Leçons sur les fonctions de variables réelles et les developpements en séries de polynomes. Par Émile Borel Rédigées par Maurice Fréchet. Avec des notes par Paul Painlevé et Henri Lebesgue. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Émile Borel.) Gauthier-Villars, Paris 1905. VIII + 160 S. Preis Fr. 4.50.

Der Inhalt dieses Buches ist kurz der folgende. Kap. I bringt die wichtigsten Definitionen und Sätze aus der Theorie der Punktmengen. Besonders sei hingewiesen auf einen überaus einfachen, von Lindelöf herrührenden Beweis des Cantorschen Satzes, daß jede abgeschlossene Menge die Summe einer perfekten und einer abzählbaren Menge ist. Kap. II enthält das Wichtigste aus der Lehre von der Stetigkeit und Unstetigkeit, den Begriff der vier Du Bois-Reymondschen Abteilungen und den Begriff des bestimmten Integrals im Sinne von Riemann und in dem von Lebesgue. Kap. III behandelt die Reihen von stetigen Funktionen. Es wird in einfacher Weise Arzelas notwendige und hinreichende Bedingung dafür abgeleitet, daß die Summe einer solchen Reihe selbst eine stetige Funktion sei. Es folgt die notwendige und hinreichende Bedingung desselben Autors für die gliedweise Integrierbarkeit einer Reihe, deren Glieder integrabel im Riemannschen Sinne sind, und endlich wird die einfache Lösung desselben Problems im Sinne von Lebesgue gegeben. Kap. IV, das wichtigste des Buches, beschäftigt sich mit der Entwicklung einer stetigen Funktion in eine Reihe von Polynomen. Für das fundamentale Resultat von Weierstraß, daß jede stetige Funktion einer Veränderlichen einer solchen Darstellung fähig ist, werden mitgeteilt: der ursprüngliche Beweis von Weierstraß, der auf der Theorie der trigonometrischen Reihen basierte Beweis von Volterra, die elementaren Beweise von Runge (mit einer Modifikation von Mittag-Leffler) und Lebesgue. Es folgen die verschiedenen Methoden zur Ausdehnung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen; sodann die zuerst von Borel gegebene Darstellung der unbeschränkt differenzierbaren Funktionen als Summe einer konvergenten Potenzreihe und einer gleichmäßig konvergenten trigonometrischen Reihe, aus der sich dieselben Darstellungen für die Ableitungen durch gliedweise Differentiation ergeben. Es wird weiter gezeigt, daß die durch die Lagrangesche Interpolationsformel gelieferten Polynome mit wachsendem Grade nicht immer in allen Punkten gegen die darzustellende Funktion konvergieren, und sodann eine andere allgemeingültige Interpolationsformel abgeleitet, die eine beliebig große Annäherung in allen Punkten liefert. Endlich wird im Sinne von Tchebicheff gezeigt, daß es von jedem Grade n ein und nur ein Polynom größter Annäherung gibt, das, sobald irgend eine Entwicklung der Funktion in eine Reihe von Polynomen bekannt ist, auf algebraischem Wege gefunden werden kann. Kap. V handelt von der Darstellung unstetiger Funktionen durch Reihen von Polynomen.

Die hier auftretenden Fragen werden aber nur kurz gestreift, mit Rücksicht auf das gleichzeitige Erscheinen eines diesen Gegenstand betreffenden Buches von Baire. In einer umfangreichen Note entwickelt Painlevé ausführlich seine schon früher in den „Comptes rendus" angegebenen Resultate über die Polynomentwicklungen analytischer Funktionen. Er führt das Problem, Polynomentwicklungen zu finden, die im ganzen Holomorphiesterne konvergieren, zurück auf das, eine „serie génératrice" aufzufinden, d. h. eine Reihe die aus den Koeffizienten der Entwicklung von $f(t)$ nach Potenzen von t so zusammengesetzt ist, daß sie immer $f(1)$ darstellt, wenn $f(t)$ auf dem Segment $o1$ der reellen Achse regulär ist. Es wird ein Verfahren auseinandergesetzt, welches theoretisch beliebig viele „series génératrices" liefert. Die Durchrechnung in einem speziellen Falle liefert eine schon von Fredholm aufgefundene Reihenentwicklung. Es wird weiter gezeigt, wie durch „reelle Transformation" aus einer solchen Reihe beliebig viele andere gefunden werden können, während die „imaginäre Transformation" den Übergang vom geradlinigen Holomorfiesterne zu krummlinigen Sternen ermöglicht. Diese letzteren liefern endlich durch einen Grenzübergang Reihen, welche nicht nur im ganzen geradlinigen Sterne konvergieren, sondern — bei sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Natur der singulären Stellen — auch noch auf den vom Sterne ausgeschlossenen Halbstrahlen. Bemerkenswert sind insbesondere die Anwendungen auf das reelle Gebiet, sowie die Verallgemeinerung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen. In einer zweiten Note gibt Lebesgue eine neue Herleitung der notwendigen und hinreichenden Bedingung von Baire, daß sich eine unstetige Funktion durch eine Reihe von Polynomen darstellen lasse. In einer dritten Note behandelt Borel die Frage nach der Existenz von Funktionen, die keiner der n ersten Klassen der Baireschen Klassifikation angehören. Die Existenz solcher Funktionen ergibt sich unmittelbar durch bloße Mächtigkeitsbetrachtungen. Doch bemerkt Borel, daß hiedurch nicht gezeigt ist, daß solche Funktionen auch definiert werden können, und, um diesem Übelstand abzuhelfen, gibt er ein Verfahren zur Definition einer solchen Funktion an.

Selbstverständlich ist in dieser knappen Inhaltsangabe nicht alles Wissenswerte aus dem vorliegenden Buche angeführt, immerhin dürfte sie genügen, um einen Begriff von dem hohen wissenschaftlichen Werte des Buches zu geben, der noch gesteigert wird durch die Eleganz der Darstellung, die man ja in jeder Publikation Borels zu finden gewohnt ist.

Hans Hahn.

Physikalische Aufgaben aus dem Gebiet des Magnetismus und Elektrizität. Von F. Junker. Teubner, Leipzig 1904. 48 S., 80 Pf.

Das Büchlein enthält eine hübsche Zusammenstellung von Übungsbeispielen aus dem genannten Gebiete, welche mit elementarer Mathematik gelöst werden können, und entspricht seinem Zwecke als Hilfsbuch für die höheren Klassen der Mittelschulen gewiß vollkommen. Jeder Paragraph enthält außer mehreren durchgeführten Beispielen eine Serie von Übungsbeispielen, bei denen nur das Resultat angegeben ist. Zweifellos wird der Schüler durch fleißige Benützung einer solchen Aufgabensammlung weitaus am besten gefördert.

Hl.