

Curve k -gonali di 1.^a e di 2.^a specie.

(Memoria II (*) (**) (***) di FEDERICO AMODEO, a Napoli.)

Ut omnia candide legantur et defectus in materia tam
difficili non tam reprehendatur, quam novis lectorum co-
natibus investigentur, et benigne suppleantur, enixe rogo.

IS. NEWTON. *Philosophiae naturalis*
Principia mathematica.

§ 1. Curve k -gonali di 1.^a specie.

1. Le curve k -gonali tipiche, di cui si è trattato nella Memoria I, e che ora diremo pure curve k -gonali di 1.^a specie, hanno l'ordine $m \geq k + 1$, il genere $p = (k - 1)m - \frac{1}{2}(k - 1)(k + 2)$, un solo punto multiplo $(m - k)$ -uplo ed un sistema lineare ∞^{m-k-1} di curve aggiunte minime di ordine $m - k - 1$

(*) Dopo spiacevole interruzione, dovuta ad una lunga e penosa malattia ed a un avvenimento lieto della mia vita, ho ripreso ora lo studio di questo argomento sul quale pubblicai in questi *Annali* la *Memoria I* (vol. 21, serie 2.^a, pag. 221-236, 1893). Ciò che qui pubblico, era già all'ingrosso preparato fin d'allora, oltre a molti altri teoremi che spero poter aver il tempo di pubblicare presto.

(**) *Errata-Corrige della Memoria I.*

Pag. 223, lin. 7 } dal basso, $\frac{(2k-2)!}{(k+1)!(k+2)!}$ si legga $\frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!}$
» 224, » 16 }

e si noti che le applicazioni di detta formola sono esatte;

pag. 226, lin. 2 dal basso, *proiezione di* si legga *referita univocamente ad*

» 229, lin. 13, 14, *una caratteristica delle curve k -gonali piane è la se-
guente* si legga *una caratteristica delle curve k -gonali piane provviste
di curve aggiunte minime è la seguente,*

e fo notare che, richiamata la mia attenzione dal sig. FANO su questo punto, io stesso gli comunicai la correzione a farsi.

(***) Per non mettere altro tempo in mezzo rispondo qui al prof. BERTINI, che in questi *Annali* (tomo 22, serie 2.^a, 1894) nella Memoria, *La geometria delle serie lineari*
Annali di Matematica, tomo XXIV.

spezzate in $m - k - 1$ rette. Possiamo rappresentare i caratteri di queste curve in funzione della *gonalità* k e della *dimensione* R del sistema di curve aggiunte minime; in tal caso l'ordine è $m = k + R + 1$, il genere è $p = \frac{1}{2}(k-1)(k+2R)$, il punto singolare è di molteplicità $R+1$, le curve aggiunte minime sono di ordine R spezzate in R rette.

sopra una curva piana secondo il metodo algebrico, fece una acerba critica alla Memoria I e a due mie Note pubblicate nei Rend. della R. Acc. dei Lincei del 1893 (*Curve aggiunte minime*, e *Serie residue nella serie canonica delle curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$*).

Ho già sopra mostrato a che si riducono gli emendamenti da farsi alla Memoria I [della quale il prof. BERTINI (loc. cit., nota del n.º 44) segnalava altri errori, non esistenti, a pag. 222, 231, 232]. Ora esaminerò gli appunti fatti alle due pubblicazioni dei Lincei [loc. cit., nota (***) al n.º 17].

Non è il caso di scagionarmi dell'accusa di aver riportate per mie alcune dimostrazioni che, fatte in collaborazione dai sig.ⁱ BERTINI e SEGRE e da essi esposte nei loro corsi, mi valsero ad enunciare teoremi più generali di quelli per i quali esse furono fatte; perchè quest'accusa snatura lo scopo della mia Nota, che, come dichiarai nella prefazione delle *Serie residue*, era di far conoscere la forma più generale (non data da altri prima di me) di teoremi noti ed importanti e non di dar per mie le dimostrazioni, che da anni le scuole di Pavia e di Torino, e certamente anche quelle di altre Università, conoscevano. Nè dall'analogia accusa di avermi voluto appropriare una dimostrazione di BOBEK (che io ho la coscienza di avere espressamente citato); e di non aver citato come appartenente al BERTINI stesso un caso particolare di un mio teorema enunciato alla fine del § 1 delle *Curve agg. minime*. E metterò da parte, come cosa di poco conto, la *improprietà* della parola *proiezione* usata per *corrispondenza univoca*, se le due curve di cui si tratta non sono dello stesso ordine.

Quindi restano due soli appunti.

1.º « *Delle due condizioni a principio del § 3 [Curve agg. minime] (sulla coesistenza delle quali l'Autore ritorna poco dopo) la seconda deve includere la prima.* » Fo notare che ciò non ha conseguenza alcuna sui risultati delle mie Note.

2.º « *Se $p = \frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha)$ si deve porre insieme necessariamente $\alpha = 0$; e perciò il teorema del § 4 (Serie residue) è illusorio, e per la stessa ragione nell'ultimo teorema del § 3 (delle Curve aggiunte) deve porsi $\alpha = 0$.* »

Qui il prof. BERTINI ha preso una tripla svista; poichè:

a) È $p = \frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha)$ per $\alpha = 0$ e per $p = \frac{m\alpha}{2} + 1$, ed in prova di ciò io qui presento l'esistenza di infinite curve (quelle della prima colonna del quadro del § 2) rappresentate dal simbolo $C_{(k-1),2}^{2k}$, per le quali $\alpha = k-2$, $m = 2k$, $p = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$, cioè proprio $p = \frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha)$ senza essere $\alpha = 0$.

Tutte le curve k -gonali di 1.^a specie sono date dal simbolo

$$C_{\frac{1}{2}(k-1)(k+2R)}^{k+R+1} \quad \text{con 1 punto } (R+1)\text{-uplo.}$$

Qui è da notarsi che R può prendere tutti i valori interi positivi compreso lo zero, e k tutti i valori interi positivi > 1 : però il valore di $k=1$, che noi abbiamo eliminato anche per la precedente Memoria, non forma eccezione, esso comprende tutte le curve razionali di ordine $R+2$, con un punto $(R+1)$ -uplo, per le quali regge quanto diciamo per le altre curve k -gonali di 1.^a specie.

2. Fra queste curve sono particolarmente interessanti, per il seguito delle nostre ricerche, quelle che si hanno per $R=0$, cioè le curve $C_{\frac{1}{2}(k-1)k}^{k+1}$, che sono le curve di ordine $k+1$ prive di punti doppi, e sono pure le curve k -gonali di minimo ordine.

Già sappiamo che queste curve hanno $\infty^1 g_k^1$ segate da fasci di raggi di 1.^o ordine che hannò per centri i diversi punti della curva.

Qui noteremo altre loro proprietà che ci necessiteranno in seguito.

a) Ogni curva di ordine k , che passa per k punti per diritto di una C^{k+1} k -gonale, sega ulteriormente la curva in altri k^2 punti, che sono punti base di un fascio di C^k , che sega sulla C^{k+1} la serie g_k^1 individuata dal primo gruppo.

Infatti il gruppo dei k^2 punti e il $(k+1)^{\text{esimo}}$ punto di C^{k+1} allineato col gruppo di k punti scelto ad arbitrio, sono corresiduali rispetto ad un gruppo della g_k^1 .

