Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

§. 1.

Abbildung der Fläche dritter Ordnung auf der Ebene.

Die bekannte Thatsache, dass die allgemeinste Fläche dritter Ordnung der Ort des Durchschnitts dreier projectivischen Ebenenbündel ist*), führt auf eine Abbildung der Flächen dritter Ordnung auf einer Ebene, welche Herrn *Chasles*' Abbildung des Hyperboloids ganz analog ist. Sind $\varkappa$, λ, μ Parameter, a, a', a'', b, ... lineare Ausdrücke in den Raumcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, so sind die Gleichungen allgemeiner projectivischer Ebenenbündel:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varkappa a + \lambda b + \mu c = 0, \\ \varkappa a' + \lambda b' + \mu c' = 0, \\ \varkappa a'' + \lambda b'' + \mu c'' = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man hieraus $\varkappa$, λ, μ, so erhält man die Gleichung der Fläche dritter Ordnung:

$$\Sigma \pm ab'c'' = 0;$$

man kann aber statt dessen aus den Gleichungen (1.) die Verhältnisse der x als Functionen von $\varkappa$, λ, μ ausdrücken, und findet

$$(2.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = f_1(\varkappa, \lambda, \mu), \qquad \varrho x_2 = f_2(\varkappa, \lambda, \mu), \\ \varrho x_3 = f_3(\varkappa, \lambda, \mu), \qquad \varrho x_4 = f_4(\varkappa, \lambda, \mu), \end{cases}$$

wo ϱ ein unbestimmter Factor ist, und die Functionen f homogene Functionen dritter Ordnung sind. Betrachten wir nun $\varkappa$, λ, μ als Coordinaten eines Punktes einer Ebene, so entspricht jedem Punkte der Ebene ein Punkt des Raums und umgekehrt; und zwar tritt letzteres ausnahmslos ein, während für ersteres einzelne Ausnahmen stattfinden. In der That nämlich geben die Gleichungen (1.) nur dann bestimmte Verhältnisse der x, wenn von denselben nicht eine eine Folge der anderen wird. Setzen wir

$$a = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$$

und ähnlich bei den anderen linearen Ausdrücken, so werden die Gleichun-

*) Vgl. hierüber *Schröter,* Bd. 62, p. 265 dieses Journals.

gen (1.) nach den x geordnet:

$$\begin{aligned}
\Sigma(\varkappa a_i + \lambda b_i + \mu c_i)x_i &= 0,\\
\Sigma(\varkappa a'_i + \lambda b'_i + \mu c'_i)x_i &= 0,\\
\Sigma(\varkappa a''_i + \lambda b''_i + \mu c''_i)x_i &= 0,
\end{aligned}$$

und für diese Ausnahmswerthe von $\varkappa$, λ, μ, für welche keine bestimmten Werthe der x erhalten werden, müssen die aus dem unvollständigem System

$$\left|\begin{matrix}
\varkappa a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 & \varkappa a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 & \varkappa a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3 & \varkappa a_4 + \lambda b_4 + \mu c_4\\
\varkappa a'_1 + \lambda b'_1 + \mu c'_1 & \varkappa a'_2 + \lambda b'_2 + \mu c'_2 & \varkappa a'_3 + \lambda b'_3 + \mu c'_3 & \varkappa a'_4 + \lambda b'_4 + \mu c'_4\\
\varkappa a''_1 + \lambda b''_1 + \mu c''_1 & \varkappa a''_2 + \lambda b''_2 + \mu c''_2 & \varkappa a''_3 + \lambda b''_3 + \mu c''_3 & \varkappa a''_4 + \lambda b''_4 + \mu c''_4
\end{matrix}\right|$$

gebildeten Unterdeterminanten gleichzeitig verschwinden. Diese sind nichts anderes als die Functionen f_i selbst; es müssen also für solche Werthe die Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0$$

zusammenbestehen. Nun schneiden sich die Curven $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ in neun Punkten $\varkappa$, λ, μ, und für dieselben ist, da die Functionen f, statt der x in (1.) gesetzt, diese Gleichungen identisch erfüllen:

$$\begin{aligned}
(\varkappa a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3)f_3 + (\varkappa a_4 + \lambda b_4 + \mu c_4)f_4 &= 0,\\
(\varkappa a'_3 + \varkappa b'_3 + \mu c'_3)f_3 + (\varkappa a'_4 + \lambda b'_4 + \mu c'_4)f_4 &= 0,\\
(\varkappa a''_3 + \varkappa b''_3 + \mu c''_3)f_3 + (\varkappa a''_4 + \lambda b''_4 + \mu c''_4)f_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Es ist also entweder auch $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, oder

$$0 = \left|\begin{matrix}
a_3 f_3 + a_4 f_4 & b_3 f_3 + b_4 f_4 & c_3 f_3 + c_4 f_4\\
a'_3 f_3 + a'_4 f_4 & b'_3 f_3 + b'_4 f_4 & c'_3 f_3 + c'_4 f_4\\
a''_3 f_3 + a''_4 f_4 & b''_3 f_3 + b''_4 f_4 & c''_3 f_3 + c''_4 f_4
\end{matrix}\right|.$$

Die Gleichung ist cubisch für $\frac{f_3}{f_4}$, und giebt also drei Schnittpunkte von $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, für welche nicht auch $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, während für die übrigen sechs Schnittpunkte alle Functionen f gleichzeitig verschwinden.

Die hier zu betrachtenden Functionen f sind also dadurch charakterisirt, dass die Curven $f_i = 0$ sechs Schnittpunkte gemeinsam haben. Ich werde zeigen, dass diese Bedingung hinreicht, um auf die Gleichungen (1.) immer zurückzuführen. Man kann, wenn eine Gerade

$$A_1 = \varkappa a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 = 0$$

gegeben ist, immer drei andere Geraden, und zwar nur auf *eine* Art, so bestimmen, dass

$$(3.)\qquad A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 + A_4 f_4 = 0.$$

Die beiden Curven vierter Ordnung nämlich:

$$A_1 f_1 = 0, \quad A_2 f_2 + A_3 f_3 + A_4 f_4 = 0,$$

von denen die erste vollständig gegeben ist, haben erstlich die sechs Punkte gemein, in welchen die vier Curven f_i sich schneiden. Die zweite Curve aber enthält noch acht Constanten, die man so bestimmen kann, dass beide Curven acht beliebig gewählte weitere Punkte gemein haben. Beide Curven haben also vierzehn Punkte gemein, und müssen daher ganz übereinstimmen. Die Functionen A sind dadurch bis auf einen Factor bestimmt, und dieser endlich lässt sich so einrichten, dass die Gleichung (3.) eine identische wird.

Nimmt man zwei andere Gerade $B_1 = 0$, $C_1 = 0$, so kann man zwei ähnliche Identitäten aufstellen:

$$(4.)\qquad \begin{cases} B_1 f_1 + B_2 f_2 + B_3 f_3 + B_4 f_4 = 0, \\ C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4 = 0. \end{cases}$$

Jede vierte Gleichung analoger Natur muss sich aus diesen zusammensetzen, da jede vierte Gerade sich aus A_1, B_1, C_1 linear zusammensetzt. Schreibt man aber in (3.), (4.) wieder x_i statt f_i, so hat man die Gleichungen (1.) wiederum vor sich.

