

3. *Der Interferentialrefractor für electrische Wellen; von O. Wiedeburg.*

(Hierzu Taf. VII.)

Man hat sich schon mehrfach bemüht, die Analogie zwischen den „Strahlen electrischer Kraft“ und den Lichtstrahlen auch in quantitativer Beziehung darzuthun, und hat insbesondere für die Brechung der Strahlen die beiderseits obwaltenden Verhältnisse zahlenmässig zu vergleichen gesucht. Freilich sind die Messungen, die man bisher an electrischen Wellen, die frei, ohne Führung durch Leiter, die Dielectrica durchsetzen, angestellt hat, noch wenig sicher gegenüber denen, die sich auf „Drahtwellen“ beziehen, und haben meist nur dazu gedient, die theoretisch für beide Wellenarten geforderte Uebereinstimmung der Brechungsverhältnisse nachzuweisen. Doch haben jene Strahlen electrischer Kraft *den* Vorthail zunächst, dass man bei der messenden Behandlung ihrer Brechung sich in weitem Umfange der von der Optik gebotenen Analogien bedienen kann, und sie sind überdies den Drahtwellen bisher insofern überlegen, als sie die Verkürzung der Wellenlänge weiter zu treiben gestatten, und so eine stärkere Annäherung an die Wellen des Licht- und Wärmespectrums ermöglichen.

So ist es wohl nicht überflüssig, die in Frage kommenden Messmethoden in Bezug auf ihre Leistungsfähigkeit näher zu prüfen und weiter auszubilden, um zuverlässige Werthe electrischer Brechungsexponenten auf diesem Wege zu erlangen.

Die üblichen Methoden.

Am meisten benutzt wurde bisher die Methode der *Ablenkung* durch ein aus dem betreffenden Dielectricum gebildetes Prisma. So ermittelte schon Hertz¹⁾ selbst mit Strahlen von 66 cm Wellenlänge den Brechungsexponenten für Hartpech (1,69), dann Ellinger²⁾ für Wasser und Aethylalkohol

1) Hertz, Wied. Ann. **36**. p. 769. 1889.

2) Ellinger, Wied. Ann. **46**. p. 513. 1892; **48**. p. 108. 1893.

(8,9 bez. 4,9), Zehnder¹⁾ möglichst sorgfältig für Asphalt (1,93). Wesentlich erleichtert wurden derartige Messungen, als Righi²⁾ erheblich kürzere Wellen zu erzeugen lehrte. Für solche von 10 cm Länge gibt er die Brechungsexponenten von Pech, Schwefel, Paraffin zu 1,6 bez. 1,87 und 1,43 an. Lebedew³⁾ trieb dann die Verkürzung noch weiter und bestimmte mit Wellen von 0,6 cm für ein kleines Ebonitprisma $n = 1,6$ und für zwei, gegen die Krystallaxen verschieden orientirte Prismen aus rhombischem Schwefel $n = 2,2$ bez. 2,0.

Die Reflexionserscheinungen liefern mehrere Methoden zur Berechnung des Brechungsexponenten; ihn auf Grund des Brewster'schen Gesetzes $n = \operatorname{tg} \varphi$ aus dem Polarisationswinkel φ herzuleiten, bietet Schwierigkeiten. Klemenčič⁴⁾ und Righi²⁾ fanden aber in dieser Beziehung die Verhältnisse der Reflexion an Schwefel den optischen ähnlich. Aus den Erscheinungen der Totalreflexion bestimmte kürzlich Bose⁵⁾ für Schwefel $n = 1,73$, und Cole⁶⁾ berechnete aus dem Reflexionsvermögen freier Oberflächen den Brechungsexponenten von Wasser zu 8,85, von Alkohol zu 3,15 für Wellen von 5 cm Länge.

Endlich kommt eine Gruppe von Methoden in Betracht, die das Analogon darstellt zu dem Verfahren, das auf optischem Gebiet den Jamin'schen *Interferentialrefractor* benutzt: zwei parallele Strahlenbündel werden zur Interferenz gebracht, in den Gang des einen eine planparallele Platte des zu untersuchenden Stoffes eingeschaltet, und nun die Aenderung, die das Interferenzresultat dadurch erfährt, entweder direct gemessen oder compensirt, indem man den Weg des einen Bündels messbar verändert. So beobachtete Trouton⁷⁾ die Verschiebungen, die das Knotensystem stehender Wellen durch

1) Zehnder, Wied. Ann. **53**. p. 162. 1894.

2) Righi, Mem. R. Acc. d. Scienze Bologna (5) **4**. p. 487—590. 1895; Beibl. **19**. p. 357. 1895.

3) Lebedew, Wied. Ann. **56**. p. 1. 1895.

4) Klemenčič, Wied. Ann. **45**. p. 62. 1892.

5) Bose, Proc. R. Soc. London **59**. p. 160. 1896.

6) Cole, Wied. Ann. **57**. p. 290. 1896.

7) Trouton, Nat. **40**. p. 398. 1889; Electrician **25**. p. 556. 1890; Beibl. **14**. p. 830 u. 1165. 1890.

Aufstellung einer dielectrischen Platte vor dem Spiegel erfuhr, und Mack¹⁾ benutzte das gleiche Verfahren, um eine Doppelbrechung in Holzplatten nachzuweisen. Trouton's Versuche ergaben nur für Pech einen annehmbaren Werth von n , für andere Stoffe ganz unwahrscheinliche oder gar keine „wegen zu starker Reflexion der Platten“. v. Lang²⁾ hat den Quincke'schen Interferenzversuch der Akustik für electrische Wellen umgestaltet und damit Paraffin und Schwefel untersucht. In ähnlicher Weise verwendete Righi³⁾ den von ihm abgeänderten Boltzmann'schen Spiegelversuch⁴⁾ zu einigen Refraktionsmessungen; die Werthe der Brechungsexponenten von Schwefel und Paraffin ergaben sich so in genügender Uebereinstimmung mit den aus Prismenversuchen ermittelten.

Righi's Verfahren besteht in Folgendem: Das von dem parabolischen Erregerspiegel ausgehende Bündel nahezu paralleler Strahlen durchsetzt unter 45° eine planparallele dielectrische Platte und fällt senkrecht auf zwei ebene Metallspiegel, von denen der eine in Richtung seiner Normalen sich verschieben lässt; von dem zurückkehrenden (Doppel-) Bündel wird der an der erwähnten Platte⁵⁾ seitlich reflectirte Theil vom Empfängerspiegel auf den Resonator concentrirt. Schaltet man nun vor dem festen Spiegel die zu untersuchende Platte ein, so muss man den beweglichen eine bestimmte Strecke verschieben, um dieselbe Stärke der Resonatorerregung wie vorher zu erhalten. Bezeichnet man die Dicke der eingeschalteten Platte mit d , die Verschiebung des beweglichen Spiegels mit δ , die Geschwindigkeit der Strahlen im Dielectricum bez. in Luft mit v' bez. v , so beträgt, wenn man von der Reflexion an der Plattenvorderseite absieht, die Verzögerung des einen Theilbündels $2d/v' - 2d/v$, des anderen $2\delta/v$ danach berechnet sich der Brechungsexponent

$$n = \frac{d + \delta}{d}.$$

1) Mack, Wied. Ann. 56. p. 717. 1895.

2) v. Lang, Wied. Ann. 57. p. 430. 1896.

3) Righi, l. c.

4) Klemenčič u. Czermak, Wied. Ann. 50. p. 174. 1893.

5) Diese hat also dieselbe Aufgabe wie die schräge Glasplatte eines Gauss'schen Okulars.