Per $k=2$ si ha come caso particolare il notissimo teorema sulle cubiche riguardante il quadrangolo inscritto ed il suo punto opposto.

b) Il teorema del § 4 (*Serie residue*), che il prof. BERTINI dichiara illusorio, prende questa forma non priva d'interesse:

Per le serie residue g_n'' , g_n'' rispetto alla serie canonica segata dalle C^{m-2} aggiunte si ha sempre

$$2(r-r') = n - n' \quad (\text{teor. di NÖTHER});$$

mentre per tutte le serie residue g_n'' , g_n'' rispetto alla serie canonica segata dalle C^{m-2-k} aggiunte, per $z > 0$, si ha:

$$2(r-r') > (n - n').$$

c) Nel teorema ultimo del § 3 (*Curve agg. minime*) non deve farsi alcuna variazione.

b) Fissati sopra una curva $C_{\frac{1}{2}(k-1)k}^{k+1}$ un punto O ed un gruppo arbitrario G di altri $\frac{k(k+3)}{2} - k$ punti, ogni curva C^k che passa per k punti per diritto con O , e per il gruppo G , passerà anche per altri $\frac{(k-1)k}{2}$ punti fissi della curva C^{k+1} .

Perchè ciascuna di queste curve coincide con una curva del fascio di curve C^k del precedente teorema.

Fra i tanti corollarii cui possono dar luogo questi teoremi prescegliamo a titolo di esempio i seguenti:

1.^o Se per k punti per diritto di una C^{k+1} k -gonale si conducono k rette, queste segano ulteriormente la C^{k+1} in k^2 punti base di un fascio di C^k .

2.^o Se si congiungono k punti per diritto con un punto O di una C^{k+1} k -gonale con un suo punto A , ogni curva C^k , condotta per A , per k punti per diritto con O e per un numero soddisfacente, $\frac{k(k+1)}{2} - 1$, dei rimanenti $k(k-1)$ punti d'intersezione delle rette condotte per A con la C^{k+1} , ha un contatto k -punto in A .

3.^o In particolare per $k=3$, ogni retta condotta per un flesso di una C_3^4 sega la curva in tre punti A, B, C , che sono punti base di un fascio di cubiche aventi con la C_3^4 un contatto di 2.^o ordine in ciascuno di essi e che sega sulla C_3^4 terne di punti allineati col tangenziale del flesso.

4.^o Se da un flesso C_3^4 si tira una tangente alla curva che tocchi in A e seghi in B la curva stessa, vi è un fascio di cubiche che ha un contatto di 5.^o ordine in A ed uno di 2.^o ordine in B , e sega la curva in terne di punti allineati col punto tangenziale del flesso.

c) Ogni curva generale semplice di ordine $k+1$ che passa per un gruppo di k punti di una $C_{\frac{1}{2}(k-1)k}^{k+1}$ per diritto con un suo punto O sega ulteriormente la curva in $k(k+1)+1$ punti, che costituiscono i punti base di una rete di curve $C_{\frac{1}{2}(k-1)k}^{k+1}$, ciascuna delle quali è segata dalle rimanenti in gruppi di k punti allineati con un suo punto fisso.

Infatti il punto O e il gruppo di $k(k+1)+1$ punti sono corresiduali rispetto ad un gruppo della g_k^1 segata dal fascio di centro O , e di più i $k(k+1)+1$ punti non possono stare sopra una curva di grado k , altrimenti la curva con la quale li abbiamo determinati si spezzerebbe nella retta che passa per O e nella C^k . Inoltre per ogni gruppo della g_k^1 passa un fascio di C^{k+1} , quindi il

sistema individuato dai punti base è una *rete*, la cui serie caratteristica è appunto la g_k^1 , e questa, per essere le curve k -gonali di 1.^a specie, deve avere i suoi gruppi collineari.

Si noti che se dei $k(k+1)+1$ punti d'intersezione $k(k+1)$ stanno sopra una curva di ordine k , allora fra le curve C^{k+1} del fascio individuato da questi e da 2 dei punti presi per diritto ci sarebbe la curva C^{k+1} composta della C^k e di una retta, e quindi il rimanente punto si troverebbe per diritto con gli altri k ; e viceversa.

d) Essendo $k(k+1)+1 = \frac{(k+1)(k+4)}{2} - 2 + \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ risulta pure:

Se per k punti per diritto di una $C_{\frac{1}{2}(k-1)k}^{k+1}$ si conduce una curva dello stesso ordine, questa determina sulla curva data un gruppo di punti di cui $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ sono dipendenti dai rimanenti: in altri termini la rete precedente è di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

Viceversa, se una rete di curve generali nell'ordine $k+1$, ha per punti base $k(k+1)+1$ punti doppi, ed è completa, e perciò deve essere di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, due curve della rete si segheranno in k punti per diritto.

e) Dal noto teorema di CAYLEY, sulle curve di ordine n che si fanno passare per i punti d'intersezione di due curve di ordine m e p , entrambi minori di n , si deduce, pel caso di $m=p=k$ ed $n=k+1$, il teorema seguente:

Qualunque curva di ordine $k+1$ descritta per $k^2 - \frac{(k-2)(k-3)}{2}$ punti base di un fascio di curve di ordine k passa anche per gli altri punti comuni a queste curve, se $k+1 \leq 2k-3$, cioè se $k \geq 4$.

Ma siccome per i punti base di un fascio di raggi, di coniche o di cubiche può sempre rispettivamente passare una conica, una cubica, una quartica, il teorema si può estendere anche al caso di $k=1, 2, 3$, e quindi possiamo dire in generale:

Qualunque curva di ordine $k+1$ descritta per $k^2 - \frac{(k-2)(k-3)}{2}$ punti base di un fascio di curve di ordine k passa anche per gli altri punti base.

f) Tenendo conto inoltre che $k^2 - \frac{(k-2)(k-3)}{2} = \frac{(k+1)(k+4)}{2} - 5$ per ogni valore di $k > 1$ abbiamo pure:

Per i punti base semplici di un fascio di curve di ordine k (per $k > 1$) passa un sistema ∞^5 di curve di ordine $k+1$. Il sistema è di sovrabbondanza $\frac{(k-2)(k-3)}{2}$.

g) Dal teorema e) risulta ancora:

Ogni curva di ordine $k+1$ generale nel suo ordine che passa per i k^2 punti base semplici di un fascio di curve C^k è segata dal fascio in gruppi di k punti allineati con un punto fisso della C^{k+1} stessa.

Perchè la C^{k+1} è segata dal fascio in una g_k^1 , e per essere essa una curva k -gonale, la g_k^1 deve avere i suoi gruppi collineari e l'involuppo dei loro sostegni deve essere un punto della C^{k+1} .

h) Dal teorema di JACOBI, sulle curve di ordine n che passano per punti appartenenti a curva di ordine $p < n$, si ricava che delle $k(k-1)$ intersezioni di due curve C^k , C^{k-1} , di ordine k e $k-1$, sono indipendenti, per le curve C^k che passano per esse, soltanto $k(k-1) - \frac{(k-2)(k-3)}{2}$. Ed essendo questo numero $= \frac{k(k+3)}{2} - 3$ per $k > 1$ risulta il teorema:

Per i punti d'intersezione di una curva di ordine k con una curva di ordine $k-1$ passa un sistema triplo di curve C^k e questo è di sovrabbondanza $\frac{(k-2)(k-3)}{2}$.

k) Le curve k -gonali di 1.^a specie, C^{k+1} , sono generate dall'intersezione di un fascio di raggi di 1.^o ordine con un fascio ad esso proiettivo di curve di ordine k , a punti base semplici, nessuno dei quali deve coincidere col centro del fascio di raggio di 1.^o ordine.