Jedem Punkt der Ebene entspricht also im Allgemeinen ein Punkt der Fläche und umgekehrt; ausgenommen sind davon nur sechs Punkte der Ebene, denen nicht Punkte der Fläche entsprechen, sondern Gerade, indem für die entsprechenden Werthe $\varkappa$, λ, μ sich die Gleichungen (1.) auf nur zwei reduciren.

Die sechs Geraden der Fläche, welche hier fundamental auftreten, (dieselben, welche Herr *Schröter* l. c. zunächst nachweist) bilden die eine Hälfte einer *Schläfli*schen Doppelsechs; und da jede Abbildung der Fläche nach dem hier angegebenen Princip auf ein solches System von Geraden basirt, so giebt es im Ganzen 72 verschiedene Arten die Fläche so abzubilden, deren zwei conjugirt sind, indem ihre Fundamentalgeraden zusammen eine Doppelsechs bilden.

§. 2.

Gegenseitiges Entsprechen von ebenen Curven und Raumcurven.

Untersuchen wir nun die ebenen Curven, welche gegebenen Raumcurven entsprechen, und umgekehrt.

Der vollständige Durchschnitt der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche n^{ter} Ordnung ist eine Raumcurve $3n^{ter}$ Ordnung. Da wir nun durch die Gleichungen (2.) die Fläche dritter Ordnung ersetzen, so erhalten wir, wenn

$$\varphi = 0$$

die Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung ist, die Punkte der Schnittcurve, sobald wir in φ für die x die Functionen f einsetzen. Die Gleichung $\varphi = 0$ geht dadurch in die Gleichung der der Raumcurve entsprechenden ebenen Curve über:

$$\varphi(f_1, f_2, f_3, f_4) = 0,$$

welche ebenfalls von der $3n^{ten}$ Ordnung ist. Die sechs Werthsysteme, für welche alle f verschwinden, machen φ zu Null in der n^{ten} Ordnung; die sechs Fundamentalpunkte der Ebene sind also $n$fache Punkte der Ebene, den n Punkten entsprechend, in denen die Fläche $\varphi = 0$ von der betreffenden Fundamentalgeraden getroffen wird. Man hat also den Satz:

Die Abbildung des Durchschnitts der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche n^{ter} Ordnung ist eine Curve $3n^{ter}$ Ordnung, welche in jedem der sechs Fundamentalpunkte einen $n$fachen Punkt besitzt.

So entspricht also dem ebenen Schnitt der Fläche dritter Ordnung eine Curve dritter Ordnung, welche durch die sechs Fundamentalpunkte geht; dem Schnitt der Fläche mit einer Fläche zweiter Ordnung eine Curve sechster Ordnung, welche die sechs Punkte zu Doppelpunkten hat, dem Schnitt der Fläche mit einer anderen Fläche dritter Ordnung eine Curve neunter Ordnung, welche die sechs Punkte zu dreifachen Punkten hat, u. s. w.

Untersuchen wir nun aber, welche Raumcurve einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung in der Ebene entspricht. Diese Curve der Ebene mag ausserhalb der sechs Fundamentalpunkte d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte besitzen; die sechs Punkte selbst seien bezüglich $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_6$fache Punkte der ebenen Curve; wobei nur der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden mag, dass die Tangenten der Zweige eines solchen vielfachen Punktes sämmtlich verschieden seien.

Die Ordnung N der entsprechenden Raumcurve ist die Zahl ihrer Durchschnittspunkte mit einer Ebene, oder mit der ebenen Curve dritter Ordnung, in welcher eine Ebene die Fläche dritter Ordnung schneidet. Diesen entsprechen die Schnittpunkte ihres Bildes mit einer durch die sechs Fundamentalpunkte gehenden Curve dritter Ordnung; aber dabei sind die Schnittpunkte auszuschliessen, welche in die sechs Punkte selbst fallen, da diese keine Schnittpunkte anzeigen, sondern sich nur auf die Begegnung der beiden Raumcurven mit den sechs Fundamentalgeraden beziehen.

Die Anzahl sämmtlicher Schnittpunkte der beiden ebenen Curven ist $3n$; daher nach Abzug der in die sechs Punkte fallenden Schnittpunkte:

$$(5.) \qquad N = 3n - \Sigma\alpha_i.$$

Die Anzahl von Tangentenebenen, welche von einer Geraden im Raum an die Curve geführt werden können (Rang R), kann man auf folgende Weise bestimmen. Denken wir uns eine beliebige Gerade, welche die Fläche dritter Ordnung in drei Punkten schneidet. Das durch sie gelegte Ebenenbüschel schneidet die Fläche in Curven dritter Ordnung, welche jene drei Punkte gemeinsam haben. Diesem System entspricht in der Ebene ein Büschel von Curven dritter Ordnung, welche ausser den sechs Fundamentalpunkten noch drei andere Punkte gemeinsam haben. Die Frage nach der Anzahl von Ebenen des Büschels, welche die Raumcurve berühren, kommt also zurück auf die Frage nach der Anzahl von Curven des ebenen Büschels, welche die gegebene Curve n^{ter} Ordnung berühren. Sind also, um diese Zahl zu bestimmen, $u = 0$, $v = 0$ zwei Curven des Büschels, also

$$u + \lambda v = 0$$

ein Büschel von Curven dritter Ordnung, welcher durch die sechs Fundamentalpunkte geht, so kommt es darauf an, die Zahl der Werthe von λ zu finden, für welche die Curven $u + \lambda v = 0$, $f = 0$ einander berühren. Nun liegen (vgl. Bd. 64, p. 215 folgg. dieses Journals) die Berührungspunkte dann im Durchschnitt von $f = 0$ mit der *Jacobi*schen Curve von u, v, f, und die Anzahl möglicher Berührungspunkte wäre demnach $n(n+3)$. Aber man beweist ähnlich, wie dies a. a. O. für gemeinsame Doppelpunkte beider Curven geschehen ist, den Satz:

Sind $u = 0$, $v = 0$ zwei Curven gleicher Ordnung, und ist $\Theta = 0$ die Jacobische Curve von $u = 0$, $v = 0$, $f = 0$; gehen endlich $u = 0$, $v = 0$ durch einen $r$fachen Punkt von $f = 0$, so hat auch $\Theta = 0$ daselbst einen $r$fachen Punkt, und die r Tangenten von $\Theta = 0$ fallen mit den r Tangenten von $f = 0$ einzeln zusammen.

Mithin absorbirt jeder $r$fache Punkt von $f = 0$ $r(r+1)$ Schnittpunkte von $f = 0$, $\Theta = 0$, weil jeder der r Zweige von Θ die r Zweige von f schneidet und einen derselben berührt. Die von den sechs Fundamentalpunkten herrührende Erniedrigung der obigen Zahl ist daher $\Sigma\alpha_i(\alpha_i + 1)$.