Diese Righi'sche Methode erscheint schon deshalb so bequem für die Bestimmung von Brechungsexponenten, weil sie den zu untersuchenden Stoff nur in Form einer Platte von mässiger Ausdehnung erfordert; es fragt sich nur, ob man für eine gegebene Plattendicke d die compensirende Verschiebung δ genau genug bestimmen kann, um einen zuverlässigen Werth von n zu erhalten. Dass man dabei die Reflexion an der Vorderseite in Rechnung ziehen und danach obige Formel erweitern muss, geht schon aus den analogen Versuchen Trouton's hervor. Ich will im Folgenden Versuche mittheilen, die ich zur Prüfung dieser Frage angestellt habe. Sie werden zeigen, dass man schon mit dem einfachsten Beobachtungsmittel, dem Hertz'schen Funkenresonator, die Messungen zu recht befriedigender Genauigkeit bringen kann. Freilich bestätigen sie auch eine Befürchtung, die sich beim Versuch einer theoretischen Formulirung des Verfahrens aufdrängt: Eine solche ist nämlich nur in ziemlich roher Annäherung möglich, und so muss es denn von vornherein zweifelhaft erscheinen, ob zur Berechnung des Brechungsexponenten aus den Beobachtungsergebnissen die aufgestellte Formel genügt.

Die Apparate.

Die für meine Versuche benutzten Apparate waren im wesentlichen nach Righi's Angaben construirt und zwar in

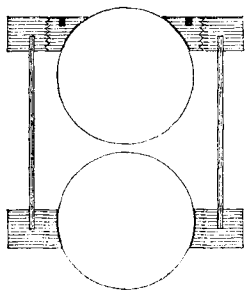


Fig. 1.

den Dimensionen, mit denen man Wellen von der Länge $\lambda = 10,6$ cm erhalten soll. Dementsprechend hatte der parabolische Cylinderspiegel des Erregers bei einer Höhe von 30 cm und einer Breite von 43 cm eine Brennweite von 8 cm ($= \frac{3}{4} \lambda$). Der Erreger selbst, bestehend aus zwei Messingkugeln von 3,7 cm Durchmesser in sehr kleinem Abstand voneinander, hatte,

um den Zwischenraum zwischen den Kugeln mit Oel füllen und doch dabei ihren Abstand reguliren zu können, folgende, durch Fig. 1 veranschaulichte, Fassung erhalten. Ein Glascylinder von 4,8 cm Höhe und 4,5 cm Durchmesser

war beiderseits in Ebonitringe eingekittet. In den einen von diesen, den unteren, war die eine Kugel direct eingefügt; der obere Ring dagegen trug auf seiner inneren Mantelfläche ein Gewinde, in das die Ebonitfassung der zweiten Kugel sich einpasste. Diese konnte so vermittelst eines eingreifenden Schlüssels gedreht, also gehoben oder gesenkt, und der Abstand zwischen den beiden Kugeln passend verändert werden. Bei den eigentlichen Versuchen wurde er dann immer wieder auf 0,8 mm einregulirt. Die Füllung des Erregergefäßes bestand nach Righi's Vorschlag aus einer steifen Mischung von Vaselineöl mit Vaseline, die bald durch die Funken stark verkohlte, ohne dass sich dies als schädlich bemerkbar gemacht hätte. Ein stiefelförmiger Fortsatz des unteren Ebonitringes diente zur Befestigung des Erregers im Gerüst seines Reflectors. Die ganze Anordnung, die ein sauberes Arbeiten ermöglicht, hat sich als sehr brauchbar erwiesen. In einem Abstand von 1—2 cm standen den Erregerkugeln zwei gleiche Kugeln gegenüber, in denen die (durch Kautschuk und Glas geschützte) Zuleitung von der Electricitätsquelle her endete. Als solche habe ich eine einfache Holtz'sche Influenzmaschine *ohne* Condensatoren benutzt, zu deren Antrieb ein kleiner Heissluftmotor von Heinrici-Zwickau diente (Leistung $\frac{1}{20}$ P. S.; für meine Zwecke wurde er indess nur mit einer ziemlich kleinen Bunsenflamme geheizt). Die Erregung des Oscillators erwies sich meist recht gut constant, ihre Stärke konnte durch Längenänderung der Luftfunkenstrecken variirt werden. Die Resonatoren wurden in bekannter Weise aus versilberten Glasplatten hergestellt derart, dass die Länge des dünnen Metallstreifens 40—50 mm, seine Breite 2—4 mm betrug. In seiner Mitte wurde die Funkenstrecke, auf deren Güte ja alles ankommt, vermittelst eines sehr scharf geschliffenen kleinen Stahlmesserchens eingeritzt, indem man die versilberten Platten längs einer Führung unter dieser Spitze durchzog. Für die meisten Messungen waren die Resonatoren nur dann empfindlich genug, wenn die Funkenstrecke eine Breite von wenigen Tausendstel Millimetern besass. In eine kleine Ebonitklemme eingesetzt, wurde der Resonator von einem Glasstäbchen getragen, das sich in der Brennpunktlinie des Empfängerspiegels verschieben und drehen liess.

Dessen Dimensionen wurden zweckmässig kleiner als die des Erregerspiegels gewählt: Die Höhe zu 23 cm, Breite zu 18 cm, Brennweite zu 1,9 cm (etwas kleiner als $\lambda/4$, um stärkere Concentration zu erzielen). Zur Beobachtung der Fünkchen diente eine Lupe in einem an der Spiegelwand passend angebrachten Tubus. Um dessen (horizontale) Axe war der Spiegel mit Resonator drehbar. Dadurch konnte auch sehr leicht ein Schutz des Resonators vor den einfallenden Wellen, wenn er einmal erwünscht war, erreicht werden. Um die Beobachtung der kleinen Funken durch Dämpfung des Lichtes zu erleichtern, wurde die Oeffnung des Spiegels mit einer nur 0,5 mm dicken Ebonitscheibe bedeckt; eine wesentliche Schwächung der Wellen durch Reflexion war eben wegen dieser geringen Dicke nicht zu befürchten.

Ablenkungs-Versuche.

Wenn auch die beschriebenen Righi'schen Apparate wesentlich kleinere Dimensionen haben als die seinerzeit von Hertz construirten, so erfordern sie doch immer noch ein ziemliches Quantum des auf sein Brechungsvermögen zu untersuchenden Stoffes, wenn er in prismatischer Form zur Anwendung kommen soll. Ich habe gelegentlich und nebenbei einige Messungen nach der Ablenkungsmethode mit einem für Demonstrationszwecke beschafften Colophoniumprisma ausgeführt, um mir ein Urtheil über die Schwierigkeiten auch dieser Methode zu bilden. Ein prismatisches Holzgefäss von 1,3 cm Wandstärke, 30 cm Höhe, 24,6 cm Basis- und 51,1 cm Schenkellänge war vollständig mit Colophonium ausgegossen worden. Das Colophoniumprisma, dessen brechender Winkel sich aus den angeführten Abmessungen zu

$$\alpha = 27^{\circ} 51'$$

berechnet, musste freilich *mit* seinem Holzmantel benutzt werden. Zur Messung der Ablenkungswinkel diente ein grobes Spectrometer nach Art des bekannten Weinhold'schen Modells: Die Kreistheilung (in ganze Grade) aufgetragen auf eine Xyloolithscheibe von 50 cm Durchmesser und 2 cm Dicke; um einen Zapfen in deren Mitte ein kurzer hölzerner Cylinder drehbar, der den Spectrometertisch, eine Holzplatte von 30 cm Durch-

