# 6.
# Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

*(Tom. XVII. p. 284.* der *Annales de mathém.* von Gergonne.)

(Vom Herrn *J. Steiner.*)

---

**Aufgabe.** „Quelle est l'ellipse la plus approchante du cercle que l'on puisse circonscrire à un quadrilatère donné?"

Auflösung. 1) Durch vier in einer Ebene liegende Puncte können nur dann Ellipsen gelegt werden, wenn jeder Punct aufserhalb des Dreiecks liegt, welches durch die drei übrigen bestimmt wird.

2) Alle Kegelschnitte, welche durch die nemlichen vier Puncte gehen, haben zusammen ein System conjugirter Durchmesser, welche mit einander parallel sind.

3) Von allen Paaren conjugirter Durchmesser einer Ellipse bilden die beiden gleichen unter sich den kleinsten Winkel, und

4) Die Ellipse kommt dem Kreise um so näher, je mehr sich das Verhältnifs ihrer Axen der Einheit, oder je mehr sich der Winkel ihrer gleichen conjugirten Durchmesser dem rechten Winkel nähert, weil, wenn $a$, $b$ die Axen und $\alpha$ der Winkel der genannten Durchmesser der Ellipse ist, $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ ist.

5) Daraus folgt, „dafs die gesuchte Ellipse diejenige ist, deren gleiche conjugirte Durchmesser zu dem System der parallelen Durchmesser (2.) gehören." Denn bei jeder anderen Ellipse, bei welcher die beiden conjugirten Durchmesser, die zu dem Parallelsystem gehören, nicht gleich sind, bilden die beiden gleichen conjugirten Durchmesser einen kleineren Winkel als jene (3.), und folglich weicht die Ellipse mehr vom Kreise ab (4.) als die genannte.

Zu dem vorhin angeführten bekannten Satze, über die parallelen conjugirten Durchmesser, lassen sich folgende Zusätze hinzufügen.

Alle

Alle Kegelschnitte, welche durch vier gegebene Puncte gehen, haben ein System conjugirter Durchmesser, die parallel sind, und ihre Mittelpuncte liegen in der Peripherie eines anderen bestimmten Kegelschnitts *K*. Dieses ist bekannt.

Da nun, wenn die vier Puncte die in (1.) angegebene Lage haben, unter der Schaar Kegelschnitte, welche durch dieselben gehen, sich immer zwei Parabeln befinden, und da ferner bei der Parabel von irgend zwei conjugirten Durchmessern immer der eine mit der Axe parallel ist, so folgt, dafs die Axen der beiden genannten Parabeln mit den, zu dem Parallelsystem gehörigen conjugirten Durchmessern parallel sind; und da der Mittelpunct der Parabel unendlich weit entfernt ist, so folgt ferner, dafs der genannte Kegelschnitt *K* nothwendig eine Hyperbel ist, deren Asymptoten mit den Axen der beiden Parabeln parallel sein müssen. Daher folgt:

„Dafs alle Kegelschnitte, die durch vier gegebene Puncte gehen, welche die in (1.) angegebene Lage haben, ein System conjugirter Durchmesser haben, die parallel sind, und dafs ihre Mittelpuncte in einer bestimmten Hyperbel liegen, deren Asymptoten ebenfalls mit jenen conjugirten Durchmessern parallel sind."

Berlin, im Mai 1827.