Nehmen wir hinzu, dass wie bei dem Tangentenproblem jede durch einen weitern Doppelpunkt gelegte Curve des Büschels als eine doppelte, jede durch einen Rückkehrpunkt gelegte als dreifache uneigentliche Lösung des Problems anzusehen ist, so findet man:

$$(6.)\qquad R = n(n+3)-2d-3r-\Sigma\alpha_i(\alpha_i+1).$$

Als dritte Bestimmung kann man den Umstand benutzen, dass die Klassenzahl p der zugehörigen *Abel*schen Functionen für die ebene und für die Raumcurve den gleichen Werth hat. Diese Zahl ist, ausgedrückt durch die Singularitäten der ebenen Curve:

$$p = \frac{n-1.n-2}{2}-d-r.$$

Mit Hülfe von *Salmons* Gleichungen (Geometry of three dimensions p. 236, 237) und der Gleichungen, welche ich Bd. 64 dieses Journals p. 99 gegeben habe, findet man folgende weitere Bestimmungen:

Die Zahl der Schmiegungsebenen, welche von einem Punkt des Raumes an die Raumcurve gezogen werden können, (Klasse der Raumcurve):

$$(7.)\qquad K = 3n^2-6d-8r-3\Sigma\alpha_i^2.$$

Die Anzahl von Punkten der Raumcurve, in welchen vier nächste Tangentenebenen sich treffen, (stationäre Punkte):

$$(8.)\qquad B = r.$$

Die Anzahl der Wendungsberührebenen:

$$(9.)\qquad A = 6n(n-1)-12d-15r-2\Sigma\alpha_i(3\alpha_i-1).$$

Die übrigen Singularitäten setzt man nach *Salmons* Gleichungen mit Hülfe dieser leicht zusammen; sie nehmen weniger einfache Ausdrücke an.

Aus den Gleichungen (5.) — (9.) kann man nun auch umgekehrt, wenn die Zahlen N, R, B und die α bekannt sind, die Singularitäten der ebenen Curve bestimmen. Insbesondere findet man:

$$r = \frac{N+\Sigma\alpha_i}{3},$$

woraus der Satz folgt:

Jede auf der Fläche dritter Ordnung liegende Raumcurve schneidet jede Hälfte einer Doppelsechs so, dass die Zahl dieser Schnittpunkte, um die Ordnung der Curve vermehrt, durch 3 *theilbar ist.*

Wenn man in den obigen Formeln $3n$ statt n und alle α gleich n

setzt, so findet man

$$\begin{aligned} N &= 3n, \\ R &= 3n(n+1)-2d-3r, \\ K &= 9n^2-6d-8r, \\ A &= 6n(3n-1)-12d-15r, \end{aligned}$$

Formeln, wie sie für den Durchschnitt der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche n^{ter} Ordnung gelten. Man wird hieraus auf die Vermuthung geführt dass jede ebene Curve $3n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem $n$fachen Punkt in jedem der 6 Fundamentalpunkte dem Durchschnitt einer Fläche n^{ter} Ordnung mit der Fläche dritter Ordnung entspricht. In der That lässt sich der oben (p. 362) ausgesprochene Satz umkehren. Denken wir uns nämlich eine ebene Curve $3n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem $n$fachen Punkte in jedem der 6 Fundamentalpunkte, so hängt dieselbe noch von

$$\frac{3n.\overline{3n+3}}{2}-6\frac{n.\overline{n+1}}{2} = 3\frac{n.\overline{n+1}}{2}$$

Constanten ab. Ebensoviele enthält die allgemeinste Durchschnittscurve der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche n^{ter} Ordnung. Denn ist $F=0$ die Fläche n^{ter}, $f=0$ die Fläche dritter Ordnung, M ein Factor der $n-3^{\text{ten}}$ Ordnung ($n \geqq 3$), so kann man bei der Betrachtung der Schnittcurve $F=0$ ersetzen durch

$$F+Mf = 0,$$

und M so bestimmen, dass nur

$$\frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{6}-1-\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{6} = 3\frac{n.\overline{n+1}}{2}$$

Constante übrig bleiben. Man kann sonach durch irgend welche $3\frac{n.\overline{n+1}}{2}$ Punkte der Fläche dritter Ordnung, welche eben so viel Punkten der ebenen Curve entsprechen und sie vollständig bestimmen, eine Fläche n^{ter} Ordnung legen, deren Durchschnittscurve mit der gegebenen Fläche dann vollkommen bestimmt ist. Dieser Schnittcurve entspricht eine Curve $3n^{\text{ter}}$ Ordnung in der Ebene, welche mit der ersten jene $3\frac{n.\overline{n+1}}{2}$ Punkte gemein hat, also ganz mit ihr zusammenfällt. Daher entspricht wirklich jeder solchen ebenen Curve eine Raumcurve, welche ein vollständiger Durchschnitt ist. Zwar wurde oben $n \geqq 3$ vorausgesetzt; indessen lehrt eine einfache Zählung, dass die Zahl $3\frac{n.\overline{n+1}}{2}$, auf welche hier alles ankommt, auch bei $n=1$, $n=2$ noch die richtige bleibt.

Aus dem vorigen folgt, dass man jede ebene Curve zu einer solchen ergänzen kann, welche einem vollständigen Durchschnitt entpricht, indem man nur eine Curve n'^{ter} Ordnung hinzufügt, welche die sechs Fundamentalpunkte beziehungsweise zu $(n+n'-\alpha_i)$fachen Punkten hat. Denn beide Curven zusammen bilden dann eine Curve $(n+n')^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Fundamentalpunkte zu $(n+n')$fachen Punkten hat.

§. 3.

Specielle Curven. Gerade und Kegelschnitte.

Untersuchen wir jetzt einige der einfachsten Curven der Ebene und der Fläche. Ausser den 6 Geraden welche in die Fundamentalpunkte übergegangen sind, enthält die Fläche noch 21 andre. Von diesen haben 6 die Eigenschaft, dass jede 5 der ersteren trifft; diese 6 mit den ersten zusammen bilden eine *Schläffli*sche Doppelsechs. Man erhält die Abbildungen derselben, wenn man die sechs Kegelschnitte legt, deren jeder 5 der 6 Fundamentalpunkte enthält (welche im Allgemeinen nie in einem Kegelschnitte liegen). Denn für einem solchen Kegelschnitt sind alle α gleich 1, bis auf eines, welches Null ist, und man hat also

$$N = 3.2 - 5 = 1,$$

d. h. die entsprechenden Raumcurven sind Gerade.

Die übrigen 15 Geraden entsprechen den 15 Geraden, welche die 6 Fundamentalpunkte paarweise verbinden. Denn für eine solche Gerade ist $n = 1$, zwei Grössen α sind 1 und die übrigen verschwinden. Daher

$$N = 3.1 - 2 = 1,$$

wie es sein muss.

Die Combinationen dieser 27 Geraden, welche Dreiecke etc. bilden, findet man in der angeführten Abhandlung des Herrn *Schröter*.

Jede der 27 Geraden ist die Axe eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen die Fläche dritter Ordnung in Kegelschnitten schneiden. Die Abbildungen dieser Kegelschnittschaaren erhält man, wenn man die Abbildungen der 27 Geraden zu den Abbildungen vollständiger Durchschnittscurven dritter Ordnung ergänzt.