3. I precedenti teoremi si possono facilmente estendere alle curve k -gonali di 1.^a specie che si hanno per $R \geq 1$; noi per brevità ci limiteremo ai seguenti:

a) Ogni curva di ordine $k+R$, che passa per k punti per diritto col punto $(R+1)$ -uplo della curva $C_{\frac{1}{2}(k-1)(k+2R)}^{k+R+1}$ e che abbia un punto R -uplo nel punto multiplo della precedente curva, sega la curva stessa in altri $k(k+2R)$ punti, che sono insieme al punto R -uplo punti base di un fascio di curve di ordine $k+R$, ciascuna delle quali sega la curva data in k punti per diritto col punto multiplo.

b) Siccome dei punti base semplici del fascio suddetto soltanto

$$k(k+2R) - \frac{(k+R-1)(k+R-2)}{2} = \frac{k(k+2R+3)}{2} - \frac{(R-1)(R-2)}{2} - k$$

sono arbitrarii ne risulta:

Dati sopra una curva $C_{\frac{1}{2}(k-1)(k+2R)}^{k+R+1}$ con 1 punto $(R+1)$ -plo
 $\frac{k(k+2R+3)-(R-1)(R-2)}{2} - k$ punti arbitrarii, ogni curva di ordine
 $k+R$ che passa una volta per ciascuno di essi ed R volte pel punto multiplo
della curva data, e passa inoltre per k punti della stessa curva per diritto
col punto multiplo, passerà pure per altri $\frac{(k+R-1)(k+R-2)}{2} + k - 1$
punti fissi della curva stessa.

c) Una curva k -gonale tipica $C_{\frac{1}{2}(k-1)(k+2R)}^{k+R+1}$ è generata dall'intersezione
di un fascio di raggi di 1.^o ordine con un fascio ad esso proiettivo di curve
di ordine $k+R$, che abbia nel centro del primo fascio un punto base R -uplo
e i rimanenti punti base tutti semplici.

§ 2. Curve k -gonali di 2.^a specie. Caratteri generali.

1. Chiameremo curve k -gonali di 2.^a specie, quelle curve k -gonali
nelle quali l'involuppo delle rette che contengono i gruppi delle g_k^1 , o delle g_k^1 ,
che su di essa esistono, è di 2.^a classe.

L'ordine m di queste curve deve essere [M. I, § 5, c)] $\geq 2k$, il loro
genere è dato da $p = (k-1)(m-k-1)$, ed hanno un sistema lineare
 ∞^{m-2k} di curve aggiunte minime di ordine $m-k-1$, e di sovrabbondanza
 $\rho = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

Noi supporremo che l'involuppo delle rette che segano ogni g_k^1 sia irre-
duttibile, e quindi che la curva non abbia punti multipli di molteplicità mag-
giore di 2, poichè in contrario vi sarebbero più di due tangenti dell'involuppo
che passerebbero per uno stesso punto.

Dalle curve che qui consideriamo è facile ricavare le altre che hanno
punti multipli diversi dai punti doppi; noi ci asterremo di entrare in questa
particolarità.

Il numero dei punti doppi delle curve k -gonali di 2.^a specie è
 $d = \frac{(m-1)(m-2k)}{2} + k(k-1)$, essi debbono essere necessariamente situati
sopra curve di ordine $m-k-1$ e non sopra una curva di ordine minore,
e soltanto $d - \rho = \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} - (k-1)$ fra essi sono arbitrarii.

In funzione della *gonalità* k , e della *dimensione* R del sistema di curve aggiunte minime i sopracitati caratteri sono esprimibili nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 m &= 2k + R & d &= \frac{R(R+2k-1)}{2} + k(k-1) = k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2} \\
 p &= (k-1)(k+R-1) & d-\rho &= \frac{R(R+2k-1)}{2} + \frac{(k-1)(k+2)}{2} = \frac{(k+R)(k+R-1)}{2} - (k-1) \\
 \rho &= \binom{k-1}{2} & \text{ord. delle curve agg. minime} &= k+R-1,
 \end{aligned}$$

dove R può prendere tutti i valori interi positivi compreso lo zero, e k tutti i valori interi positivi > 1 .

Fatta eccezione per le curve che hanno una sola curva aggiunta minima, $R=0$, tutte le altre hanno una serie canonica g_{kR}^R segata dalle curve agg. di ordine $k+R-1$, completa e composta mediante la g_k^1 , e sono perciò rappresentabili mediante curve razionali normali di un S_R considerate come k -uple.

Diamo qui appresso, per comodità di chi voglia esaminare in particolare qualche curva k -gonale di 2.^a specie, il quadro di tutte queste curve.

2. QUADRO DELLE CURVE k -GONALI DI 2.^a SPECIE.

Curve k -gonali	$R=0$ $C_{(k-1)^2}^{2k}$	$R=1$ $C_{(k-1)k}^{2k+1}$	$R=2$ $C_{(k-1)(k+1)}^{2k+2}$	$R=3$ $C_{(k-1)(k+2)}^{2k+3}$	$R=4$ $C_{(k-1)(k+3)}^{2k+4}$	$R=5$ $C_{(k-1)(k+4)}^{2k+5}$	$R=6$ $C_{(k-1)(k+5)}^{2k+6}$	$R=7$ $C_{(k-1)(k+6)}^{2k+7}$	R $C_{(k-1)(k+R-1)}^{2k+R}$
Curve iperellittiche	C_1^4	C_2^5	C_3^6	C_4^7	C_5^8	C_6^9	C_7^{10}	C_8^{11}	C_{R+1}^{R+4}
Curve 3-gonali . .	C_4^5	C_6^7	C_8^8	C_{10}^9	C_{12}^{10}	C_{14}^{11}	C_{16}^{12}	C_{18}^{13}	$C_{2(R+2)}^{R+6}$
Curve 4-gonali . .	C_9^8	C_{12}^9	C_{13}^{10}	C_{18}^{11}	C_{21}^{12}	C_{24}^{13}	C_{27}^{14}	C_{30}^{15}	$C_{3(R+3)}^{R+8}$
Curve 5-gonali . .	C_{16}^{10}	C_{20}^{11}	C_{24}^{12}	C_{28}^{13}	C_{32}^{14}	C_{36}^{15}	C_{40}^{16}	C_{44}^{17}	$C_{4(R+4)}^{R+10}$
Curve 6-gonali . .	C_{25}^{12}	C_{30}^{13}	C_{35}^{14}	C_{40}^{15}	C_{46}^{16}	C_{50}^{17}	C_{55}^{18}	C_{60}^{19}	$C_{5(R+5)}^{R+12}$
Curve 7-gonali . .	C_{36}^{14}	C_{42}^{15}	C_{48}^{16}	C_{54}^{17}	C_{60}^{18}	C_{66}^{19}	C_{72}^{20}	C_{78}^{21}	$C_{6(R+6)}^{R+14}$
Curve 8-gonali . .	C_{49}^{16}	C_{56}^{17}	C_{63}^{18}	C_{70}^{19}	C_{77}^{20}	C_{84}^{21}	C_{91}^{22}	C_{98}^{23}	$C_{7(R+7)}^{R+16}$
Curve 9-gonali . .	C_{64}^{18}	C_{72}^{19}	C_{80}^{20}	C_{88}^{21}	C_{96}^{22}	C_{104}^{23}	C_{112}^{24}	C_{120}^{25}	$C_{8(R+8)}^{R+18}$
Curve 10-gonali . .	C_{81}^{20}	C_{90}^{21}	C_{99}^{22}	C_{108}^{23}	C_{117}^{24}	C_{126}^{25}	C_{135}^{26}	C_{144}^{27}	$C_{9(R+9)}^{R+20}$
Curve 11-gonali . .	C_{100}^{22}	C_{110}^{23}	C_{120}^{24}	C_{130}^{25}	C_{140}^{26}	C_{150}^{27}	C_{160}^{28}	C_{170}^{29}	$C_{10(R+10)}^{R+22}$
Curve 12-gonali . .	C_{121}^{24}	C_{132}^{25}	C_{143}^{26}	C_{154}^{27}	C_{165}^{28}	C_{176}^{29}	C_{187}^{30}	C_{198}^{31}	$C_{11(R+11)}^{R+24}$
Curve 13-gonali . .	C_{144}^{26}	C_{156}^{27}	C_{168}^{28}	C_{180}^{29}	C_{192}^{30}	C_{204}^{31}	C_{216}^{32}	C_{228}^{33}	$C_{12(R+12)}^{R+26}$
Curve 14-gonali . .	C_{169}^{28}	C_{182}^{29}	C_{195}^{30}	C_{208}^{31}	C_{221}^{32}	C_{234}^{33}	C_{247}^{34}	C_{260}^{35}	$C_{13(R+13)}^{R+28}$
Curve 15-gonali . .	C_{196}^{30}	C_{210}^{31}	C_{224}^{32}	C_{238}^{33}	C_{252}^{34}	C_{266}^{35}	C_{280}^{36}	C_{294}^{37}	$C_{14(R+14)}^{R+30}$
ecc.									

