7.

Über die Differentialgleichung, welcher die Reihen

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \text{etc.},$$
$$2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \text{etc.}$$

Genüge leisten.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi.*)

Die Aufgabe, eine gegebene Function durch eine Differentialgleichung zu definiren, ist im Allgemeinen eine unbestimmte, weil man mittelst der Gleichung, welche zwischen der Function und der unabhängigen Variable Statt findet, die Differentialgleichung auf unendlich viel Arten abändern kann. Aber diese Aufgabe wird bestimmt, wenn die Function keine algebraische ist, die Differentialgleichung aber, wie stillschweigend vorausgesetzt zu werden pflegt, eine algebraische Gleichung zwischen der unabhängigen Variable, der Function und ihren Differentialquotienten sein soll. Unter allen Differentialgleichungen dieser Art, welchen dieselbe Function Genüge leistet, wird eine die niedrigste Ordnung haben, und die übrigen durch Differentiation ergeben. Von dieser soll allein im Folgenden die Rede sein, wenn man von der Differentialgleichung spricht, welcher eine Function Genüge leistet. Macht man diese Gleichung rational und befreit den Ausdruck, welcher $=0$ wird, von Brüchen, so bestimmt die Dimension, auf welche der höchste Differentialquotient in diesem Ausdrucke steigt, den *Grad* der Differentialgleichung.

Es giebt aber im Allgemeinen kein Mittel, um zu erkennen, ob es eine solche endliche Differentialgleichung zwischen der Function und der unabhängigen Variable giebt, oder wenn man irgend woher wüfste, dafs es eine solche giebt, um dieselbe aufzufinden. Nur wenn die Function einer *linearen* Differentialgleichung Genüge leistet, hat man einige allgemeine Vorschriften, dieses zu erkennen, und die Differentialgleichung selber zu bilden. Wenn man z. B. die Reihe

$$y = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \text{etc.}$$

betrachtet, deren Bildungsgesetz so einfach ist, so giebt es doch trotz dieser Einfachheit kein Mittel, um *aus der Natur dieser Reihe selber* zu erkennen, ob sie durch eine endliche Differentialgleichung, d. h. durch eine algebraische

Gleichung zwischen ihr selbst, der unabhängigen Variable und ihren Differentialquotienten definirt werden kann. Und wenn es möglich ist, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen eine solche Differentialgleichung zu finden, wie complicirt und indirect sind die dazu nöthigen Betrachtungen! Man mufs zuerst zeigen, dafs man die beiden Gröfsen y und q durch eine dritte Variable k mittelst der transcendenten Gleichungen,

$$y = \sqrt{\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\right\}},$$

$$\log\frac{1}{q} = \frac{\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi)}}}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}}$$

ausdrücken kann. Wie sehr man auch bei der Mannigfaltigkeit der Methoden, welche die Theorie der elliptischen Functionen darbietet, den Beweis dieses merkwürdigen Theorems abkürzen mag, so wird derselbe doch immer eine lange Kette subtiler Schlüsse erfordern. Man zeigt dann, dafs der Zähler sowohl wie der Nenner des für $\log\frac{1}{q}$ angegebnen Ausdrucks einer und derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher k die unabhängige Variable ist, genügen. Durch diesen Umstand wird es möglich, den Differentialquotient $\frac{\partial \log q}{\partial k}$ durch y und k auszudrücken, wodurch es ferner möglich wird, in der zwischen y und k Statt findenden Differentialgleichung zweiter Ordnung die nach k genommnen Differentialquotienten von y durch andere nach $\log q$ genommene zu ersetzen. Man gewinnt hierdurch eine Gleichung, aus welcher man k durch y und seine nach $\log q$ genommenen Differentialquotienten bestimmen kann. Durch eine neue Differentiation endlich erhält man mittelst Elimination von k eine blofs zwischen y und seinen nach q genommenen Differentialquotienten Statt findende Gleichung dritter Ordnung und zweiten Grades, welche die verlangte Differentialgleichung ist. Diese Differentialgleichung steigt in Bezug auf y und seine Differentialquotienten bis auf die *vierzehnte Dimension*, und sie dürfte daher trotz aller unserer Kenntnisse von den quadratischen Formen durch die unmittelbare Substitution der Reihe schwer zu beweisen sein. Ich will jetzt die etwas beschwerliche Rechnung näher angeben, durch welche man zu dieser Differentialgleichung gelangen kann, deren Complication in einem merkwürdigen Gegensatz zu der Einfachheit der Reihe steht, welche ihr genügt.