Die Glieder der Kegelschnittschaar, welche einer der Fundamentalgeraden zugeordnet ist, müssen sich also als Curven dritter Ordnung abbilden, welche durch alle sechs Fundamentalpunkte gehen. Als Bilder von Kegelschnitten müssen sie $p = 0$, also einen Doppelpunkt haben, und dieser muss in dem zugeordneten Fundamentalpunkt eintreten, entsprechend den zwei Punkten, die jeder Kegelschnitt des Büschels mit der entsprechenden Geraden gemein hat. Hierdurch sind diese Curven in der That bis auf einen Parameter bestimmt; und jenen Kegelschnittsystemen entsprechen also Büschel von Curven dritter Ordnung, welche durch die 6 Fundamentalpunkte gehen und in einem derselben einen Doppelpunkt haben. Da wegen der eindeutigen Beziehung zwischen Fläche und Bild Doppelverhältnisse entsprechender Curvenbüschel immer gleich sind, so entspricht auch der durch das Kegelschnittbüschel auf der Geraden bestimmten Involution hier die Involution der Tangentenpaare der Doppelpunkte; und den Doppelpunkten der Involution dort, nämlich den Punkten, in welchen die Gerade von Kegelschnitten berührt wird, entsprechen hier die Doppelstrahlen der Involution, d. h. die Tangenten der beiden in dem Büschel auftretenden Curven mit Rückkehrpunkten.

Die Kegelschnittschaaren, welche einer als Kegelschnitt abgebildeten Geraden der Fläche zugeordnet sind, gehen in Büschel von Geraden über, deren Scheitel in denjenigen Fundamentalpunkt fällt, durch welchen der Kegelschnitt *nicht* geht.

Die Kegelschnittschaaren endlich, deren zugehörige Gerade sich als Gerade abbilden, gehen wiederum in Kegelschnittschaaren über; und zwar bildet eine solche Schaar einen Büschel, dessen Grundpunkte diejenigen 4 Fundamentalpunkte sind, durch welche die entsprechende Gerade *nicht* geht.

§. 4.

Schnitt der Fläche dritter Ordnung mit Flächen zweiter Ordnung.

Der vollständige Durchschnitt der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung bildet sich als Curve sechster Ordnung ab, welche in jedem der 6 Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt hat *). Dieselbe kann insbesondere, ohne in Theile zu zerfallen, noch bis zu vier weitere Doppelpunkte erhalten, welche Berührungen der Fläche zweiter Ordnung mit der Fläche dritter Ordnung entsprechen.

Aber die Raumcurve kann sich in eine Gerade und in eine Curve fünfter Ordnung auflösen, indem die Fläche zweiter Ordnung durch eine der

*) Ueber diese Raumcurve vgl. Bd. 63, p. 237 dieses Journals.

27 Geraden der Fläche dritter Ordnung hindurch geht. Nehmen wir zu dieser Geraden eine von denen, welche sich als Kegelschnitte abbilden, so wird die Abbildung der Raumcurve fünfter Ordnung eine ebene Curve vierter Ordnung; dieselbe geht durch die 5 auf dem Kegelschnitt liegenden Fundamentalpunkte und hat in dem sechsten einen Doppelpunkt. *Für die Raumcurve fünfter Ordnung, in welcher eine Fläche dritter Ordnung von einer Fläche zweiter Ordnung geschnitten wird, welche eine Gerade mit derselben gemein hat, ist also $p=2$, und ferner, wenn d die Anzahl von Berührungen beider Flächen bezeichnet, bei welchen die Schnittcurve einen Doppelpunkt erhält, r die Zahl derjenigen, bei welchen ein Rückkehrpunkt auftritt:*

$$N=5, \quad R=12-2d-3r, \quad K=21-6d-8r,$$
$$p=2-d-r, \quad B=r, \quad A=32-12d-15r.$$

Diese Curve hat Herr *Salmon* als Raumcurve fünfter Ordnung und erster Species bezeichnet (vgl. *Salmon,* Geom. of three dim., 2^d ed., p. 279).

Ist die Gerade in der Abbildung wieder eine Gerade, so wird die Abbildung der Raumcurve fünfter Ordnung eine Curve fünfter Ordnung, welche durch die der Geraden angehörigen Fundamentalpunkte geht, und in den vier übrigen Doppelpunkte hat.

Ist die Gerade eine der Fundamentalgeraden, so wird die Raumcurve fünfter Ordnung in eine ebene Curve sechster Ordnung abgebildet, welche die 5 andern Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten, den ersten aber zum dreifachen Punkt hat. Denn auf der Geraden als der Fläche zweiter Ordnung angehörig erzeugen die sie schneidenden Geraden der Fläche eine Punktreihe $a+\lambda b=0$, auf derselben Geraden aber als der Fläche dritter Ordnung angehörig schneiden die ihr entsprechenden Kegelschnittschaaren eine Involution $u+\lambda v=0$ aus; beide Reihen haben drei Doppelpunkte, und diesen entsprechen die drei Zweige der Abbildung, welche durch den Fundamentalpunkt gehen.

Zweitens kann die Raumcurve sich in zwei sich nicht schneidende Gerade auflösen und in eine Raumcurve vierter Ordnung, indem zwei Erzeugende der Fläche zweiter Ordnung, welche derselben Schaar angehören, zugleich Gerade der Fläche dritter Ordnung sind. Nehmen wir für diese Geraden solche, die sich in Kegelschnitten abbilden, so wird die Abbildung der ergänzenden Raumcurve vierter Ordnung ebenfalls ein Kegelschnitt; und zwar geht derselbe durch die beiden Fundamentalpunkte, durch welche nur je einer der andern Kegelschnitte hindurchgeht. Für diese Raumcure ist also $p = 0$; es ist die bekannte Curve vierter Ordnung und zweiter Species *).

Ist die Abbildung der einen Geraden ein Kegelschnitt, die der andern ein Fundamentalpunkt, der nicht auf ihm liegt, so ist das Bild der Raumcurve eine Curve vierter Ordnung, welche durch die übrigen Fundamentalpunkte geht und in jenem einen dreifachen Punkt hat.

Sind die Abbildungen beider Geraden Fundamentalpunkte, so ist das Bild der Raumcurve eine Curve sechster Ordnung, welche diese beiden zu dreifachen, die übrigen Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten hat.

Ist das Bild der einen Geraden ein Kegelschnitt, das der andern eine Gerade, welche zwei Fundamentalpunkte mit ihm gemein hat, so wird aus der Raumcurve eine Curve dritter Ordnung, welche durch die 3 andern Fundamentalpunkte des Kegelschnitts geht, und in dem sechsten Fundamentalpunkt einen Doppelpunkt hat.

Ist das Bild der einen Geraden eine Gerade, das der andern ein nicht auf ihr liegender Fundamentalpunkt, so ist das Bild der Raumcurve eine Curve fünfter Ordnung, welche durch die beiden Fundamentalpunkte der Geraden geht, den dritten Fundamentalpunkt zum dreifachen, und die drei andern zu Doppelpunkten hat.

Sind endlich die Bilder der Geraden zwei Gerade, die einen Fundamentalpunkt gemein haben, so ist das Bild der Raumcurve eine Curve vierter Ordnung, welche durch die zwei Fundamentalpunkte geht, welche nur einer der Geraden angehören, und Doppelpunkte hat in den drei Fundamentalpunkten, durch welche keine der Geraden geht.

Drittens kann die Raumcurve sechster Ordnung sich in einen Kegelschnitt auflösen und in eine Raumcurve vierter Ordnung. Nehmen wir für den Kegelschnitt einen solchen, welcher sich als Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt abbildet, so geht die Abbildung der Raumcurve vierter Ordnung in eine Curve dritter Ordnung über, welche durch die 5 Fundamentalpunkte geht, in welchen der Doppelpunkt nicht stattfindet. Für diese Curve ist also im Allgemeinen $p = 1$, und die Raumcurve vierter Ordnung ist also erster Species.