§ 3. Teoremi generali.

1. Nelle curve k -gonali di 2.^a specie, ma per $k > 2$, ogni gruppo della g_k^1 , mentre presenta una sola condizione ad ogni curva agg. di ord. $m - 3$ che passa per il suo resto rispetto alla serie canonica g_{2p-2}^{p-1} delle C^{m-3} agg., vale invece $k - 1$ condizioni per una arbitraria curva C^{m-3} agg.; quindi per $R + 1$ gruppi della g_k^1 passano (pel teorema di RIEMANN e ROCH) $\infty^{p-1-(k-1)(R+1)}$ curve C^{m-3} agg.; cioè per essi ne passa un sistema lineare di dimensione $k(k - 3) + 1$.

Assumiamo, nel piano della C_p^m k -gonale, $k - 3$ rette $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{k-3}$ non appartenenti all'involuppo della g_k^1 e su ciascuna di queste assumiamo k punti della C_p^m ; questi saranno tutti indipendenti per ogni C^{m-3} agg. arbitraria e quindi per l'insieme dei $k(k - 3)$ punti presi sulle rette s e per $R + 1$ gruppi G_1, G_2, \dots, G_{R+1} della g_k^1 passa solo un fascio di C^{m-3} agg.

Indichiamo con t_1, t_2, \dots, t_{R+1} le rette che sostengono i gruppi G_1, G_2, \dots, G_{R+1} , e con $C_{(1)}^{m-k-1}$ la curva agg. di ordine minimo che passa per R dei gruppi suddetti ottenuti con l'esclusione di G_i . Al fascio delle curve C^{m-3} agg. che passano per i punti delle rette s e per i gruppi G , apparterrà la curva $C_{(1)}^{m-3} \equiv s_1 s_2 \dots s_{k-3} t_1 C_{(1)}^{m-k-1}$ e la curva $C_{(2)}^{m-3} \equiv s_1 s_2 \dots s_{k-3} t_2 C_{(2)}^{m-k-1}$, quindi le rette s_1, s_2, \dots, s_{k-3} si staccano da tutte le curve del fascio. Dunque:

Il fascio delle curve C^{m-3} agg. che passa per $R + 1$ gruppi della g_k^1 e per i $k(k - 3)$ punti presi sulle rette s (o, che valeva lo stesso, sopra una C^{k-3} arbitraria del piano) si compone della curva fissa formata dalle $k - 3$ rette s , e di un fascio di curve aggiunte di ordine $m - k$.

Essendo già dimostrato che per le curve iperellittiche, $k = 2$, le curve C^{m-2} agg. che passano per $R + 1$ gruppi della g_2^1 formano pure un fascio, possiamo enunciare in generale per tutte le curve k -gonali di 2.^a specie il teorema seguente.

Tutte le curve C^{m-k} agg. della C_p^m k -gonale di 2.^a specie, che passano per $R + 1$ gruppi della g_k^1 , formano un fascio che sega sulla curva una serie g_{m-k}^1 di dimensione una, e di ordine $m - k$ ($= R + k$).

2. Al fascio di curve agg. C^{m-k} che passano per i gruppi G_1, G_2, \dots, G_{R+1} appartengono le curve $C_{(1)}^{m-k} \equiv t_1 C_{(1)}^{m-k-1}$ e $C_{(2)}^{m-k} \equiv t_2 C_{(2)}^{m-k-1}$, le quali si segano nel punto $t_1 t_2 \equiv O$, dunque il punto O è un punto base del fascio.

Ogni altra curva $C_{(i)}^{m-k} \equiv t_i C_{(i)}^{m-k-1}$, per $i \neq 1, 2$, deve passare pel punto O , e siccome non ci passa la retta t_i , dovrà passarci la curva $C_{(i)}^{m-k-1}$,

che è una curva agg. di ordine minimo che passa per i gruppi G_1, G_2 . Dunque possiamo concludere il teorema:

Tutte le curve agg. C^{m-k-1} di ordine minimo della C_p^m k -gonale di 2.^a specie, che passano per 2 gruppi della g_k^1 , passano anche pel punto d'intersezione dei sostegni rettilinei di questi gruppi.

3. Se è $R > 2$, ogni curva C^{m-k-1} agg. dovendo passare per R gruppi differenti delle g_k^1 , si ha il teorema:

Ogni curva agg. minima C^{m-k-1} delle curve k -gonali di 2.^a specie passa per gli $\frac{R(R-1)}{2}$ vertici dell' R -latero piano completo formato dagli R sostegni dei gruppi che sono da essa segati.

4. I punti comuni a due C^{m-k-1} agg. sono $(m-k-1)^2$; se consideriamo due curve C^{m-k-1} agg. che passano per $R-1$ gruppi, esse hanno in comune d punti nei punti doppi della C_p^m k -gonale, $k(R-1)$ punti negli $R-1$ gruppi, ed inoltre $\frac{(R-1)(R-2)}{2}$ punti nei vertici dell' $(R-1)$ -latero formato dai sostegni dei detti gruppi; ma

$$d + k(R-1) + \frac{(R-1)(R-2)}{2} = k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2} + \\ + k(R-1) + \frac{(R-1)(R-2)}{2} = (k+R-1)^2 = (m-k-1)^2,$$

dunque:

Le curve aggiunte minime che passano per $R-1$ gruppi della g_k^1 costituiscono un fascio che sega la g_k^1 ed ha per punti base semplici soltanto i punti doppi della C_p^m , i punti dei gruppi comuni, e gli $\frac{(R-1)(R-2)}{2}$ vertici dell' $(R-1)$ -latero piano completo formato dai sostegni di questi gruppi.

5. Ogni curva C^{m-k} agg. sega la curva C_p^m in $kR+m$ punti variabili, sicchè il resto di un gruppo della serie g_k^1 rispetto ad un gruppo della serie segata da tutte le C^{m-k} agg. è di $kR+(m-k)$ punti, e la serie g_k^1 può essere segata dalle C^{m-k} agg. che passano per uno di questi resti. Siccome una C^{m-k} agg. che passa per un gruppo della g_k^1 è formata dalla retta che lo sostiene e da una C^{m-k-1} agg. arbitraria, ne segue che:

Per R gruppi della g_k^1 e per il resto di un $(R+1)^{\text{esimo}}$ gruppo rispetto alla retta che lo sostiene passa un fascio di C^{m-k} agg. che sega la serie g_k^1 .