messer, trug; um dieselbe Axe drehte sich ein Holzarm, in den der Träger des Empfängerspiegels an verschiedenen Stellen eingesetzt werden konnte; dieser Arm war, wie der Spectrometertisch, mit einem auf der Kreistheilung spielenden Index versehen; merkliche Excentricität war nicht vorhanden. Das Prisma wurde auf den Tisch immer möglichst so aufgesetzt, dass seine Schwerlinie mit der Drehungsaxe zusammenfiel. Die Entfernung des Erregerspiegels von dieser betrug etwa 2 m, die des Empfängerspiegels bei den definitiven Versuchen 30 cm. Mit Hülfe geometrischer Abmessungen wurde das Prisma zunächst in diejenige Stellung gebracht, bei der das vom Erregerspiegel kommende Parallelstrahlenbündel senkrecht auf die eine Begrenzungsfläche auffiel. Durch passende, am Theilkreis abgelesene Drehungen konnte dann dem Einfallswinkel i jeder beliebige Werth gegeben werden. Bestimmt man nun den zugehörigen Ablenkungswinkel δ und daraus den Austrittswinkel $i' = \delta + \alpha - i$, so berechnet sich bekanntlich der Brechungsexponent aus der Formel¹⁾:

$$n^2 = \frac{\sin^2 i + 2 \cos \alpha \sin i \sin i' + \sin^2 i'}{\sin^2 \alpha}.$$

Um δ zu finden, wurde der Resonator durch Drehung des ihn tragenden Armes mehrmals von beiden Seiten her abwechselnd gegen die Axe des abgelenkten Strahlenbündels vorgeschoben, bis sich in ihm Fünkchen zeigten. Die Mitte zwischen diesen beiden Grenzeinstellungen (deren Abstand natürlich von der Stärke der Erregung und der Empfindlichkeit des Resonators abhing) wurde als für die Richtung der austretenden Strahlen charakteristisch angesehen. In der gleichen Weise liess sich die Richtung des ungebrochenen Strahlenbündels festlegen.

Diese Beobachtung des ersten Fünkchens im Resonator bedarf nun aber besonderer Achtsamkeit. Es zeigte sich nämlich, dass sein Auftreten auch von äusseren Störungen abhängig war. Befand sich der Resonator noch etwas ausserhalb der Gegend, in der dauernder Funkenübergang statthatte, so konnten in ihm vorübergehend Fünkchen dadurch erregt werden, dass man ihn durch Erschütterung in leichte Bewegung versetzte.

1) Bei Rigli steht statt $\cos \alpha$ irrthümlich $\sin \alpha$.

Eine ganz entsprechende Erscheinung spielte auch bei den später zu beschreibenden Interferenzversuchen eine Rolle. Zu ihrer Erklärung kann man vielleicht annehmen, dass durch die Erschütterung mikroskopische Metallfetzchen, die sich an der eingerissenen Funkenstrecke wohl stets finden, verschoben bzw. losgelöst werden und dadurch den Uebergang eines Funkens zwischen den beiden Resonatorhälften erleichtern. Ich möchte es aber dahingestellt sein lassen, ob etwa auch noch in anderer Richtung sich ein Einfluss der Erschütterung auf den Resonator geltend macht. Die Bedingungen der Auslösung eines Entladungsfunkens sind ja gerade in neuerer Zeit Gegenstand besonderer Untersuchungen geworden. Um die hier besprochene Unsicherheit der Einstellung zu beseitigen, erwies es sich als nothwendig und hinreichend, das wiederholte Auftreten von Fünkchen bei möglichster Ruhe zum Merkmal der Einstellung zu nehmen.

In wie weit dann die wiederholten Einstellungen mit einander übereinstimmen, zeigt folgende Beobachtungsreihe mittlerer Güte:

	Einstellung:				Mittel:
einerseits	101,4	100,5	100,8	101,4	101,02
andererseits	137,0	136,7	136,8	137,0	136,88.

Danach wäre die Richtung der Strahlen bestimmt durch die Einstellung

118,95.

Die auf solche Weise bei constantem Einfallswinkel wiederholt bestimmten Werthe der Ablenkung δ zeigten nun aber solche Abweichungen unter einander, dass das ganze Beobachtungsverfahren zweifelhaft erscheinen musste. Insbesondere wenn durch entgegengesetzte Aufstellung des Prismas die Ablenkungen nach rechts und links mit einanderverglichen wurden, ergaben sich regellose Differenzen von mehreren Graden. Im Grunde ist das aber auch nicht verwunderlich: bei der beschriebenen Art der Beobachtung wird ja vorausgesetzt, dass die Intensitätsvertheilung in dem benutzten Strahlenbündel in Bezug auf eine bestimmte Axe symmetrisch sei. Ist das nun nicht der Fall, so kann es leicht kommen, dass in der Nähe der Grenze unregelmässig vertheilte Strahlen zwar bei directem Einfall den Resonator, den sie als die ersten treffen, noch er-

regen, nach dem Durchgang durch das Prisma aber, durch die Reflexionen geschwächt, nicht mehr; dies verschiebt dann die Lage der „Axe“ in unkontrollirbarer Weise. Es wird sich darum empfehlen, von dem ursprünglichen breiten Bündel nur einen centralen Theil zu benutzen, bei dem man eher auf Homogenität rechnen kann. Es wurden deshalb zwischen Erreger und Spectrometer in 40 cm Entfernung von dessen Mitte 2 Metallschirme — 30 cm breit und fast doppelt so hoch als das Prisma — senkrecht zum Strahlenbündel derart eingeschoben, dass sie zwischen sich einen verticalen Spalt von 12 bis 14 cm Breite liessen, dessen Mitte möglichst genau von der Axe des Erregerspiegels geschnitten wurde. Man beobachtete nun den Winkel 2δ zwischen den ein Mal nach rechts, das andere Mal, unter demselben Einfallswinkel, nach links abgelenkten Strahlen, ohne auf die Lage des einfallenden Bündels Rücksicht zu nehmen (der Abstand der beiden Grenz-einstellungen, die scheinbare Breite, betrug bei dem abgelenkten Bündel jetzt meist einige dreissig Grad). Die folgende Tabelle giebt die Beobachtungen für 3 verschiedene Einfallswinkel i .

Tabelle I.

Nr.	i	Strahlaxe		δ	δ Mittel	i'
		rechts	links			
5	23°	156,29°	119,10°	18,60°	18,98°	$23^\circ 50'$
6		157,49	118,87	19,31		
8		158,44	120,40	19,02		
1	$27^\circ 51'$	157,71	120,01	18,85	19,07	19 4
2		158,22	120,02	19,10		
3		158,40	119,86	19,27		
4	35°	157,81	118,95	19,43	20,08	12 56
7		159,31	118,40	20,45		
9		159,69	118,98	20,36		

Danach wachsen die Ablenkungen mit steigendem i ; dem Werth $i = 23^\circ$ entspricht nahezu das Minimum der Ablenkung: $i = i'$.

Berechnet man aus den vorstehenden Zahlen nach obiger Formel den Brechungsexponenten, so erhält man die Werthe:

$$1,651 \quad 1,651 \quad 1,667.$$

Danach kann man im Mittel den Brechungsexponenten des hier

benutzten Colophoniums für electrische Wellen von 10 cm Länge annehmen zu

$$n = 1,656,$$

in sehr guter Uebereinstimmung mit dem kürzlich von Mazzotto¹⁾ für längere Drahtwellen gefundenen Werth 1,658.

Die Methode hat meiner Meinung nach den Nachtheil, dass ein recht scharfes Einstellungsmerkmal fehlt; trotzdem lässt sich wenigstens in der Nähe der Minimalablenkung der Brechungsexponent aus den Beobachtungen ziemlich genau berechnen.