Ist das Bild des Kegelschnitts wieder ein Kegelschnitt, so wird das

*) Die bemerkenswerthen und der Curve erster Species gegenüber verhältnissmässig einfachen Eigenschaften dieser Curve finden ihre innere Begründung wesentlich darin, dass für diese $p = 0$, für jene aber $p = 1$ ist.

Bild der Raumcurve eine Curve vierter Ordnung, welche durch die 4 Fundamentalpunkte geht, welche dem Kegelschnitt angehören, und die beiden andern zu Doppelpunkten hat.

Ist endlich das Bild des Kegelschnitts eine durch einen Fundamentalpunkt gehende Gerade, so wird das Bild der Raumcurve eine Curve fünfter Ordnung, welche auch durch jenen Fundamentalpunkt geht, und die 5 übrigen zu Doppelpunkten hat.

Endlich kann die Raumcurve sechster Ordnung in zwei Raumcurven dritter Ordnung zerfallen, deren keine eine ebene ist. Da für jede solche Curve $p=0$, so kann sie in der Ebene nur dargestellt werden durch eine Curve

sechster Ordnung mit 10 Doppelpunkten,
fünfter Ordnung mit 6 Doppelpunkten,
vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten,
dritter Ordnung mit 1 Doppelpunkt.
zweiter Ordnung,
erster Ordnung.

Diese Fälle treten wirklich mit Ausnahme des ersten sämmtlich ein, und zwar folgendermassen.

Eine Curve sechster Ordnung kann den Durchschnitt der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung nur darstellen, wenn sie in den Fundamentalpunkten Doppelpunkte hat. Soll sie aber einer Raumcurve dritter Ordnung entsprechen, so muss der vollständige Durchschnitt noch eine andere Curve dritter Ordnung enthalten, welche in der Abbildung eine Curve nullter Ordnung giebt; d. h. der Rest des Durchschnitts muss aus 3 Fundamentalgeraden bestehen. In den entsprechenden Fundamentalpunkten muss dann aber die Curve, wie oben gezeigt, dreifache Punkte haben, und die Curve sechster Ordnung muss also 3 Fundamentalpunkte zu dreifachen, die 3 übrigen zu Doppelpunkten haben, was in der That 10 Doppelpunkten äquivalent ist. Aber eine Curve sechster Ordnung kann nicht drei Doppelpunkte und drei dreifache Punkte haben ohne zu zerfallen. Ein durch die letzteren und zwei der ersteren gelegter Kegelschnitt trifft sie in 13 Punkten und gehört ihr also ganz an. Die Curve löst sich also in drei Kegelschnitte auf, welche durch je fünf Fundamentalpunkte gehen, und man kommt auf den bekannten Satz, dass eine durch drei sich nicht schneidende Gerade der Fläche dritter Ordnung gelegte Fläche zweiter Ordnung die Fläche dritter Ordnung noch in drei anderen Geraden schneidet.

Eine Curve fünfter Ordnung mit 6 Doppelpunkten stellt vereinigt mit einer Geraden den vollständigen Durchschnitt dar, wenn entweder die ersten 6 Doppelpunkte in die Fundamentalpunkte fallen, oder nur fünf derselben, während die Gerade mit der Curve fünfter Ordnung sich in einem Fundamentalpunkte schneidet, oder endlich, wenn nur 4 Doppelpunkte der Curve fünfter Ordnung in Fundamentalpunkte fallen, die anderen beiden Fundamentalpunkte aber Durchschnitte der Geraden und der Curve werden. Im ersten Falle stellen ohne weiteres beide Curven Raumcurven dritter Ordnung dar. Im zweiten Fall stellt die Gerade einen Kegelschnitt dar, welcher auf der Fläche dritter Ordnung liegt; man müsste also noch eine Fundamentalgerade in dem vollständigen Durchschnitt enthalten sein lassen, damit die Curve fünfter Ordnung eine Raumcurve dritter Ordnung darstellt. Wäre der entsprechende Fundamentalpunkt nun von demjenigen verschieden, durch welchen die Gerade geht, so müsste in ihm die Curve fünfter Ordnung einen dreifachen Punkt haben, was nicht möglich ist ohne Zerfallen derselben. Fallen aber beide Fundamentalpunkte zusammen, so muss der auf der Geraden liegende dreifach, also von der Curve fünfter Ordnung noch zweimal geschnitten werden, diese hat also wieder alle Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten, wie im ersten Falle. Das Gleiche beweist man ebenso für den dritten Fall. *Es kann also eine Raumcurve dritter Ordnung dargestellt werden durch eine beliebige Gerade und durch eine Curve fünfter Ordnung, welche die Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten hat, und zwar liegen je zwei solchen verschiedenen Darstellungen entsprechende Raumcurven immer auf derselben Fläche zweiter Ordnung.*

In ähnlicher Weise zeigt man, *dass ein Kegelschnitt und eine Curve vierter Ordnung immer und nur dann zwei Raumcurven dritter Ordnung darstellen, wenn ersterer durch drei Fundamentalpunkte geht, der letztere durch dieselben und in den drei andern Doppelpunkte hat; und zwar liegen beide Raumcurven dann immer auf derselben Fläche zweiter Ordnung.*

Endlich findet man sofort, *dass eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt immer und nur dann eine Raumcurve dritter Ordnung darstellt, wenn sie durch 4 Fundamentalpunkte geht und einen fünften zum Doppelpunkt hat. Geht eine zweite durch dieselben 4 Fundamentalpunkte und hat im sechsten einen Doppelpunkt, so liegen beide Raumcurven auf einer Fläche zweiter Ordnung.*

Man erkennt hieraus, *dass es auf jeder Fläche dritter Ordnung 72 Schaaren von Raumcurven dritter Ordnung giebt, welche den 72 Hälften der*

36 Doppelsechsen entsprechen, und dass zwei Curven, die den verschiedenen Hälften derselben Doppelsechsen zugeordnet sind, immer auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen.

Jede Curve derselben Schaar schneidet nämlich sechs Gerade der Oberfläche zweimal, und soll diesen, welche einander nicht schneiden und also die Hälfte einer Doppelsechs bilden, zugeordnet heissen; sie schneidet die 6 Geraden, welche jene zu einer Doppelsechs ergänzen, gar nicht, und jede der übrigen 15 Geraden in einem Punkt. Jede Schaar enthält, wie die Gerade in der Ebene, zwei Willkürlichkeiten, und eine individuelle Curve ist also durch zwei Punkte bestimmt.

Jedem Satz in der Ebene, welcher sich nur auf die Lage der Gebilde bezieht, entspricht also ein Satz auf der Fläche dritter Ordnung, wobei an Stelle einer Geraden jedesmal eine Raumcurve dritter Ordnung zu setzen ist, welche jede einem bestimmten aber beliebig gewählten System von 6 sich nicht schneidenden Geraden zugehörige Linie zweimal trifft. So entspricht beispielsweise dem Satz vom vollständigen Vierseit folgender:

Vier beliebige Raumcurven dritter Ordnung desselben Systems schneiden sich in 6 Punkten, welche man noch durch 3 weitere Curven des Systems verbinden kann. Diese drei schneiden sich in drei Punkten; verbindet man einen derselben mit einem der ersten 6 Punkte durch eine Curve des Systems, so schneiden sich jetzt in letzterem Punkte 4 Curven, deren Tangenten einen harmonischen Büschel bilden.

§. 5.

Schnitt zweier Flächen dritter Ordnung.