6. Ma abbiamo pure visto che per $R+1$ gruppi della g_k^1 passa un fascio di C^{m-k} che sega una g_{m-k}^1 ; dunque:

Questa serie g_{m-k}^1 è residua della serie g_k^1 rispetto alla serie lineare completa di ordine m , segata da tutte le C^{m-k} agg. che passano per R gruppi della g_k^1 , perciò la serie g_{m-k}^1 è unica se è unica la g_k^1 , ed ogni suo gruppo è per diritto con un determinato gruppo della g_k^1 .

a) La serie g_k^1 e la serie g_{m-k}^1 hanno lo stesso inviluppo.

b) In particolare, per $R=0$, la serie residua della g_k^1 è pure una g_k^1 .

7. Consideriamo ora il sistema formato dalle curve aggiunte minime, ed avvertiamo espressamente che ora, per comodità, rappresenteremo i caratteri della curva k -gonale e del sistema di curve agg. minime in funzione di R e k (§ 2, n.° 1).

La curva k -gonale è dell'ordine $2k+R$, del genere $(k-1)(k+R-1)$, il suo sistema di curve aggiunte minime e di dimensione R , di ordine $k+R-1$, di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, ha $k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2}$ punti base semplici, ed è formato di curve generali nel loro ordine. Il grado del sistema è $(k+R-1)^2 - \left[k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2} \right] = k(R-1) + \frac{(R-1)(R-2)}{2}$, e quindi:

La serie caratteristica del sistema di curve aggiunte minime di una curva k -gonale di 2.^a specie è una $g_{k(R-1) + \frac{(R-1)(R-2)}{2}}^{R-1}$ lineare completa.

8. Qui dimostreremo che:

La serie caratteristica del sistema ∞^R di curve agg. minime C^{k+R-1} della curva k -gonale $C_{(k-1)(k+R-1)}^{2k+R}$ è pure segata sopra ogni curva del sistema da un sistema ∞^{R-1} di curve C^{R-1} di ordine $R-1$ circoscritte all' R -latero completo formato dai sostegni degli R gruppi della g_k^1 che sono segati da quella curva nella curva k -gonale.

Sia $C_{(0)}^{k+R-1}$ una determinata curva del sistema, e siano G_1, G_2, \dots, G_R gli R gruppi da essa segati sulla curva k -gonale, t_1, t_2, \dots, t_R i sostegni di questi gruppi.

Un gruppo della serie caratteristica segnata su questa curva è formato dai gruppi G_1, G_2, \dots, G_{R-1} e dagli $\frac{(R-1)(R-2)}{2}$ vertici dell' $(R-1)$ -latero completo costituito dai loro sostegni t_1, t_2, \dots, t_{R-1} ; quindi i rimanenti $R-1$ vertici dell' R -latero $t_1 t_2 \dots t_{R-1} t_R$ sono punti di un gruppo corresiduale del gruppo dei punti base del sistema ∞^R di curve C^{k+R-1} per rispetto al gruppo suddetto della serie caratteristica. Ragionando analogamente per gli altri gruppi della serie caratteristica ottenuti sopprimendo dagli R gruppi G_1, G_2, \dots, G_{R-1} ,

G_R uno per volta i gruppi G_{R-1}, G_{R-2}, \dots si perviene alla conseguenza che tutti i vertici dell' R -latero sono punti del gruppo corresiduale del gruppo dei punti base del sistema.

Inoltre essendo i precedenti gruppi della serie caratteristica g^{R-1} segati da una curva composta di $R-1$ rette, tutta la serie deve essere segata da curve di ordine $R-1$ che passano per quel gruppo.

2.^a Dim. Più brevemente potrebbe ragionare così: Della serie caratteristica esistente sulla curva $C_{(6)}^{k+R-1}$, R gruppi sono segati dagli R ($R-1$)-lateri completi contenuti nell' R -latero $t_1 t_2 \dots t_{R-1} t_R$, e questi costituiscono R curve composte, di ordine $R-1$ ed indipendenti fra loro; quindi il sistema ∞^{R-1} di curve che sega la serie caratteristica è un sistema di curve C^{R-1} di ordine $R-1$, che ha per punti base i vertici dell' R -latero.

§ 4. Curve k -gonali di 2.^a specie, per $R=0$,

$$C_{(k-1)^2}^{2k}.$$

1. Queste curve sono dell'ordine $2k$, di genere $(k-1)^2$, ed hanno i loro $k(k-1)$ punti doppi distribuiti sopra una curva di ordine $k-1$, che è l'unica curva aggiunta di ordine minimo che esse posseggono. I punti doppi arbitrarii sono soltanto $\frac{(k-1)(k+2)}{2}$, i rimanenti $\rho = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ sono dipendenti da essi. In particolare per $k=2$ sono tutti arbitrarii; per $k=3$ 5 sono arbitrarii, il 6.^o si può scegliere comunque sulla conica da essi individuata; per $k>3$, $\frac{(k-1)(k+2)}{2}$ sono arbitrarii del tutto nel piano, $k-2$ sono arbitrarii sulla C^{k-1} individuata dai primi, gli altri $\frac{(k-2)(k-3)}{2}$ rimanenti sono assegnati sulla C^{k-1} , pel noto teorema di JACOBI, dalle ulteriori intersezioni della C^{k-1} con una qualunque C^k che passa per essi, perchè per i $k(k-1)$ punti doppi della curva k -gonale passano, non solo la unica C^{k-1} agg., ma pure tutte le curve C^k aggiunte alla curva $C_{(k-1)^2}^{2k}$.

2. Dal teorema h) del § 1 si deduce che:

Il sistema lineare delle C^k agg. alla $C_{(k-1)^2}^{2k}$ k -gonale è di dimensione 3.

E siccome ogni curva C^k agg. sega la curva k -gonale in $2k$ punti variabili, ne risulta:

La serie lineare completa segata sulla $C_{(k-1)^2}^{2k}$ k -gonale dalle C^k agg. è una g_{2k}^3 di dimensione 3 e di ordine $2k$.

E quindi pure:

La serie lineare segata dalle rette del piano sulla curva k -gonale $C_{(k-1)^2}^{2k}$ è completa.

3. Già sappiamo (§ 3) che la g_k^1 , che è sempre formata di gruppi collineari per la esistenza della C^{k-1} agg., deve essere segata da un fascio di C^k agg. che passa per un gruppo della serie residua della g_k^1 rispetto alla g_{2k}^3 segata da tutte le C^k agg., e che per queste curve la serie residua della g_k^1 è un'altra g_k^1 che ha lo stesso involuppo della prima.

Dunque: ogni gruppo della serie g_k^1 vale soltanto due condizioni per ogni qualunque curva C^k agg. che passa per esso. Nel caso particolare di $k=3$, le curve agg. C^k sono precisamente quelle di ordine $m-3$, e si ritrova che un gruppo della g_3^1 deve valere $3-1$ condizioni per la C^{m-3} che passa per esso.

Se $k=2$, la curva iperellittica (k -gonale) è la C_1^4 , e di essa il sistema di C^k agg. è un sistema triplo di coniche. Ogni gruppo della g_2^1 rappresenta due condizioni per le coniche agg. che ci passano, e quindi una coppia qualunque di punti è sempre appartenente ad una g_k^1 , perciò la C_1^4 ha infinite serie g_2^1 , a due a due residue, e di ciascuna coppia il comune involuppo è una conica.

Non è lo stesso per $k \geq 3$; due punti qualunque della C^{2k} individuano un fascio di C^k , che avendo $k(k-1)$ punti base sopra una curva C^{k-1} avrà i rimanenti punti base sopra la retta individuata dai primi due e che in generale non apparterranno alla curva C^{2k} , se non nel caso che i primi due punti facciano parte di un gruppo di una g_k^1 .

Le curve C^k che passano per uno di questi gruppi segano la g_k^1 residua di quella individuata dal gruppo.

Le curve k -gonali $C_{(k-1)^2}^{2k}$ hanno ∞^1 g_k^1 , oppure due g_k^1 l'una residua dell'altra e che involuppano la stessa conica secondo che è $k \leq 2$.

