-0,07
80	-0,01	+0,03	-0,03	-0,07	-0,02
90	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Der wahrscheinliche Fehler des Mittelwerthes aus den vorstehenden Angaben der Microscope übersteigt nicht  $0''02$ . — Schliesslich füge ich noch hinzu, dass es nothwendig sein wird, die Messungen, die sämmtlich bei Temperaturen von  $+10''$  bis  $+15''$  ausgeführt sind, wenigstens theilweise bei sehr niedrigen Temperaturen zu wiederholen, indem es wahrscheinlich ist, dass durch die Verhärtung des Oels in den Gängen der Schraube Aenderungen der Periode hervorgerufen werden, die von Einfluss auf die Beobachtungen sein können.

C. F. Pape.

## Anzeige.

Es ist schon in den früheren Bänden dieser Nachrichten bemerkt, dass ohne ausdrückliche Bestellung und Vorausbezahlung keine Nummer eines neuen Bandes versandt wird. Die Herren Abonnenten, welche diese Blätter fortzusetzen wünschen, werden also ersucht, um Unterbrechungen zu vermeiden, baldmöglichst ihre Bestellungen einzusenden.

Man pränumerirt hier an Ort und Stelle mit 4  $\mathfrak{z}$  26  $\beta$  Rm. oder 3  $\mathfrak{z}$  6 Sgr. Preuss. Cour. und in Hamburg mit 8  $\mathfrak{z}$  Hamb. Crt. und von diesem Preise wird auch den Buchhandlungen und Postämtern kein Rabatt gegeben, die also nothwendig ihren Abnehmern höhere Preise berechnen müssen. Ueberhaupt sind alle in dieser Anzeige bemerkten Preise, Nettopreise.

Für die mit der Post versandten Exemplare findet, wegen des zu erlegenden Portos, eine kleine Erhöhung Statt, so dass der Preis für den Band sich stellt: für Deutschland auf 4  $\mathfrak{z}$  Preussisch Courant, für England auf 15 sh., für Frankreich auf 17  $\frac{1}{2}$  Frs., für Nordamerika auf 4  $\frac{1}{2}$  Dollar, für Italien und Holland auf 1  $\frac{1}{2}$  Holl. Ducaten. —

Einzelne Nummern werden nur zur Completirung, wenn sie vorrätig sind, à 4 ggr. abgelassen.