Ich will noch die Durchschnittscurve der Fläche dritter Ordnung mit einer anderen Fläche dritter Ordnung discutiren, auf welche die Berliner Academie die Aufmerksamkeit der Geometer neuerdings gelenkt hat. Diese Curve ist im Allgemeinen von der neunten Ordnung und bildet sich als ebene Curve ab, welche in den 6 Fundamentalpunkten dreifache Punkte besitzt. Wenn beide Flächen sich noch $(d+r)$mal berühren, so dass in d Berührungspunkten ein Doppelpunkt, in r Berührungspunkten ein Rückkehrpunkt der Curve entsteht, so hat man die Bestimmungen:

$$N=9,\quad R=36-2d-3r,\quad K=81-6d-8r,$$
$$p=10-d-r,\quad B=r,\quad A=144-12d-15r.$$

Diese Raumcurve kann aber in mannigfacher Weise zerfallen, und zwar zunächst in eine Gerade und in eine *Raumcurve achter Ordnung.* Bildet sich die Gerade als Kegelschnitt ab, der durch fünf Fundamentalpunkte geht, so erscheint das Bild der Raumcurve achter Ordnung als Curve siebenter Ordnung, welche jene fünf Punkte zu Doppelpunkten, den sechsten aber zum dreifachen Punkt hat. Es ist also für diese Raumcurve:

$$N=8,\quad R=28-2d-3r,\quad K=60-6d-8r,$$
$$p=7-d-r,\quad R=r,\quad A=104-12d-15r.$$

Die allgemeine Raumcurve kann ferner in eine *Raumcurve siebenter Ordnung* und eine Raumcurve zweiter Ordnung zerfallen, und zwar entstehen zwei verschiedene Arten von Raumcurven siebenter Ordnung, je nachdem die Raumcurve zweiter Ordnung ein Kegelschnitt ist, oder aus zwei sich nicht schneidenden Geraden besteht.

Bildet sich im ersten Falle der Kegelschnitt als Curve dritter Ordnung ab, welche in einem Fundamentalpunkt einen Doppelpunkt hat, so wird das Bild der *Raumcurve siebenter Ordnung und erster Species* eine Curve sechster Ordnung, welche durch jenen Fundamentalpunkt geht, und die fünf anderen zu Doppelpunkten hat. Man hat also die Bestimmungen:

$$N=7,\quad R=22-2d-3r,\quad K=45-6d-8r,$$
$$p=5-d-r,\quad B=r,\quad A=76-12d-15r.$$

Im zweiten Falle kann man die beiden Geraden als Kegelschnitte abbilden. Das Bild der *Raumcurve siebenter Ordnung und zweiter Species* wird dann eine Curve fünfter Ordnung, welche durch die vier beiden Kegelschnitten gemeinsamen Fundamentalpunkte geht und in den beiden anderen Doppelpunkte hat. Es ist also:

$$N=7,\quad R=20-2d-3r,\quad K=39-6d-8r,$$
$$p=4-d-r,\quad B=r,\quad A=64-12d-15r.$$

Drittens kann sich die Raumcurve neunter Ordnung in eine Curve sechster und in eine Curve dritter Ordnung auflösen. Ist diese eine ebene, durchschneiden die beiden Flächen dritter Ordnung sich also in einer ebenen Curve dritter Ordnung, so muss der Rest ihres Durchschnitts auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, und also entweder in der oben betrachteten Raumcurve sechster Ordnung oder in einer ihrer Zerfällungen bestehen. Es ist also, wenn die Curve dritter Ordnung nicht zerfallen soll, nur noch der Fall zu untersuchen, wo ein Theil des Durchschnitts eine Raumcurve dritter Ordnung ist. Bilden wir diese als ebene Curve fünfter Ordnung ab, welche alle Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten hat, so stellt sich das Bild der übrigbleibenden *Raumcurve sechster Ordnung und zweiter Species* als Curve vierter Ordnung dar, welche durch alle Fundamentalpunkte geht. Diese Raumcurve ist *Hesse*'s *Curve der Kegelspitzen.* Für dieselbe ergeben sich die Bestimmungen:

$$N = 6, \quad R = 16-2d-3r, \quad K = 30-6d-8r,$$
$$p = 3-d-r, \quad B = r, \quad A = 48-12d-15r.$$

Wenn die Curve dritter Ordnung aus Theilen besteht, so kann sie entweder in drei sich nicht schneidende Gerade oder in Gerade und Kegelschnitt zerfallen, und zwar kann man annehmen, dass letztere sich nicht schneiden, weil der Gegenfall nur eine specielle Raumcurve dritter Ordnung liefert.

Besteht aber ein Theil des Durchschnitts zweier Flächen dritter Ordnung aus einem Kegelschnitt und einer Geraden, welche denselben nicht trifft, so kann man den Kegelschnitt als Curve dritter Ordnung abbilden, welche den Fundamentalpunkt (a) zum Doppelpunkt hat und durch die übrigen hindurchgeht; die Gerade kann dann entweder als Kegelschnitt abgebildet werden, welcher durch erstern Punkt und durch fünf der letztern geht, oder als Gerade, welche durch erstern Punkt und einen der letztern geht. Diese beiden Fälle sind aber nicht verschieden. In beiden Fällen ist der gegebene auf der Fläche liegende Kegelschnitt einer gewissen Geraden zugeordnet, und diese und die gegebene Gerade haben keine andere Bedingung zu erfüllen, als dass sie sich treffen. Wir brauchen daher nur einen Fall zu betrachten, etwa den ersten, in welchem sich die ergänzende Raumcurve sechster Ordnung als Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt abbildet. Man hat für diese *Raumcurve sechster Ordnung und dritter Species* daher folgende Bestimmungen:

$$N = 6, \quad R = 14-2d-3r, \quad K = 24-6d-8r$$
$$p = 2-d-r, \quad B = r, \quad A = 36-12d-15r.$$

Wenn endlich ein Theil des Durchschnitts aus drei einander nicht treffenden Geraden besteht, so kann man diese als Kegelschnitte abbilden, und der übrigbleibenden *Raumcurve sechster Ordnung und vierter Species* entspricht dann eine ebene Curve dritter Ordnung, welche durch die drei Fundamentalpunkte geht, in welchen sich nur zwei Kegelschnitte treffen. Man erhält sonach:

$$N = 6, \quad R = 12-2d-3r, \quad K = 18-6d-8r$$
$$p = 1-d-r, \quad B = r, \quad A = 24-12d-15r.$$

Ich komme nun zu dem schon von Hrn. *Salmon* behandelten Fall, wo die Raumcurve neunter Ordnung sich in eine Raumcurve fünfter Ordnung und in eine Curve vierter Ordnung auflöst.

Ist die Raumcurve vierter Ordnung zugleich erster Species, so kann man sie als Curve fünfter Ordnung abbilden, welche durch einen Fundamentalpunkt geht, und die fünf übrigen zu Doppelpunkten hat. Das Bild der übrigbleibenden Raumcurve fünfter Ordnung ist also eine Curve vierter Ordnung, welche durch die letzten fünf Fundamentalpunkte geht, und den ersten zum Doppelpunkt hat. Daher wird

$$N = 5, \quad R = 12 - 2d - 3r, \quad K = 21 - 6d - 8r,$$
$$p = 2 - d - r, \quad B = r, \quad A = 32 - 12d - 15r.$$

Die Curve ist nicht verschieden von der Raumcurve fünfter Ordnung und erster Species, welche mit einer Geraden zusammen den Durchschnitt einer Fläche zweiter Ordnung mit einer Fläche dritter Ordnung bildet.