Interferenzversuche.

Die Anordnung für meine Hauptversuche nach dem Schema des Interferentialrefractors ist oben bereits kurz angegeben

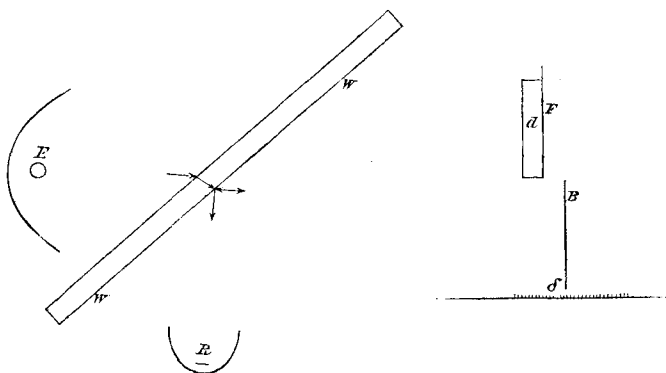


Fig. 2.

worden. Dem Erregerspiegel *E* (Fig. 2) von 43 cm Oeffnung standen in etwa 1 m Entfernung gegenüber die bei den Prismenversuchen schon erwähnten beiden ebenen Spiegel von je 30 cm Breite, mit einem Zwischenraum von wenigen mm, von der Axe des Strahlenbündels möglichst senkrecht getroffen. Von diesen blieb der eine, *F*, festaufgestellt, während der andere, *B*, in Richtung jener Axe bewegt werden konnte. Durch Schnurlauf und Kurbel konnte er bequem an einem Maassstab

1) Mazzotto, Nouv. Cim. (4) 2. p. 296, 1895.

entlang vor- und rückwärts geführt werden, ein Zeiger gab die Grösse der Verschiebung an. Etwa halbwegs zwischen dem Doppelspiegel und dem Erreger war unter 45° gegen die Strahlenaxe die dielectricische Wand WW aufgestellt, durch deren Einführung die Beobachtung der Interferenz bei genau senkrechtem Einfall ermöglicht ist. Sie bestand bei den endgültigen Versuchen aus einer Paraffinschicht von 56 mm Dicke, hergestellt aus 3 gleichen Platten von 44 cm Höhe und 40 cm Breite, so dass die Längsausdehnung der Wand 120 cm betrug. Da natürlich an ihren *beiden* Flächen eine theilweise Reflexion der beim Hingang und beim Rückgang auftreffenden Strahlen stattfindet, so muss die Dicke der Wand passend gewählt werden, um einen möglichst grossen Bruchtheil der vom Erreger ausgehenden Strahlung nach dem Resonator R reflectirt zu erhalten: Dazu darf die Reflexion beim Hin- oder Rückgang der Strahlen weder ein Maximum noch ein Minimum sein. Die Formeln für die Farben dünner Blättchen bieten die Möglichkeit, passende Werthe der Dicke zu berechnen, wenn man die Wellenlänge der benützten Strahlen und den Brechungs-exponenten der Wand kennt. Sonst ist man auf Ausprobiren angewiesen. Auch eine Glasplatte von 6 mm Dicke und eine Combination dieser mit der Paraffinwand erwies sich als brauchbar.

Der Resonator R mit seinem Spiegel von nur 18 cm Oeffnung erhielt die in der Fig. 2 angegebene Stellung. Die Mitte des Erregers, der Wand und des Empfängers befanden sich in 45 cm Höhe über der Tischplatte. Vor jedem der beiden Spiegel F und B konnten vermittlest einer Console und eines Drahtthakens in passender Höhe Platten dielectricischer Stoffe, dem Metall unmittelbar anliegend, in den Strahlengang eingeschaltet werden. Wurde eine solche Platte vor dem festen Spiegel F angebracht, so musste der bewegliche B um eine bestimmte Strecke vom Erreger entfernt werden, um dem zweiten Strahlenbündel dieselbe Phasenverzögerung zu ertheilen, wie sie die eingeschaltete Platte beim ersten hervorbrachte. Umgekehrt musste natürlich der Spiegel B dem Erreger genähert werden, wenn er selbst die Platte trug. Es erwies sich als vortheilhaft, beide Versuche nach einander anzustellen, wie das im Folgenden noch näher besprochen werden soll.

Aus dem Werth der Plattendicke d und der Verschiebung δ ist nun der Brechungsexponent n des Dielectricums zu berechnen.

Theorie.

Fände an der Vorderfläche des Dielectricums keine Reflexion der Wellen statt, so würde, wie oben schon bemerkt, die anzuwendende Formel einfach lauten:

$$n = \frac{d + \delta}{d};$$

die Thatsache der Reflexion führt zu einer verwickelteren Beziehung zwischen d , δ und n , in die natürlich auch die Wellenlänge der Strahlen — λ in Luft — eintritt. Folgende einfache Rechnung ergibt die gesuchte Formel.

Es möge bezeichnet werden mit

$\lambda' = \lambda/n$ die Wellenlänge im Dielectricum,

r die Amplitudenänderung bei der Reflexion in Luft am Dielectricum, mit

ρ bei der umgekehrten Reflexion, mit

s beim Uebergang ins Dielectricum, mit

σ beim umgekehrten Uebergang, mit

$\varepsilon = -1$ bei der Reflexion am Metall.

Sieht man nun die vom Erreger ausgehenden Wellen an als ungedämpft, mit der Periode T , so wirken an der Stelle x des Resonators zunächst folgende vom ersten Theilbündel herführende Wellen, deren Amplituden nur in relativem Maasse angegeben sind:

$$r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

$$s \varepsilon \sigma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{2d}{\lambda'} \right),$$

$$s \varepsilon^2 \rho \sigma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{4d}{\lambda'} \right),$$

$$s \varepsilon^3 \rho^2 \sigma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{6d}{\lambda'} \right) \text{ etc.};$$

setzt man zur Abkürzung

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \vartheta, \quad 2\pi \cdot \frac{2d}{\lambda'} = \eta',$$

so ergibt die Summation:

$$r \sin \vartheta + s \varepsilon \sigma \{ \sin (\vartheta - \eta') + \varepsilon \varrho \sin (\vartheta - 2 \eta') \\ + (\varepsilon \varrho)^2 \sin (\vartheta - 3 \eta') + + + \},$$

oder aber¹⁾

$$r \sin \vartheta + s \varepsilon \sigma \cdot \frac{\varrho \varepsilon \sin \vartheta - \sin (\vartheta - \eta')}{2 \varrho \varepsilon \cos \eta' - (\varrho \varepsilon)^2 - 1},$$

oder, da ja $\varrho = -r$ und $s \sigma = 1 - r^2$:

$$r \sin \vartheta + \varepsilon (1 - r^2) \frac{r \varepsilon \sin \vartheta + \sin (\vartheta - \eta')}{2 r \varepsilon \cos \eta' + (r \varepsilon)^2 + 1},$$

oder endlich, wenn der Nenner kurz mit N bezeichnet und der Werth von ε eingeführt wird:

$$\frac{1}{N} \{ (2r - (1 + r^2) \cos \eta') \sin \vartheta + (1 - r^2) \sin \eta' \cos \vartheta \}.$$