4. Per costruire una $C_{(k-1)^2}^{2k}$ k -gonale di 2.^a specie, si prendano nel piano $\frac{(k-1)(k+3)}{2}$ punti arbitrari, indi sulla curva C^{k-1} da essi individuata si prendano altri $k-2$ punti ad arbitrio, per questi e per i precedenti si faccia passare una curva C^k generale nel suo ordine e si determinino i loro rimanenti $\frac{(k-2)(k-3)}{2}$ punti d'intersezione. Avremo così determinati $k(k-1)$ punti base di un sistema triplo di curve C^k , due delle quali si segano sempre in k punti per diritto.

Assunti nel sistema di curve C^k due fasci, $(C_{(1)} C_{(2)})$, $(C_{(3)} C_{(4)})$, senza alcuna curva comune, chè altrimenti sarebbero compresi in una rete che avrebbe un

punto di base in più, e resi questi fasci proiettivi fra loro, si avrà dall'intersezione delle curve corrispondenti una curva di ordine $2k$, che ha per punti doppi i $k(k-1)$ punti base del sistema triplo comuni ai due fasci, e quindi del genere $(k-1)^2$, e sarà perciò la curva k -gonale cercata.

Una delle due serie g_k^1 è data gruppo per gruppo dalle intersezioni delle curve corrispondenti dei due fasci, all'altra appartengono i due gruppi di k punti per diritto che costituivano i punti base non comuni ai due fasci.

§ 5. Curve k -gonali di 2.^a specie, per $R = 1$,

$$C_{(k-1)k}^{2k+1}.$$

1. Queste curve sono dell'ordine $2k+1$ di genere $(k-1)k$, ed hanno i loro k^2 punti doppi nei punti base di un fascio di curve C^k , che sono le ∞^1 loro curve agg. minime: la sovrabbondanza del sistema di curve agg. minime è perciò soddisfatta, $\rho = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

La serie canonica segata su queste curve dalle curve C^k agg. è precisamente la g_k^1 , che è perciò unica.

Dal teorema *f*) del § 1 si deduce che: *il sistema delle curve aggiunte di ordine $k+1$ delle curve $C_{(k-1)k}^{2k+1}$ k -gonali è di dimensione 5, e quindi la serie che esso sega sulla curva k -gonale è una serie lineare completa g_{3k+1}^5 di dimensione 5 e di ordine $3k+1$ [$= (2k+1)(k+1) - 2k^2$].*

2. La serie lineare g_k^1 è anche segata sulla C^{2k+1} da un fascio di curve C^{k+1} agg., perchè, pel teorema *g*) del § 1, ogni curva C^{k+1} del sistema ∞^5 sega una qualunque curva del fascio di curve C^k in k punti per diritto; inoltre essendo dei punti base del fascio di C^k soltanto $\frac{(k+1)(k+4)}{2} - 5$ indipendenti per le C^{k+1} , ogni C^{k+1} che passi per altri due punti arbitrari di C^k , avrà $\frac{(k+1)(k+4)}{2} - 3$ intersezioni sue con essa indipendenti e quindi passerà, oltre che per tutti i punti base, per altri $k-2$ punti di C^k dipendenti dai primi.

Dunque concludiamo che, se per due punti di un gruppo della serie g_k^1 conduciamo le ∞^3 C^{k+1} , queste passeranno pure per gli altri $k-2$ rimanenti punti del gruppo. Cioè:

Ogni gruppo della serie g_k^1 presenta due condizioni soltanto alle curve C^{k+1} agg. che passano per esso.

E quindi si ha pure:

La serie residua della g_k^1 rispetto alla g_{2k+1}^5 segata dalle C^{k+1} agg. è una g_{2k+1}^3 .

Siccome la C^{k+1} che passa per un gruppo delle g_k^1 può pure spezzarsi in una C^k ed in una retta arbitraria del piano.

La serie lineare g_{2k+1}^2 segata da tutte le rette del piano sulla $C_{(k-1)k}^{2k+1}$ k -gonale è incompleta.

Dal teorema 1 del § 3 si ha:

Per due gruppi della serie lineare g_k^1 passa un fascio di curve C^{k+1} che sega sulla $C_{(k-1)k}^{2k+1}$ k -gonale una serie lineare g_{k+1}^1 , residua della g_k^1 rispetto alla g_{2k+1}^2 segata dalle rette del piano, e che ha per inviluppo lo stesso inviluppo della g_k^1 .

Per un gruppo delle g_k^1 e per un gruppo della g_{k+1}^1 , non collineare col primo, passa un fascio di C^{k+1} che sega sulla curva C^{2k+1} la serie lineare g_k^1 .

3. Per costruire una curva $C_{(k-1)k}^{2k+1}$ k -gonale, si stabilisca una corrispondenza proiettiva fra un fascio di curve C^k a punti base semplici, e un fascio di raggi di 2.^o ordine, il luogo dei punti d'intersezione degli elementi corrispondenti sarà una curva di ordine $2k+1$, che avrà per punti doppi i punti base del fascio di C^k e per tangenti in ciascuno di essi i due raggi dell'inviluppo che ci passano, ed è perciò la curva k -gonale richiesta.

Si può anche costruire la $C_{(k-1)k}^{2k+1}$ k -gonale nel seguente modo. Si stabilisca una proiettività fra un fascio qualunque di curve C^k a punti base semplici e un fascio di curve C^{k+1} che abbia per punti base i punti base del primo fascio e altri $2k+1$ punti semplici del piano, di cui però 4 soltanto sono indipendenti, il luogo delle intersezioni delle curve corrispondenti è una curva C^{2k+1} che avrà per punti doppi i k^2 punti comuni ai due fasci e quindi sarà la curva cercata.

Tanto nell'una che nell'altra costruzione la serie g_k^1 è data gruppo per gruppo dall'intersezione degli elementi corrispondenti.

§ 6. Curve k -gonale di 2.^a specie, per $R = 2$,

$$C_{(k-1)(k+1)}^{2k+2}.$$

Queste curve sono dell'ordine $2k+2$, del genere $(k-1)(k+1)$, hanno una rete di C^{k+1} aggiunte minime di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, che ha per punti base semplici i loro $k(k+1)+1$ punti doppi.

La serie canonica segata dalle C^{k+1} sulla curva C^{2k+2} è una g_{2k}^2 lineare completa e composta mediante la g_k^1 , che è unica.

La serie caratteristica della rete di C^{k+1} agg. è pure una serie lineare g_k^1 , i cui gruppi sono collineari ed allineati con un punto fisso della curva, e ciò perchè la curva generale della rete, essendo priva di punti doppi, è k -gonale anch'essa. Però è da tener presente che la g_k^1 della curva C^{2k+2} avendo per inviluppo una conica, e quella di ciascuna sua curva agg. minima avendo per inviluppo un punto, le due serie hanno soltanto due gruppi comuni e questi gruppi hanno i sostegni che si segano in un punto della C^{k+1} agg. che li contiene; ciò conferma un teorema precedente (§ 3, n.° 3).

La rete delle C^{k+1} agg. minime di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ è quella indicata dal teor. *d*) del § 1.

Per costruire una curva $C_{(k-1)(k+1)}^{2k+2}$ k -gonale, per k punti per diritto si facciano passare due arbitrarie C^{k+1} semplici prive di punti doppi; queste si segheranno in altri $k(k+1)+1$ punti semplici, di cui (§ 3, 3) $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ sono dipendenti dai rimanenti, e questi certamente non appartengono ad una curva di grado inferiore, e individuano una rete di curve C^{k+1} generali nel loro ordine.