Ist die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species, so kann man sie als Curve fünfter Ordnung abbilden, welche durch zwei Fundamentalpunkte geht, drei andere zu Doppelpunkten und einen zum dreifachen Punkt hat. Die *Raumcurve fünfter Ordnung und zweiter Species* (*Salmon*) bildet sich dann ab als Curve vierter Ordnung, welche durch drei Fundamentalpunkte geht und zwei zu Doppelpunkten hat. Es ist also:

$$N = 5, \quad R = 10 - 2d - 3r, \quad K = 15 - 6d - 8r,$$
$$p = 1 - d - r, \quad B = r, \quad A = 20 - 12d - 15r.$$

Zerfällt die Raumcurve vierter Ordnung, und zwar zunächst in eine Curve dritter Ordnung und eine Gerade, so muss erstere eine Raumcurve sein, weil sonst eine Gerade existiren würde, welche die Curve dritter Ordnung dreimal und noch diese Gerade träfe, also den Flächen dritter Ordnung ganz angehören müsste, so dass der Rest des Durchschnitts noch weiter zerfiele. Eine Raumcurve dritter Ordnung und eine Gerade bilden aber, wenn sie sich zweimal treffen, einen speciellen Fall der Raumcurve vierter Ordnung und erster Species, wenn sie sich einmal treffen, einen speciellen Fall einer Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Species. Es ist also nur noch der Fall zu untersuchen, wo beide Curven sich *nicht* treffen. Wird dann die Curve dritter Ordnung als Curve fünfter Ordnung abgebildet, welche alle Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten hat, so wird das Bild der Geraden ein durch fünf Fundamentalpunkte gelegter Kegelschnitt. Ferner wird das Bild der übrigbleibenden *Raumcurve fünfter Ordnung und dritter Species* (*Salmon*) ein

Kegelschnitt, welcher durch den sechsten Fundamentalpunkt geht, und man hat also, indem d, r nothwendig verschwinden, für diese Curve:

$$N = 5, \quad R = 8, \quad K = 9$$
$$p = 0, \quad B = 0, \quad A = 8.$$

Andere Zerfällungen der Raumcurve vierter Ordnung führen auf keine neuen Raumcurven fünfter Ordnung. Zwei Kegelschnitte im Raum sind, wenn sie sich in zwei Punkten treffen, ein specieller Fall einer Raumcurve vierter Ordnung und erster Species; treffen sie sich in einem Punkt, so bilden sie eine specielle Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Species. Sollen sie sich gar nicht treffen, so müssen sie derselben Geraden zugeordnet sein, und da diese dann von beiden zusammen in 4 Punkten geschnitten wird, so muss auch sie dem Durchschnitt angehören, und es bleibt für den Rest nur noch eine Curve vierter Ordnung übrig. — Besteht die Raumcurve vierter Ordnung aus einem Kegelschnitt und zwei sich nicht schneidenden Geraden, welche auch den Kegelscnitt nicht treffen, so tritt etwas ähnliches ein; beide Gerade müssen dann die dem Kegelschnitt zugeordnete Gerade treffen, die also von den verschiedenen Theilen der Raumcurve vierter Ordnung in 4 Punkten getroffen wird, und also selbst dem Durchschnitt angehören muss. Und wenn endlich die Raumcurve vierter Ordnung sich in 4 sich nicht schneidende Gerade auflöst, so enthält die übrigbleibende Raumcurve fünfter Ordnung jedenfalls die beiden Geraden, welche die vier gegebenen Geraden sämmtlich treffen.

§. 6.

Uebertragung ebener Sätze auf die Fläche dritter Ordnung.

Von allen auf einer Fläche dritter Ordnung liegenden Raumcurven scheinen diejenigen von besonderer Wichtigkeit, welche sich als Curven n^{ter} Ordnung von allgemeiner Lage abbilden, d. h. welche die 6 Fundamentalgeraden nicht schneiden. Eine solche Curve, wenn sie auf der Fläche dritter Ordnung noch d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte hat, besitzt nach §. 2 folgende charakteristische Zahlen:

$$N = 3n, \quad R = n(n+3) - 2d - 3r, \quad K = 3n^2 - 6d - 8r,$$
$$p = \frac{n-1\,.\,n-2}{2} - d - r, \quad B = r, \quad A = 6n(n-1) - 12d - 15r.$$

Die einfachsten Curven dieser Art sind erstlich Raumcurven dritter Ordnung, wie schon in §. 4 aus einander gesetzt wurde; sodann *Raumcurven sechster*

Ordnung und vierter Species, welche sich als Kegelschnitte abbilden, und für welche

$$N = 6, \quad R = 10, \quad K = 12,$$
$$p = 0, \quad B = 0, \quad A = 12.$$

Alle Curven solcher Art bilden ein System, welches den gesammten algebraischen Curven der Ebene entspricht, und welche sofort die Uebertragung der für letztere geltenden Sätze auf die Fläche dritter Ordnuug gestatten.

Ein solches System ist immer (vgl. §. 4) einer Hälfte einer Doppelsechs zugeordnet, so dass eine Curve n^{ter} Ordnung des Systems jede Gerade der zugeordneten Hälfte $2n$ mal, jede Gerade der anderen Hälfte gar nicht, die 15 übrigen Geraden aber je n mal trifft. *Es giebt also 72 solcher Systeme, deren jedes die Uebertragung von Sätzen der Ebene gestattet. Je zwei solche Systeme sind conjugirt, und je zwei Raumcurven gleich hoher Ordnung n, die conjugirten Systemen angehören, bilden den vollständigen Durchschnitt der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche $2n^{ter}$ Ordnung.*

Als Specimen will ich folgende Sätze angeben, welche sich auf eine *Raumcurve neunter Ordnung* beziehen, welche die 6 Geraden einer Hälfte einer Doppelsechs in je 6 Punkten schneidet, die Geraden der anderen Hälfte nicht, und durch die Zahlen charakterisirt ist:

$$N = 9, \quad R = 18, \quad K = 27,$$
$$p = 1, \quad B = 0, \quad A = 36.$$

In dem System, welchem die Curve angehört, giebt es 9 Raumcurven dritter Ordnung, welche die Raumcurve neunter Ordnung dreipunktig berühren. Von den 9 Berührungspunkten liegen 12mal drei auf einer neuen Raumcurve dritter Ordnung, die dem System angehört.

Die 12 neuen Raumcurven ordnen sich in 4 Tripel, und je zwei Curven eines Tripels schneiden sich in einem weiteren Punkt. Die 12 neuentstandenen Punkte bestimmen wieder 9 Raumcurven dritter Ordnung des Systems. Jede der letztern geht durch 4 jener 12 Punkte und ist einem der 9 Berührungspunkte zugeordnet; sie schneidet die Curve neunter Ordnung in 3 Punkten, und wenn man in jedem dieser Punkte die berührende Raumcurve dritter Ordnung des Systems an die Curve neunter Ordnung legt, so geht sie durch den zugeordneten Berührungspunkt. Diese 3 Berührungscurven mit der ursprünglich in jenem Punkt berührenden bilden ein System, dessen Tangenten, in dem zugeordneten Berührungspunkt gezogen, ein bestimmtes Doppelverhält-

niss haben; dies Doppelverhältniss ist in den 9 Berührungspunkten dasselbe, und gleich dem Doppelverhältniss der Tangenten der 4 Raumcurven dritter Ordnung des Systems, welche man von einem Punkte der Curve neunter Ordnung aus so legen kann, dass sie die Curve in einem andern Punkte berühren u. s. w.