Hiermit interferirt das zweite Strahlenbündel, das von der der Vorderfläche des Dielectricums entsprechenden Stelle aus in Luft die Strecke $d + \delta$ hin und nach Reflexion am Metall zurück durchlaufen hat:

$$- \sin 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - 2 \frac{d + \delta}{\lambda} \right),$$

oder wenn

$$2 \pi \cdot 2 \cdot \frac{d + \delta}{\lambda} = \eta$$

gesetzt wird:

$$- \sin (\vartheta - \eta).$$

Die resultirende Intensität ergibt sich nach bekannten Regeln zu:

$$J = \left\{ \frac{2r - (1 + r^2) \cos \eta'}{N} - \cos \eta \right\}^2 + \left\{ \frac{(1 - r^2) \sin \eta'}{N} + \sin \eta \right\}^2.$$

Fragen wir nun im besondern nach demjenigen Werth von δ , also von η , der J zu einem Maximum macht, so folgt für diesen die Bedingungsleichung:

$$\left(\frac{2r - (1 + r^2) \cos \eta'}{N} - \cos \eta \right) \sin \eta + \left(\frac{(1 - r^2) \sin \eta'}{N} + \sin \eta \right) \cos \eta = 0,$$

oder aber

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{(1 - r^2) \sin \eta'}{(1 + r^2) \cos \eta' - 2r},$$

1) Vgl. z. B. Wüllner, Exp. Phys. 4. Aufl. 2. p. 414. 1883.

oder endlich, wenn man nach den Fresnel'schen Formeln

$$r = -\frac{n-1}{n+1}$$

einsetzt:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{2n \sin \eta'}{(n^2+1) \cos \eta' + (n^2-1)};$$

die Formel lässt sich aber bedeutend vereinfachen, wenn man statt η' die halbe Grösse einführt; man erhält leicht:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\frac{2}{n} \operatorname{tg} \frac{\eta'}{2}}{1 - \frac{1}{n^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\eta'}{2}}$$

und daraus also

$$\operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{\eta'}{2},$$

d. h. ¹⁾

$$(I) \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{d+\delta}{\lambda} = \frac{1}{n} \operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda} n,$$

also eine transcendente Beziehung zwischen d , δ , λ und n . Um aus den Versuchsergebnissen n zu berechnen, hat man ein Verfahren allmählicher Annäherung einzuschlagen. Man nimmt etwa zunächst für n den Werth $n' = (d+\delta)/d$, berechnet einen neuen aus der Gleichung

$$n = \frac{\lambda}{2\pi d} \operatorname{arctg} \left(n' \operatorname{tg} 2\pi \frac{d+\delta}{\lambda} \right)$$

und setzt dies Verfahren fort, bis die Gleichung durch einen bestimmten Werth von n mit genügender Genauigkeit erfüllt wird.

Nun ist aber offenbar kaum Hoffnung vorhanden, dass bei Anwendung von Resonatoren unsere Formel die Beobachtungsergebnisse genügend darstellt; bei ihrer Herleitung ist ja angenommen worden, dass die vom Erreger ausgesandten Wellen ungedämpft seien, und vor allem, dass der Empfänger unter gegebenen Verhältnissen auf die an seinem Ort oscillirende elektrische Kraft rein objectiv reagire, ohne dass seine subjective Schwingungsfähigkeit ins Spiel kommt. Die Erscheinungen der

1) Ein anderer Weg der Berechnung, auf den mich Hr. Drude hinwies (vgl. P. Drude, Wied. Ann. 51. p. 77. 1894) ergibt letztere Formel vielleicht directer.

„multiplen Resonanz“ lehren, dass dies nicht zutrifft, und wie man z. B. im Fall der stehenden Wellen durch eine einfache Ueberlegung sich klar machen kann, dass deren Länge von der Eigenschwingungsdauer des Resonators abhängt, so kann man auch für unseren Fall zeigen, dass der Werth von δ unter sonst gleichen Verhältnissen mit der Art des Empfängers sich ändert. Wir machen zu dem Zweck die unserer obigen gerade entgegengesetzte Annahme, dass der Empfänger nur unendlich wenig gedämpft sei, der Erreger dagegen so stark, dass eine von ihm ausgegangene Störung auf unseren Empfänger nur als momentaner Impuls wirkt; im übrigen wird sie nach bekannten Gesetzen reflectirt und gebrochen.

Bezeichnet also v und v' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung in Luft und im Dielectricum, also

$$\tau' = \frac{2d}{v'} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{2(d + \delta)}{v}$$

die Zeit, die sie zum Durchlaufen der Platte und der entsprechenden Luftschicht hin- und rückwärts braucht, so wird der Resonator getroffen zu den Zeiten

$$0, \quad \tau', \quad 2\tau', \quad 3\tau', \quad v\tau'$$

von Impulsen der relativen Stärke

$$r, \quad s\varepsilon\sigma, \quad s\varepsilon^2\rho\sigma, \quad s\varepsilon^3\rho^2\sigma, \quad s\varepsilon\sigma(\varepsilon\rho)^{\nu-1}$$

und ferner zur Zeit τ von dem Impuls ε . Jeder von diesen erzeugt im Resonator eine Schwingung der Form

$$\varphi_\nu = A_\nu \cos at + B_\nu \sin at,$$

wo $a = 2\pi/T_R$ der Eigenschwingungsdauer T_R des Resonators entspricht. Die Constanten A_ν und B_ν bestimmt man, indem man den Resonator einem angestossenen Pendel gleichbehandelt: es muss sein für

$$t = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = cr,$$

wo c ein Proportionalitätsfactor, für

$$t = v\tau', \quad \varphi_\nu = 0, \quad \frac{d\varphi_\nu}{dt} = cs\varepsilon\sigma(\varepsilon\rho)^{\nu-1};$$

Danach findet man dann durch Summation, dass zunächst von der Seite des Dielectricums her im Resonator eine Schwingung erregt wird, die sich nach einer gegen τ' sehr grossen Zeit darstellen lässt durch

$$\varphi' = \frac{c}{a} \left\{ r \sin a t + s \varepsilon \sigma \sum_1^{\infty} (\varepsilon \rho)^{v-1} \sin a (t - v \tau) \right\};$$

damit interferirt die von der anderen Seite her erregte Schwingung

$$\varphi = \frac{c}{a} \cdot \varepsilon \sin a (t - \tau).$$

Die weitere Rechnung gestaltet sich der oben gegebenen vollkommen gleich; die Bedingung, dass durch passende Wahl von δ also τ die Stärke der Schwingung zu einem Maximum gemacht wird, liefert die Beziehung zwischen δ , d und n in derselben Form:

$$(I') \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{d + \delta}{\lambda_R} = \frac{1}{n} \operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda_R} n,$$

wo nun statt der dem Erreger zugehörigen Wellenlänge λ die dem Resonator entsprechende λ_R auftritt: die compensirende Verschiebung δ hängt also von der Schwingungsdauer des Resonators ab. Was diese vereinfachte Ueberlegung zeigt, wird, wie wir sehen werden, durch den Versuch vollkommen bestätigt.

In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse nun aber viel complicirter, als hier angenommen wurde. Es wirken eine unendliche Anzahl *gedämpfter* Wellen der Periode T auf den Empfänger, der selbst eine andere Periode und andere Dämpfung besitzt. Das Problem der Resonanz muss sogar noch allgemeiner behandelt werden, als es Bjerknes¹⁾ gethan hat, der nur einen Wellenzug einmal am Resonator vorbeigehen lässt. Auf die zwischen Erreger und Empfänger hin und her reflectirten Wellen wirkt ausserdem noch die schräge Wand, die z. B. einen Theil seitwärts hinaus „ins Unendliche“ reflectirt. Aus alledem scheint es mir vorläufig am einfachsten, die Frage so zu stellen: Inwieweit lassen die Beobachtungsergebnisse thatsächlich eine Annäherung an die von Formel (I) bez. (I') geforderte Beziehung zwischen d und δ erkennen, und ist es danach etwa möglich, einen Werth des Brechungsexponenten n anzugeben, obgleich eine strenge Formel zu seiner Berechnung nicht vorliegt?

