

# Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale.

Von

M. TICHOMANDRITZKY in Charkow.

Nachdem Jacobi in seinen Vorlesungen über die elliptischen Transcendenten gezeigt hatte, dass die ganze Theorie der elliptischen Functionen sehr leicht aus den Eigenschaften der  $\Theta$ -Function sich entwickeln lässt, gewann die Frage nach dem natürlichsten Uebergange von den elliptischen Integralen zur  $\Theta$ -Function das grösste Interesse; und doch kannten wir bis jetzt keine gute Antwort auf dieselbe; indessen braucht man nur etwas zu dem, was die „Fundamenta“ enthalten, hinzuzufügen, um eine solche zu erhalten, wie ich sogleich zeigen werde.

Ich nehme als Ausgangspunkt die Gleichung:

$$(1) \quad Z(u+v) - Z(u-v) - 2Z(v) = - \frac{2k^2 \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \Delta \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v},$$

die man in § 53 der „Fundamenta“ findet, und die als ein Ausdruck des Additionstheorems der elliptischen Integrale 2. Gattung angesehen werden kann, denn aus dieser wird ja der gewöhnliche Ausdruck für letzteres gefunden.

Am leichtesten wird diese Gleichung durch eine einfache Umformung der Gleichung

$$(2) \quad \int_0^u [\sin^2 \operatorname{am} (u+v) - \sin^2 \operatorname{am} (u-v)] du \\ = \frac{2 \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \Delta \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}$$

erhalten, wie es Jacobi im § 49 seiner „Fundamenta“ gethan hatte; da er sich aber dort der Legendre'schen Bezeichnungsart und nicht der seinigen, die uns als eine viel bessere erscheint, bedient hatte, so mag hier mit Benutzung der letztern diese Umformung um so mehr wiedergegeben sein, als wir hiebei zum ersten Male einem Verfahren begegnen, das, nach einer gewissen Integration wiederholt, uns ganz

natürlich zur  $\Theta$ -Function führen wird. Wir multipliciren zu diesem Zwecke die Gleichung (2) beiderseits mit  $k^2$ . Sodann wollen wir ihre linke Seite folgendermassen umformen:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^u k^2 \sin^2 \operatorname{am} (u+v) du - \int_0^u k^2 \sin^2 \operatorname{am} (u-v) du \\
 &= \int_v^{u+v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw - \int_{-v}^{u-v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw \\
 &= \int_0^{u+v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw - \int_0^v k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw \\
 &\quad - \int_0^{u-v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw - \int_{-v}^0 k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw \\
 &= \int_0^{u+v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw - \int_0^{u-v} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw - 2 \int_0^v k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw, \\
 &\left( \text{indem } \int_{-v}^0 k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw = \int_0^v k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw, \text{ wie leicht zu sehen ist} \right).
 \end{aligned}$$

Wenn man nun noch zur Abkürzung

$$(3) \quad \int_0^w k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw = J(w)$$

setzt, nimmt jetzt die Gleichung (2) folgende Gestalt an:

$$(4) \quad J(u+v) - J(u-v) - 2J(v) = \frac{2k^2 \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \Delta \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v},$$

und zieht man dieselbe von der Identität:

$$\frac{J_1}{K} (u+v) - \frac{J_1}{K} (u-v) - 2 \frac{J_1}{K} v = 0,$$

wo  $J_1$  die durch die Gleichung

$$J_1 = \int_0^K k^2 \sin^2 \operatorname{am} w dw = J(K)$$

definierte Constante ist, ab, so hat man die Gleichung (1), da nach Jacobi

$$Z(w) = \frac{J_1}{K} w - J(w)$$

ist.

Die Gleichung (1) können wir nun auch so schreiben:

$$(a) \quad Z(u+v) - Z(u-v) - 2Z(v) \doteq \frac{\partial}{\partial v} \log(1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am v);$$

integriert man sie jetzt mit Somoff\*) nach  $v$  von Null an, so erhält man die Gleichung:

$$(5) \quad \int_0^v Z(u+v) dv - \int_0^v Z(u-v) dv - 2 \int_0^v Z(v) dv = \log(1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am v).$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} \int_0^v Z(u+v) dv &= \int_u^{u+v} Z(w) dw = \int_0^{u+v} Z(w) dw - \int_0^u Z(w) dw, \\ - \int_0^v Z(u-v) dv &= \int_u^{u-v} Z(w) dw = \int_0^{u-v} Z(w) dw - \int_0^u Z(w) dw; \end{aligned}$$

also kann man der Gleichung (5) folgende Gestalt geben:

$$(6) \quad \int_0^{u+v} Z(w) dw + \int_0^{u-v} Z(w) dw - 2 \int_0^u Z(w) dw - 2 \int_0^v Z(w) dw \\ = \log(1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am v),$$

und indem man vom Logarithmus zur Zahl selbst übergeht, erhält man daraus die folgende Gleichung:

$$(7) \quad \frac{e^{\int_0^{u+v} Z(w) dw} \cdot e^{\int_0^{u-v} Z(w) dw}}{\left[ e^{\int_0^u Z(w) dw} \right]^2 \cdot \left[ e^{\int_0^v Z(w) dw} \right]^2} = 1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am v.$$

In dieser Gleichung stellt jeder Factor der linken Seite den Werth einer und derselben Function

$$e^{\int_0^w Z(w) dw}$$

für die verschiedenen Werthe des Argumentes  $w$  vor. Für  $w = 0$  wird diese Function  $= 1$ ; will man aber den Anfangswerth der Function unbestimmt lassen, so muss man

$$(8) \quad e^{\int_0^w Z(w) dw} = \frac{\Theta(w)}{\Theta(0)}$$

\*) „Elemente der Theorie der Elliptischen Functionen.“ St. Petersburg 1850. S. 178. (Russisch).