Ich werde in einem andern Aufsatze weitere Anwendungen der hier niedergelegten Theorie geben. Hier will ich nur noch die besonderen Fälle kurz berühren, welche bei der Abbildung sich darbieten können.

§. 7.

Fläche dritter Ordnung mit einem Knotenpunkt.

Wenn die 6 Fundamentalpunkte in einem Kegelschnitt, oder wenn 3 derselben auf einer Geraden liegen, so ist dies immer ein Zeichen dafür, dass die Fläche dritter Ordnung einen Knotenpunkt besitzt, und zwar muss immer einer dieser beiden Fälle eintreten, damit ein Knotenpunkt existire. Ich will nur den ersten als den symmetrischen Fall als immer möglich nachweisen. Bekanntlich kann man die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung, welche den Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ zum Knotenpunkt hat, in der Form darstellen:

$$(1.)\qquad x_4 f(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

wo f eine homogene Function zweiter Ordnung, φ eine solche dritter Ordnung ist. Man kann also setzen:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = \varkappa . f(\varkappa, \lambda, \mu), \\ \varrho x_2 = \lambda . f(\varkappa, \lambda, \mu), \\ \varrho x_3 = \mu . f(\varkappa, \lambda, \mu), \\ \varrho x_4 = \varphi(\varkappa, \lambda, \mu), \end{cases}$$

was mit ersterer Gleichung äquivalent ist, und zugleich die Coordinaten als homogene Functionen dritter Ordnung der Parameter $\varkappa$, λ, μ aufweist. Die 6 Punkte nun, welche den Curven

$$\varkappa . f = 0, \quad \lambda . f = 0, \quad \mu . f = 0, \quad \varphi = 0$$

gemein sind, sind also die Schnittpunkte von $f = 0$ und $\varphi = 0$, also auf dem Kegelschnitt $f = 0$ gelegen.

Umgekehrt sind in jedem System von Curven dritter Ordnung, welches durch 6 auf einem Kegelschnitt $f = 0$ liegende Punkte gehen soll, die Curven $\varkappa . f = 0$, $\lambda . f = 0$, $\mu . f = 0$ enthalten, und diese mit einer vierten Curve $\varphi = 0$

lassen alle weiteren Curven des Systems linear aus sich zusammensetzen. Daher kann man, wenn 6 solche Fundamentalpunkte auf einem Kegelschnitt $f=0$ gegeben sind, die Coordinaten der entsprechenden Fläche immer durch die Formeln (2.) darstellen, welche auf die Gleichung (1.) zurückführen, also eine Fläche mit Knotenpunkt darstellen.

Die 6 Geraden, welche sich früher als 6 Kegelschnitte abbildeten, fallen hier in den einen Kegelschnitt $f=0$ zusammen; und da für $f=0$ immer x_1, x_2, x_3 verschwinden, so sieht man, *dass dieser Kegelschnitt nur das Bild des Knotenpunkts ist. Die* 6 *Fundamentalpunkte entsprechen den* 6 *Geraden der Fläche, welche von dem Knotenpunkte ausgehen;* 6 andere fallen aus, und die 15 übrigen sind nach wie vor durch die Verbindungslinien der 6 Fundamentalpunkte dargestellt.

Diese Geraden bilden also die Linien eines *Pascal*schen Sechsecks; und indem man bemerkt (wie unten gezeigt werden soll), dass jede Gerade, welche nicht durch die Fundamentalpunkte geht, das Bild einer ebenen Curve dritter Ordnung ist, welche die jenen Punkten entsprechenden Geraden trifft, und im Knotenpunkt der Fläche einen Doppelpunkt hat, erhält man aus Uebertragung der Sätze vom *Pascal*schen Sechseck folgende Theoreme:

Auf der Fläche dritter Ordnung mit éinem Knotenpunkt schneiden sich von den 15 Geraden, welche nicht durch den Knotenpunkt gehen, 45mal zwei in einem Punkte p.

Von den 45 Punkten p liegen 60mal drei auf einer ebenen Curve dritter Ordnung P, welche ganz in der Fläche liegt, jede der 9 Geraden, welche nicht durch einen ihrer Punkte p und nicht durch den Knotenpunkt geht, schneidet, und im Knotenpunkt selbst einen Doppelpunkt hat.

Von diesen 60 Curven P schneiden sich 20mal drei in einem Punkte g, und 60mal drei in einem Punkte h der Fläche.

Es giebt 20 Curven x gleicher Art, deren jede durch einen Punkt g und durch 3 Punkte h geht.

Diese 20 Curven x schneiden sich zu vier in 15 Punkten y.

Von den Punkten g liegen 15mal 4 auf einer weiteren Curve J derselben Art.

Die Beziehungen, welche in diesem Falle zwischen den Punkten der Fläche und denen der Ebene stattfinden, können direct durch Centralprojection dargestellt werden, bei welcher die Ebene eine beliebige, das Projectionscentrum aber der Knotenpunkt ist. Man kommt also auf die Methoden zurück, welche Herr *Chasles* zur Abbildung einer Fläche zweiter Ordnung angewandt hat.

Hat nämlich, wie vorhin, der Knotenpunkt die Coordinaten 0, 0, 0, 1, so werden die Coordinaten eines Punktes, welcher auf der Verbindungslinie des Knotenpunkts mit einem Punkte der Fläche liegt:

$$\xi_1 = \varrho x_1, \quad \xi_2 = \varrho x_2, \quad \xi_3 = \varrho x_3, \quad \xi_4 = \varrho x_4 - \sigma.$$

Soll nun der Punkt ξ in einer bestimmten Ebene liegen, als welche die nicht durch den Mittelpunkt gehende Coordinatenebene genommen werden mag, so ist $\xi_4 = 0$, also $\varrho x_4 = \sigma$. Aus der Gleichung der Fläche hat man

$$\sigma f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

daher wenn man $\frac{\varrho}{f}$ an die Stelle von σ setzt:

$$\varrho x_1 = f.\xi_1, \quad \varrho x_2 = f.\xi_2, \quad \varrho x_3 = f.\xi_3, \quad \varrho x_4 = \varphi,$$

was die Formeln (2.) sind. Es ist also in der That der dort mit $\varkappa$, λ, μ bezeichnete Punkt als Projection von x anzusehen.

Hieraus erklärt sich die obige Bemerkung, dass eine Gerade die Abbildung einer ebenen Curve dritter Ordnung ist, welche den Knotenpunkt zum Doppelpunkt hat. Es ergiebt sich aber überhaupt die Methode zur Behandlung dieser Fläche, und die Uebertragung ebener Sätze auf dieselbe. Das Gleiche gilt von noch specielleren Flächen, welche immer als besondere Fälle der vorigen anzusehen sind. Dasselbe gilt übrigens von jeder Fläche n^{ter} Ordnung mit einem Knotenpunkt, dessen Tangentenkegel von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist; so z. B. von der *Steiner*schen Fläche vierter Ordnung.

Giessen, den 22. October 1865.