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 121. 1895.

Um δ in seiner Abhängigkeit von d für den idealen Fall zu veranschaulichen, gebe ich folgende Tabelle und Curve, die ungefähr den Verhältnissen entsprechen, die bei meinen Versuchen zu erwarten gewesen wären. Es ist $\lambda = 108,9$ mm gesetzt, wie es bei den Resonatoren von 50 mm Länge beobachtet wurde, und $n = 2,66$, was nach den ersten Versuchen als wahrscheinlicher Werth des Brechungsexponenten für Glas erschien.

Formel (I) ergibt dann für folgende Werthe d die beigefügten δ , beide in Millimetern.

d	δ	d	δ	d	δ
4	0,5	16	33,3	30	46,9
8	6,1	20	34,0	32	58,3
10	15,6	24	34,3	36	66,9
12	26,3	28	38,7	40	67,9

Die Curve (Fig. 3) charakterisirt durch ihre treppenähnliche Gestalt die Aenderung des δ mit d als eine abwechselnd sehr schnelle und sehr langsame. Alle diejenigen Punkte, für die beide Tangenten gleich 0 bez. $\pm \infty$ werden, für die also dn und $d + \delta$ beide gleich demselben geraden bez. ungeraden Vielfachen von $\lambda/4$ sind, liegen auf der Geraden

$$dn = d + \delta,$$

die eine Art Symmetrieaxe unserer Curve darstellt. Aus ihrer Neigung α gegen die Abscissenaxe ergibt sich direct der Brechungsexponent

$$n = 1 + \operatorname{tg} \alpha.$$

Dieser Geraden schmiegt sich die Curve um so mehr an, je näher n dem Werth 1 kommt, denn um so mehr geht Gleichung (I) über in $d + \delta = dn$.

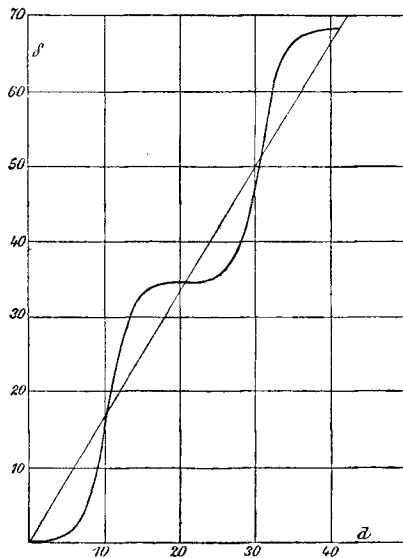


Fig. 3.

Beobachtungsweise.

Was nun die Beobachtungen selbst anlangt, so habe ich immer diejenige Stellung des beweglichen Spiegels zu ermitteln gesucht, bei der maximale Erregung des Empfängers eintrat. Um sie genau zu finden, wurde von beiden Seiten her der Spiegel ihr soweit genähert, dass sich im Empfänger eben wenig zahlreiche, aber dauernd wiederkehrende Fünkchen zeigten. Die Mitte zwischen diesen beiden Spiegelstellungen wurde dann als die dem Maximum der Erregung entsprechende angesehen. Es war bei dieser Einstellungsweise dieselbe Störung zu beachten, die ich oben bei den Prismenversuchen erwähnte, dass nämlich in der kritischen Gegend geringe Erschütterungen der ganzen Anordnung das Auftreten von Fünkchen erleichterten. Die endgültige Einstellung wurde deshalb nur bei grösstmöglicher Ruhe gemacht und dann bis auf Zehntel mm abgelesen. Um Aenderungen in der Stärke der Wellenlänge und der Stärke der Resonatorempfindlichkeit zu eliminieren, wurden „geschlossene Beobachtungen“ gemacht, d. h. auf die beiden Punkte a und b wiederholt eingestellt nach dem Schema:

$$a_1 b a_2 \quad \text{oder} \quad a_1 b_1 a_2 b_2$$

oder wohl auch, bei grösserer Abweichung der einzelnen Werthe:

$$a_1 b_1 a_2 b_2 a_3,$$

und daraus durch passende Combination die Stelle des Maximums berechnet.

Wegen der Dämpfung der Wellen ist es eigentlich nicht streng richtig, die Mitte zwischen den beiden Stellen a und b gleicher Erregung als die der maximalen anzusehen. Die Versuche zeigten indess immer wieder, dass die „Lage“ des Maximums: $(a + b)/2$ innerhalb der Beobachtungsfehler unabhängig war von seiner „Breite“ $a - b$. Ich gebe, um die ganze Art der Einstellungen zu zeigen, eine Beobachtungsreihe wieder, die besonders zur Prüfung dieser Frage angestellt wurde:

Wiederholte Ermittlung derselben Maximumlage durch Annäherung von beiden Seiten:

	28,8	56,8	29,7	56,0	30,1	54,8	30,1
Max.:	43,0	43,05	42,95	42,75	42,45.		

Der Empfänger durch einen starken Funkenstrom weniger empfindlich gemacht, dann:

	32,1	52,5	32,9	52,9	32,8	51,5	34,1	51,5
Max.:	42,5	42,8	42,9	42,5	42,5	42,8,		
nach einigen anderen Einstellungen wieder:	51,0		50,8			50,5		
		35,0		35,0				
Max.:	42,95	42,9	42,8.					

Während also die „Breite“ des Maximums von 28 auf 16 mm abnimmt, ändert sich seine „Lage“ unregelmässig nur um 0,6 mm.

Im allgemeinen schwankte die Breite der Maxima zwischen 40 und 10 mm; ihre Lage konnte als bis auf einige Zehntel mm sicher angesehen werden.

Bei der ursprünglichen Aufstellung zeigte sich nun, dass die Lage des Hauptmaximums nicht derjenigen Stellung des beweglichen Spiegels entsprach, in der seine Ebene mit der des festen zusammenfiel; die beiden im Resonator interferirenden Theilbündel müssen also dort mit einer nicht vermutheten Phasendifferenz ankommen. Es ergab sich weiter, dass die Grösse jener Abweichung, also dieser Phasendifferenz, durch die Natur und Dicke der schrägen Wand bedingt war; die Paraffinschicht allein, ebenso die erwähnte Glasplatte allein ergaben 5—6 mm, beide zusammen 10 mm Differenz unter sonst gleichen Verhältnissen. Danach war anzunehmen, dass jene Phasendifferenz beim Durchgang durch die Wand bez. bei der Reflexion an ihr zu Stande kam. Man kann dies wohl folgendermaassen erklären: Das aus dem Erregerspiegel austretende Strahlenbündel ist nicht rein parallel, innerhalb seines Querschnittes bestehen also Phasenunterschiede, von denen man sogar annehmen kann, dass sie in horizontaler Richtung symmetrisch vertheilt sind in Bezug auf die Axe des Bündels. Die Anordnung war nun so getroffen, dass die durch die Berührungsstelle der Spiegel *F* und *B* gegebene Trennungslinie mit jener Axe möglichst zusammenfiel. Die dadurch bedingte Symmetrie der beiden Theilbündel wird aber gestört durch die mehrfachen Reflexionen an der schrägen Wand. Denn die an deren einer Fläche reflectirten Bündel sind gegen die an der anderen Fläche reflectirten in horizontaler Richtung ver-

schoben. Dadurch erhalten also die beiden Theilbündel eine von der Brechung in der schrägen Wand abhängige Phasendifferenz gegeneinander. Nun vereinigt aber der Empfänger-*spiegel* noch nicht die Hälfte des ganzen ursprünglichen Bündels auf den Resonator. Indem man ihn sich selbst parallel senkrecht zur *Axe* der einfallenden Bündel verschob (in der Richtung EF), konnte man also Gebiete verschiedener Phasenvertheilung heraus schneiden. Thatsächlich zeigte sich auch bei solcher Verschiebung um einige Centimeter, dass jene Abweichung des Hauptmaximums von der Nulllage Grösse und Vorzeichen wechselte. Der Empfänger blieb dann für die Messungen auf Abweichung 0 eingestellt.