setzen, was die Gleichung (6) § 52 der „Fundamenta“ ist, wo sie durch Integration der Reihe (1) § 47 für  $Z(w)$  und den nachfolgenden Uebergang vom Logarithmus zur Zahl gefunden wird, hier aber als eine natürliche Folge des Additionstheorems der Integrale 2. Gattung erscheint, was den Vortheil darbietet, dass die betreffende Reihenentwicklung mit Leichtigkeit aus den Eigenschaften der  $\Theta$ -Function gewonnen werden kann, wie es von Jacobi in seinen Vorlesungen gezeigt wurde. Durch Einführung unserer neuen Bezeichnung in die Gleichung (7) nimmt diese folgende Gestalt an:

$$(9) \quad \frac{[\Theta(0)]^2 \cdot \Theta(u+v) \cdot \Theta(u-v)}{[\Theta(u)]^2 \cdot [\Theta(v)]^2} = 1 - k^2 \sin^2 \text{am } u \sin^2 \text{am } v.$$

Somoff, welcher der erste zu sein scheint, der die Integration der Gleichung (1) nach  $v$  vorgenommen hatte, brachte die von ihm so erhaltene Gleichung (5) nicht auf die Form der Gleichung (6), sondern mit Hilfe der Gleichung (8), die von ihm nach der Methode von Jacobi erhalten war, auf die Form der Gleichung (9)\*). Es war also die Transformation der Gleichung (5) in die Gleichung (6), die der Theorie der elliptischen Functionen fehlte, damit sie schon längst im Besitze eines natürlichen Ueberganges von den elliptischen Integralen zur  $\Theta$ -Function war, und die ihrem Wesen nach dieselbe ist, die den Verfasser der „Fundamenta“ von der Gleichung (2) zur Gleichung (1) geführt hatte. Man kann die Gleichung (6) auch als eine Umformung der bekannten Gleichung

$$(10) \quad \int_0^u \int_0^v \kappa [\sin^2 \text{am}(u+v) - \sin^2 \text{am}(u-v)] \, du \, dv \\ = \log(1 - \kappa^2 \sin^2 \text{am } u \sin^2 \text{am } v)$$

ansehen\*\*), denn wenn man das durch Integration nach  $u$  erhaltene Resultat der gleich erwähnten Jacobi'schen Transformation unterwirft, so kommt man sogleich zur Gleichung (5) von Somoff, von welcher unsere Gleichung (6) eine weitere Umformung ist.

Ich will hier noch bemerken, dass man durch eine Integration derselben Gleichung (1), nur diesmal nach  $u$ , mit Hilfe derselben Transformation von selbst eine Gleichung von fundamentaler Bedeutung für die Integrale 3. Gattung:

\*) Dieses Verfahren wurde später auch von Hrn. Handrikow in seiner „Elementartheorie der elliptischen Integrale und Functionen nebst einer Anwendung auf das Fundamentalproblem der Geodäsie.“ (Moskau, 1867. Russisch), wiederholt.

\*\*) Diese Gleichung kommt explicite in den „Fundamenta“ nicht vor, erhält aber sogleich, wenn man die Gleichung (1) des § 49 daselbst mit der Gleichung (1) des § 55 vergleicht.

$$\Pi(u, v) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \Delta \operatorname{am} v \cdot \sin^2 \operatorname{am} u \, du}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v},$$

erhält, nämlich die Gleichung:

$$(11) \quad \Pi(u, v) = uZ(v) + \frac{1}{2} \int_0^{u-v} Z(w) \, dw - \frac{1}{2} \int_0^{u+v} Z(w) \, dw.$$

Vertauscht man in dieser  $u$  mit  $v$  und zieht das so erhaltene Resultat von demselben ab, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass

$\int_0^u Z(w) \, dw$  eine gerade Function ihres Argumentes ist, die Gleichung von Jacobi:

$$(12) \quad \Pi(u, v) - \Pi(v, u) = uZ(v) - vZ(u),$$

die den Satz über die Vertauschung des Parameters mit dem Argument bei den Integralen 3. Gattung ausdrückt. Setzt man jetzt andererseits in dieselbe Gleichung (11) für die Integrale rechter Hand ihre Ausdrücke durch  $\Theta$ -Functionen aus der Gleichung (8) ein, erhält man sogleich die wichtige Formel von Jacobi:

$$(13) \quad \Pi(u, v) = uZ(v) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}.$$

Wie die Eigenschaften der  $\Theta(w)$ -Functionen aus der Definitionsgleichung (8) abzuleiten sind, ist bekannt (s. z. B. den Aufsatz von Hrn. Brill: „Ueber das Additionstheorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen“. Mathemat. Ann. Bd. XVII, S. 100); darum brauche ich nicht darauf einzugehen.

Hätten wir statt der Gleichung (1) die Gleichung (4) als Ausgangspunkt genommen, so würden wir auf demselben Wege zur Definitionsgleichung der Function  $\operatorname{Al}$  von Hrn. Weierstrass:

$$e^{-\int_0^w Z(w) \, dw} = \operatorname{Al}(w)$$

gelangt sein, worauf sich wieder alle Eigenschaften dieser Function ohne Mühe entwickeln lassen.

St. Petersburg, 20. Juni 1883.