Di questa rete si considerino tre curve $C_{(1)}$, $C_{(2)}$, $C_{(3)}$ non appartenenti allo stesso fascio, e si riferiscano proiettivamente fra loro i fasci $(C_{(1)}, C_{(2)})$, $(C_{(2)}, C_{(3)})$ ed in modo che $C_{(3)}$ non sia curva unita. Due curve corrispondenti si segheranno in k punti per diritto, il luogo di questi gruppi è una curva di ordine $2k+2$, che avrà per punti doppi i $k(k+1)+1$ punti base della rete, e perciò sarà del genere $(k-1)(k+1)$; essa è quindi la curva $C_{(k-1)(k+1)}^{2k+2}$ k -gonale cercata.

§ 7. Curve k -gonali di 2.^a specie, per $R=3$,

$$C_{(k-1)(k+2)}^{2k+3}.$$

1. Queste curve sono dell'ordine $2k+3$, di genere $(k-1)(k+2)$, hanno un sistema triplo di curve agg. minime C^{k+2} dell'ordine $k+2$ e di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, che ha per punti base semplici i loro $k(k+2)+3$ punti doppi.

La serie canonica segata dalle C^{k+2} agg. sulla curva $C_{(k-1)(k+2)}^{2k+3}$ k -gonale è una serie g_{3k}^3 lineare completa e composta mediante la g_k^1 che è unica.

La serie caratteristica del sistema triplo di C^{k+2} agg. alla curva k -gonale $C_{(k-1)(k+2)}^{2k+3}$ è una serie g_{2k+1}^2 lineare e completa, che è pure segata su ciascuna di esse da una rete di coniche, che ha per punti base i vertici del trilatero $t_1 t_2 t_3$ che sostiene i gruppi G_1, G_2, G_3 della g_k^1 segati da quella curva agg. sulla curva k -gonale.

2. Per costruire una curva $C_{(k-1)(k+2)}^{2k+3}$ k -gonale, sopra un'arbitraria curva $C_{(0)}^{k+2}$ priva di punti doppi si prendano ad arbitrio tre punti non per diritto L, M, N , per essi si faccia passare una conica, e per i $2k+1$ punti rimanenti comuni alla conica ed alla $C_{(0)}^{k+2}$ si faccia passare un'altra curva $C_{(1)}^{k+2}$ di ordine $k+2$ e generale nel suo ordine. Le curve $C_{(0)}, C_{(1)}$ si segheranno ulteriormente in un gruppo di $k(k+2)+3$ punti semplici, che, essendo corresiduali del triangolo LMN rispetto ai $2k+1$ punti della conica, sono i punti base di un sistema triplo di C^{k+2} di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$. Si

potrebbe anche fare a meno di costruire una conica non degenerare per i punti LMN ; basterebbe la conica composta delle rette LM, LN , ed allora il gruppo dei $2k+1$ punti è formato del punto L e dei rimanenti $2k$ punti di intersezione di queste rette con la $C_{(0)}^{k+2}$.

Indicando ora con G_1, G_2, G_3 i tre gruppi della $C_{(0)}^{k+2}$, di k punti ciascuno, esistenti sui lati $MN \equiv t_1, NL \equiv t_2, LM \equiv t_3$ del triangolo LMN , consideriamo che per un solo di questi gruppi, per es. G_3 , passa una rete di C^{k+2} , che avrà in tutto per punti base $k(k+2)+3+k=(k+1)(k+2)+1$ punti (dei quali sono dipendenti dai rimanenti $\frac{(k-1)k}{2}$) quindi [§ 1, d)] deve avere per serie caratteristica una g_{k+1}^1 di gruppi collineari allineati con un punto fisso. Sulla $C_{(0)}^{k+2}$ (che appartiene alla rete) la serie g_{k+1}^1 ha per punto fisso il punto $L \equiv t_1 t_2$, poichè già due gruppi sono sulle rette t_1 e t_2 . Dei gruppi della g_{k+1}^1 solo quelli che stanno sulle rette t_1, t_2 hanno un punto sulla t_3 , gli altri li hanno tutti fuori di questa retta, altrimenti la $C_{(0)}^{k+2}$ si spezzerebbe in una $C_{(0)}^{k+1}$ e una retta.

Consideriamo del sistema ∞^3 di C^{k+2} i fasci di curve individuati dalle coppie di gruppi $G_1 G_2, G_2 G_3$, ed osserviamo che due curve di questi fasci si debbono segare in un gruppo di $k+1$ punti collineari variabili, e che ciascun fascio determina sulla retta t_3 del gruppo G_3 ad essi comune una punteggiata di 1.^o ordine prospettiva al fascio. Se noi riferiamo proiettiva-

mente i due fasci fra loro in modo da essere corrispondenti quelle curve che si segano nello stesso punto della t_3 , otterremo che il luogo delle intersezioni è una curva C^{2k+4} che si spezza nella retta t_3 e in una curva C^{2k+3} di ordine $2k+3$, che ha per punti doppi i $k(k+2)+3$ punti base del sistema ∞^3 di C^{k+2} e quindi è la curva k -gonale cercata.

Se di questa curva si considera il solo fascio $(G_1 G_3)$ di curve agg. C^{k+2} , si trova che il fascio sega i sostegni t_1, t_3 dei gruppi base in due punteggiate proiettive di 1.^o ordine, di cui la retta che congiunge una coppia di punti corrispondenti è il sostegno del gruppo di k punti della C^{2k+3} segato su essa dalla curva che determina quei punti della punteggiata, quindi si conferma che l'involuppo della g_k^1 della C^{2k+3} costruita è una conica.

§ 8. Curve k -gonali di 2.^a specie, per $R = 4$,

$$C_{(k-1)(k+3)}^{2k+4}.$$

1. Queste curve sono dell'ordine $2k+4$, del genere $(k-1)(k+3)$ ed hanno un sistema ∞^4 di curve agg. minime C^{k+3} dell'ordine $k+3$ e di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, che ha per punti base semplici i loro $k(k+3)+6$ punti doppi.

La serie canonica segata dalle C^{k+3} agg. sulla curva $C_{(k-1)(k+3)}^{2k+4}$ k -gonale è una serie g_{4k}^1 lineare completa e composta mediante la g_k^1 , che è unica.

La serie caratteristica del sistema ∞^4 di C^{k+3} agg. alla curva $C_{(k-1)(k+3)}^{2k+4}$ è una serie g_{3k+3}^3 lineare e completa, che è pure segata su ciascuna di esse da un sistema triplo di cubiche che ha per punti base i vertici del quadrilatero $t_1 t_2 t_3 t_4$ che sostiene i gruppi G_1, G_2, G_3, G_4 della g_k^1 segati da quella curva sulla curva k -gonale.

2. Per costruire una $C_{(k-1)(k+3)}^{2k+4}$ k -gonale, per i vertici di un quadrilatero piano completo $t_1 t_2 t_3 t_4$ si faccia passare una curva $C_{(0)}^{k+3}$ generale nel suo ordine ed una cubica, e per gli ulteriori $3k+3$ punti d'intersezione di queste due curve si faccia passare un'altra curva $C_{(0)}^{k+3}$ di ordine $k+3$ e generale nel suo ordine. Le curve $C_{(0)}, C_{(1)}$ si segheranno ulteriormente in un gruppo di $k(k+3)+6$ punti semplici, che essendo sulla $C_{(0)}$ corresiduali dei vertici del quadrilatero, rispetto ai $3k+3$ punti della cubica, sono i punti base di un sistema ∞^4 di C^{k+3} di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

Si potrebbe anche fare a meno di costruire una cubica non degenera circoscritta al quadrilatero, basterebbe la cubica composta delle tre rette $t_1 t_2 t_3$, ed in tal caso il gruppo dei $3k + 3$ punti è dato dai vertici del trilatero $t_1 t_2 t_3$ e dai rimanenti $3k$ punti d'intersezione dei suoi lati con la $C_{(0)}^{k+3}$.