Als Differenz der beiden Stellungen maximaler Erregung vor und nach Einschaltung einer dielectrischen Platte ergab sich die compensirende Verschiebung δ , deren Unsicherheit nach dem oben Gesagten mit 1 mm jedenfalls im allgemeinen hoch genug veranschlagt ist. Bei Wiederholung unter ganz gleichen Verhältnissen zeigte sich thatsächlich meist eine weit bessere Uebereinstimmung.

Bei der ursprünglichen Anordnung, wo die schräge Wand auch nur $\frac{2}{3}$ ihrer schliesslichen Länge hatte, fand ich für dasselbe δ wesentlich, nämlich bis über 4 mm verschiedene Werthe, wenn die betreffende Platte ein Mal vor *Spiegel F* und das andere Mal vor *Spiegel B* eingeschaltet wurde. Sorgfältigere Aufstellung und Verlängerung der Wand setzten diese Differenz sehr herab, sie hatte aber doch bei gegebener Aufstellung meist ein constantes Vorzeichen, während ihre Grösse nur in Ausnahmefällen 1 mm überschritt. Um gleich eine Controle zu haben, hielt ich es fürs beste, stets beide Einstellungen vorzunehmen, und nahm als Werth von δ ihre halbe Differenz an.

Einige Beobachtungen wurden derart ausgeführt, dass nicht nur die Verschiebung des Hauptmaximums, sondern auch die der beiden nächstgelegenen Maxima ermittelt wurde, in denen die Wegdifferenz der beiden Theilbündel also von vornherein $\pm \lambda$ betrug. Es sollte dadurch gleichzeitig δ und λ mehrfach bestimmt werden. Ich gebe zwei solche Reihen wieder, die sich auf zwei verschiedene Glasplatten beziehen, und zwar der Uebersichtlichkeit wegen nicht die Stellen der Maxima selbst, sondern nur ihre Abstände und Verschiebungen.

	δ vorn	$\lambda/2$	δ Mitte	$\lambda/2$	δ hinten
Pl. vor F	+ 8,5	55,2	+ 9,3	54,2	+ 9,2
Pl. vor B	- 10,0	54,4	- 9,7	54,3	- 9,6
		54,7		54,4	
Pl. vor F	+ 9,3	54,6	+ 10,0	55,0	+ 10,2
Pl. vor B	- 11,5	53,9	- 11,3	54,8	- 11,3
		54,1		54,8	

Wie auch diese Beispiele zeigen, war die Differenz zwischen positivem und negativem δ beim „vorderen“ Maximum meist grösser als sonst, und dementsprechend der Werth von $\lambda/2$ entstellt. Deshalb habe ich mich darauf beschränkt, die Verschiebungen des Hauptmaximums zu ermitteln.

Um den erwarteten Einfluss des Empfängers auf die Messungen zu prüfen, benutzte ich solche von 40 und von 50 mm Gesammtlänge. Rigbi giebt ersteren als den eigentlichen Resonator an mit $\lambda = 106$ mm. Indess ist zu beachten, dass die Eigenschwingungsdauer solcher Empfänger jedenfalls wesentlich von der Natur und Dicke des Glasstreifens abhängt. Einige Versuche, aus der „Breite“ der Maxima auf die Empfindlichkeit zu schliessen, schienen den Empfänger von etwa 50 mm Länge als Resonator zu bezeichnen. Die Bestimmung der objectiv vorhandenen Wellenlänge ist für unsere Strahlen noch ziemlich zweifelhaft, wie auch die Versuche von v. Lang¹⁾ zeigen. Die Messung der mit meinen beiden Resonatorarten zu beobachtenden Wellenlängen liess sich ziemlich

Resonator von 50 mm			Resonator von 40 mm		
-	+	Mittel	-	+	Mittel
54,4	54,3	54,35	50,1	51,0	50,55
53,9	54,8	54,35	51,0	50,2	50,60
54,6	54,1	54,35	52,0	50,4	51,20
54,6	54,9	54,75	51,5	50,6	51,05
54,1	54,5	54,30	50,1	50,5	50,30
54,6	54,5	54,55	51,9	50,2	51,05
54,37	54,52	54,44	51,10	50,48	50,79

1) v. Lang, Wied. Ann. 57. p. 430. 1896.

genau durchführen. Ich fand z. B. aus dem Abstand des ersten vorderen und ersten hinteren Maximums vom Hauptmaximum folgende Werthe für $\lambda/2$ (s. Tab. auf vor. Seite):

Danach entsprechen den beiden Resonatorenarten von 50 und 40 mm Gesamtlänge die Wellenlängen

$$\lambda = 108,9 \text{ mm} \quad \text{und} \quad 101,6 \text{ mm.}$$

Beobachtungsergebnisse.

Um die theoretisch vermutheten Verhältnisse möglichst scharf zu prüfen, habe ich vor allem *Glas* als einen festen Körper von verhältnissmässig hohem electrischen Brechungsexponenten untersucht. Es bietet zugleich den Vorthail, dass man leicht planparallele Platten von verschiedener, genau messbarer Dicke verwenden kann. Benutzt wurden von der als Spiegelglas (Krystallglas von St. Gobain) im Handel befindlichen Art drei Tafeln von rund 5, 8 und 10 mm Dicke. Sie wurden in Platten von 25 cm Breite und 40 cm Höhe zerschnitten; von diesen kamen nur die genügend (bis auf etwa 0,1 mm) planparallelen einzeln, die anderen in passenden Combinationen zur Verwendung. Es standen mir so folgende Glasdicken zur Verfügung:

Bezeichn.	α	β	γ	δ	ε	ζ
<i>d</i>	5,13	7,96	8,16	10,02	16,30	19,62

andere noch durch Zusammenfügung der hier genannten. Dass die drei Tafeln wirklich denselben Brechungsexponenten hatten, ist von vornherein nicht ganz sicher, aus dem Folgenden ergibt sich aber, dass etwaige Unterschiede sich bei unseren Messungen kaum bemerkbar machen.

Ferner kamen noch zwei zu Vorversuchen benutzte *Paraffin*-platten etwa gleicher Ausdehnung von 30,6 und 52,3 mm Dicke einzeln und zusammen zur Messung.

Folgende Tabellen enthalten die Beobachtungsergebnisse (bei den eingehender untersuchten Platten die Mittelwerthe) und zwar Columnne 1 die Bezeichnung, 2 die Dicke der Platten, 3 und 4 die compensirende Verschiebung δ , beobachtet mit Resonatoren von 50 bez. 40 mm Länge, 5 die Differenz zwischen den beiden δ .

Paraffin.

Bezeichn.	d	δ (50)	δ (40)	Diff.
α	30,6	14,0	12,6	- 1,4
β	52,3	20,4	21,3	+ 0,9
$\alpha + \beta$	82,9	33,7	36,0	+ 2,3

Spiegelglas.

Bezeichn.	d	δ (50)	δ (40)	Diff.
α	5,13	2,3	3,3	+ 1,0
β	7,96	9,4	11,1	+ 1,7
γ	8,16	10,5	12,2	+ 1,7
δ	10,02	18,2	18,3	+ 0,1
$\alpha + \beta$	13,09	27,5	26,1	- 1,4
ϵ	16,30	30,5	28,4	- 2,1
ζ	19,62	31,1	28,4	- 2,7
$\beta + \epsilon$	24,26	34,0	34,9	+ 0,9
$\beta + \zeta$	27,58	40,7	46,4	+ 5,7
$\delta + \zeta$	29,64	48,1	52,7	+ 4,6
$\beta + \gamma + \epsilon$	32,42	60,2	57,5	- 2,7
$\epsilon + \zeta$	35,92	63,2	60,3	- 2,9
$\beta + \delta + \zeta$	37,60	63,8	60,7	- 3,1
$\alpha + \epsilon + \gamma$	41,05	66,2	63,1	- 3,1
$\beta + \epsilon + \zeta$	43,88	69,4	68,1	- 1,3
$\delta + \epsilon + \zeta$	45,94	71,2	74,5	+ 3,3
$\alpha + \beta + \epsilon + \zeta$	49,01	79,8	82,7	+ 2,9

Was nun zunächst die Beobachtungen für *Paraffin* anlangt, so genügen beide Reihen, wie das bei dem verhältnissmässig niedrigen Brechungsexponenten zu erwarten war, nahezu der Gleichung

$$dn = d + \delta;$$

es ergeben sich nämlich, danach berechnet, folgende Werthe von n :

1,457	1,412
1,390	1,407
1,407	1,434
1,418	1,418.

Man wird danach

$$n = 1,418$$

als den wahrscheinlichsten Werth des Brechungsexponenten unserer Paraffinplatten anzusehen haben. Eine Berechnung der δ nach Formel (I'), mit diesem Werth von n und den angeführten Werthen von λ ergiebt nur mangelhafte Uebereinstimmung mit der Beobachtung — aus bald ersichtlichen Gründen.

Die in der Tabelle wiedergegebenen Beobachtungsergebnisse für *Glas* sind durch die beiden Curven Tab. VII dargestellt. Diese bestätigen zunächst, dass merkbare Unterschiede im Werthe von n für die verschiedenen Tafeln offenbar nicht vorhanden sind, und sie zeigen ferner deutlich, worin die mit verschiedenen Resonatoren durchgeführten Messungsreihen übereinstimmen und wodurch sie sich unterscheiden.

Auf den ersten Blick erkennt man, dass kein rein periodisches Anwachsen des δ mit d stattfindet; nur der erste Theil beider Curven ähnelt der unserer Formel (I) entsprechenden, durch Fig. 3 dargestellten Curve. Für grössere Dicken der Glasschicht ergeben sich höhere Werthe von δ als man nach dem anfänglichen Verlauf der Curve erwarten sollte. Die Curven erscheinen gewissermassen in ihrer Längsrichtung gedehnt und gleichzeitig, — was besonders bei Curve *a*, 50 mm Res.-L. entsprechend, hervortritt — etwas nach der Ordinatenaxe hin umgebogen. Ich glaube, dass man in einer solchen Gestaltung den Einfluss der mit der Dicke wachsenden Exponentialfactoren erkennen darf, durch die in einer vollständigeren Theorie die Dämpfung unserer Schwingungen zum Ausdruck kommen würde. Fragt man sich nun, ob trotzdem aus unseren Messungen ein Werth des Brechungsexponenten abgeleitet werden kann, so scheint mir das folgendermassen möglich: Das Anfangsstück unserer Curven wird noch am ehesten der Formel (I) entsprechen; man ziehe nun durch dieses eine Gerade, die der oben erwähnten „Symmetrieaxe“ entsprechen soll, eine Gerade nämlich, die durch ihre Schnitte mit der Curve in 2 (bez. 3) gleiche Theile zerlegt wird. Die eigenthümliche Gestalt der Curve hat zur Folge, dass die Lage einer solchen Geraden mit einer verhältnissmässig geringen Unsicherheit sich bestimmen lässt. Eine Ausführung in grösserem Massstabe ergab mir für ihr Coordinatenverhältniss ($\text{tg } \alpha$) den Werth

1,65 und 1,61.

In der Zeichnung Taf. VII ist bei beiden Curven eine Gerade dem Mittelwerth 1,63 entsprechend eingetragen und zwar durchgezogen, um die Abweichungen im fernerem Verlauf der Curve erkennen zu lassen. Gibt man die Richtigkeit dieser Ueber-

legungen zu, so kann man also auf geometrischem Wege den Brechungsexponenten unseres Spiegelglases ermitteln zu

$$n = 2,63$$

mit einer Unsicherheit von kaum mehr als 1 Proc.

An der Lage der Curven gegen diese Geraden erkennt man nun leicht, wodurch sich die Messungen mit Resonatoren verschiedener Art unterscheiden. Zunächst einmal schmiegt sich die dem kürzeren Resonator entsprechende Curve b näher an jene Gerade an als Curve a und ferner weist sie auch eine kürzere Periodicität auf, wenn man von einer solchen noch reden darf. Was letztere anlangt, so müssten die Coordinaten d und δ der Schnittpunkte nach früherem der Gleichung genügen:

$$d + \delta = \frac{\lambda}{4} \text{ bez. } \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{4} \text{ etc.}$$

also in unseren beiden Fällen:

$$d + \delta = 27,2, 54,4 \text{ und } d + \delta = 25,4, 50,8.$$

Thatsächlich aber finden wir kleinere Werthe, nämlich etwa 24,7 und 23,0.

Bei beiden Curven also ist die im Anfangsstück allenfalls vorhandene Periodicität im selben Verhältniss — rund 10 Proc. — kleiner als nach den direct beobachteten Wellenlängen zu erwarten wäre. Es erscheint mir das nicht unverständlich. Ursprünglich gegeben ist die Periode des Erregers und die des Empfängers; aus beiden bestimmt sich — je nach der beiderseitigen Dämpfung verschieden — die in der Erregung des Empfängers bei veränderlicher Spiegelstellung auftretende Periodicität (λ), und ebenso, aber offenbar nach anderen Gesetzen, diejenige, die sich bei Einschaltung von Platten verschiedener Dicke in der compensirenden Verschiebung zeigt, natürlich ebensowenig eine strenge Periodicität wie jene. Uebrigens ergibt auch dann, wenn man die aus den Curven selbst entnommenen Werthe von λ zu Grunde legt, eine Berechnung von δ nach Formel (I) nicht genügende Uebereinstimmung mit der Beobachtung: Die berechnete Curve vollführt ihre Richtungsänderungen noch plötzlicher als die beobachtete.

Nach alledem gewähren Beobachtungen nach dem hier besprochenen Schema vermöge der erreichbaren grossen Genauig-

keit die Möglichkeit, eine vervollständigte Theorie der Resonanz bis in ihre Einzelheiten quantitativ zu prüfen. Eine Bestimmung des Brechungsexponenten freilich ist nur bei verhältnissmässig niedrigen Werthen desselben leicht auszuführen und erfordert sonst die genaue Festlegung eines grösseren Theils der Curve, die δ als Function von d darstellt. Denn zu ganz falschen Werthen für den Brechungsexponenten (in unserem Falle bis zu 1,45 einerseits und 3,1 andererseits) kann man, sobald er einigermaassen hoch liegt, gelangen, wenn man nicht den Einfluss der Vorderfläche des Dielectricums in Rechnung zieht, wie ihn unsere Formel (I) zu berücksichtigen sucht. Die Anwendung noch kürzerer Wellen dürfte übrigens auch hier das Verfahren vereinfachen.

Leipzig, Physikal. Inst. der Univ., August 1896.