3. Indicando ora con G_1, G_2, G_3, G_4 i quattro gruppi della $C_{(0)}^{k+3}$ di k punti ciascuno esistenti sulle rette t_1, t_2, t_3, t_4 , consideriamo che, mentre per un punto qualunque della $C_{(0)}^{k+3}$ passa ∞^3 C^{k+3} che segano sulla $C_{(0)}^{k+3}$ una g_{3k+2}^2 , per un punto del gruppo G_i ne passano ∞^3 , che passano pure per i rimanenti punti del gruppo e che segano una g_{2k+3}^2 .

Questo sistema triplo di C^{k+3} che passa pel gruppo G_i ha $k(k+3) + 6 + k = (k+1)(k+3) + 3$ punti base ed è di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2} + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$, quindi è una rete del tipo costruito nel paragrafo precedente, ottenuta cambiando k in $k+1$, la cui serie caratteristica è pure segata dalle coniche circoscritte al trilatero $t_2 t_3 t_4$.

Sicchè delle curve di questa rete, quelle che passano per un punto del gruppo G_2 , passano per i rimanenti punti del gruppo e pel punto $t_1 t_2$ e segano sulla $C_{(0)}^{k+3}$ una g_{k+2}^1 di punti collineari ed allineati col punto fisso $t_3 t_4$.

E quindi possiamo concludere che: *del sistema ∞^4 di curve C^{k+3} sopra costruito, le curve che passano per due gruppi G passano pure per il punto comune ai loro sostegni e determinano una rete di cui due curve si segano in $k+2$ punti per diritto.*

4. Consideriamo la rete determinata dai gruppi $G_1 G_2$, e in essa due curve che si segano in un punto M della retta t_1 , queste si segheranno in altri $k+1$ punti allineati con M su una retta t_i , e appartenendo i punti comuni alle due curve ad una cubica spezzata in tre rette, esse devono segarsi anche nel punto $t_2 t_i$, cioè uno dei $k+1$ punti sta su t_2 .

Cosicchè: *nella rete $(G_1 G_2)$ due curve che si segano sopra un punto variabile di t_1 si segano pure in un punto variabile della retta t_2 .*

5. Finalmente consideriamo del sistema ∞^4 di C^{k+3} i fasci di curve individuati dai gruppi $G_1 G_2 G_3, G_1 G_2 G_4$, e riferiamo fra loro univocamente i due fasci in modo che siano corrispondenti due curve che si segano in un stesso punto della retta t_1 , essi saranno proiettivi e il luogo delle intersezioni è una curva C^{2k+6} , che si spezza nelle due rette t_1, t_2 e in una C^{2k+4} che ha per punti doppi i $k(k+3) + 6$ punti base del sistema, e quindi è la curva k -gonale cercata.

Anche qui è facile confermare che l'involuppo delle rette t che sostengono gruppi di k punti è una conica.

§ 9. Curve k -gonali di 2.^a specie, per R qualunque > 1 ,

$$C_{(k-1)(k+R-1)}^{2k+R}.$$

1. Chiuderemo questa Memoria col dare uno sguardo alla curva generica fra le curve k -gonali di 2.^a specie, per R qualunque, ma superiore ad 1, essendo che per $R=0$, $R=1$, come abbiám visto, si hanno a fare delle particolari considerazioni.

Ogni curva $C_{(k-1)(k+R-1)}^{2k+R}$ k -gonale, è dell'ordine $2k+R$, di genere $(k-1)(k+R-1)$, ha un sistema ∞^R di curve agg. minime C^{k+R-1} di ordine $k+R-1$, che ha per punti base semplici i $k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2}$ punti doppi della curva k -gonale ed è di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

La serie canonica segata da questo sistema sulla curva k -gonale è una g_{Rk}^R lineare completa e composta mediante i gruppi di una g_k^1 unica.

La serie caratteristica del sistema stesso è una $g_{k(R-1) + \frac{(R-1)(R-2)}{2}}^{R-1}$ segata pure da un sistema ∞^{R-1} di curve di ordine $R-1$ (§ 3, 7 e 8).

2. Per costruire una $C_{(k-1)(k+R-1)}^{2k+R}$ k -gonale si costruisca sul piano, con R tangenti $t_1 t_2 \dots t_{R-1} t_R$ di una arbitraria conica (se $R > 5$) un R -latero completo e si facciano passare per i suoi vertici una $C_{(0)}^{k+R-1}$ di ordine $k+R-1$ e generale nel suo ordine ed una C^{R-1} di ordine $R-1$ (questa può essere anche spezzata in $R-1$ lati del R -latero); queste due curve si segheranno in un gruppo H di $k(R-1) + \frac{(R-1)(R-2)}{2}$ punti. Una seconda curva $C_{(0)}^{k+R-1}$, generale nel suo ordine $k+R-1$, fatta passare per questo gruppo H di punti, segherà la $C_{(0)}$ in $k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2}$ punti semplici, che saranno i punti base di un sistema ∞^R di curve C^{k+R-1} di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

3. Indicando con $G_1, G_2, \dots, G_{R-1}, G_R$ gli R gruppi della $C_{(0)}^{k+R-1}$ di k punti ciascuno esistenti sulle rette $t_1, t_2, \dots, t_{R-1}, t_R$ fuori dei vertici dell' R -latero, consideriamo che per un punto del gruppo G_R passano ∞^{R-1} C^{k+R-1} che passano per tutti i punti del gruppo e segano sulla $C_{(0)}^{k+R-1}$ una $g_{k(R-2) + \frac{(R-1)(R-2)}{2}}^{R-2}$.

Questo sistema ∞^{R-1} di C^{k+R-1} che passa pel gruppo G_1 ha $k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2} + k = (k+1)(k+R-1) + \frac{(R-1)(R-2)}{2}$ punti base ed è di sovrabbondanza $\frac{k(k-1)}{2}$, quindi è un sistema di curve del tipo appartenente alla precedente colonna del quadro, e per k aumentato di una unità, la cui serie caratteristica è pure segata da un sistema ∞^{R-2} di curve C^{R-2} circoscritte ad un $(R-1)$ -latero. Sicchè con ragionamento analogo a quello fatto nel paragrafo precedente ed esteso a due, tre, ... gruppi G , si perviene a questo:

Nel sistema ∞^R di curve C^{k+R-1} costruito nel numero precedente le curve che passano per $R-2$ gruppi G passano per tutti i punti comuni ai sostegni di questi gruppi e determinano una rete di curve di cui due curve si segano in $k+R-2$ punti per diritto.

4. *Se due curve di ognuna di queste reti si segano in un altro punto di una delle rette che sostengono i loro gruppi comuni, altri $R-3$ dei rimanenti loro punti comuni, per diritto con quello, apparterranno ognuno ad una delle $R-3$ rette che sostengono i rimanenti gruppi comuni, e gli altri k punti staranno nel piano fuori di queste rette.*

5. Nella rete individuata dai gruppi G_3, \dots, G_{R-1}, G_R consideriamo i due fasci che hanno per gruppi comuni $G_1 G_3 \dots G_{R-1} G_R$ e $G_2 G_3 \dots G_{R-1} G_R$, e riferiamo fra loro univocamente le loro curve in modo che siano corrispondenti quelle che si segano in un medesimo punto della retta t_R , essi saranno proiettivi e il luogo delle loro intersezioni sarà una curva $C^{2k+2R-2}$, che si spezza nelle $R-2$ rette t_3, \dots, t_{R-1}, t_R e in una curva C^{2k+R} , che ha per punti doppi i $k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2}$ punti base del sistema, e quindi è la curva k -gonale cercata.

Napoli, agosto 1895.