Die Substitution

$$\cos\psi = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta}, \qquad \sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta}, \qquad \sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)} = \frac{k'}{\Delta},$$

in welcher

$$k' = \sqrt{(1-k^2)}, \qquad \Delta = \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}$$

ist, giebt

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}} = \frac{d\varphi}{\Delta},$$

und daher die Gleichungen

$$1. \quad \begin{cases} \int \Delta\, d\varphi = k'^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta^3}, \\ \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}, \\ \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = k'^2 \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}, \end{cases}$$

wo die Integrale, so wie auch im Folgenden immer, von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnt gedacht werden. Bezeichnet man das ganze Integral der ersten Gattung mit

$$K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}},$$

so hat man

$$kK = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-\sin^2\varphi\right)}}, \qquad k'K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi\right)}}.$$

Die Differentiation dieser drei Integrale nach k^2 ergiebt, wenn man die Formeln (1.) zu Hülfe nimmt, die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial K}{\partial\cdot k^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2k'^2}\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\partial\cdot kK}{\partial\cdot k^2} = \frac{1}{2k}\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2kk'^2}\int \Delta\, d\varphi,$$

$$\frac{\partial\cdot k'K}{\partial\cdot k^2} = -\frac{1}{2k'}\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} = -\frac{1}{2k'}\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}.$$

Die letztere erhält man leicht, wenn man bemerkt, dafs $\partial.k^2 = -\partial.k'^2$.

Es ist ferner, wenn man wieder die Gleichungen (1.) zu Hülfe ruft,

$$\frac{\partial\cdot\int \frac{k^2\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}}{\partial\cdot k^2} = \frac{\partial\cdot\int \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\left(\frac{1}{\Delta}-\Delta\right)d\varphi}{\partial\cdot k^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos^2\varphi}{\Delta}+\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\partial\int \frac{1}{k}\Delta\, d\varphi}{\partial\cdot k^2} = \frac{\partial\cdot\int \sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-\sin^2\varphi\right)}d\varphi}{\partial\cdot k^2} = -\frac{1}{2k^3}\int \frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\partial\int\frac{k^2}{k'}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta}}{\partial\cdot k^2} = \frac{\partial\int\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi\right)}}}{\partial\cdot k'^2} - \frac{\partial\int\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi\right)}d\varphi}{\partial\cdot k'^2}$$

$$= \frac{1}{2k'^3}\int\left\{\frac{k'^2\sin^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta^3}+\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta}\right\} = \frac{1}{2k'^3}\int\frac{\partial\varphi}{\varDelta}.$$

Setzt man daher

$$K = \tfrac{1}{2}\pi\cdot A, \quad kK = \tfrac{1}{2}\pi\cdot A_1, \quad k'K = \tfrac{1}{2}\pi\cdot A_2,$$

ferner

$$k^2\int\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot B,$$

$$\frac{1}{k}\int\varDelta\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi\cdot B_1,$$

$$\frac{k^2}{k'}\int\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\varDelta} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot B_2,$$

so wird

$$2.\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial\cdot k^2} = \frac{1}{2k^2k'^2}B, &&\frac{\partial B}{\partial\cdot k^2} = \tfrac{1}{2}A;\\
&\frac{\partial A_1}{\partial\cdot k^2} = \frac{1}{2k'^2}B_1, &&\frac{\partial B_1}{\partial\cdot k^2} = -\frac{1}{2k^4}A_1;\\
&\frac{\partial A_2}{\partial\cdot k^2} = -\frac{1}{2k^2}B_2, &&\frac{\partial B_2}{\partial\cdot k^2} = \frac{1}{2k'^4}A_2.
\end{aligned}\right.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dafs A der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial\cdot k^2k'^2\frac{\partial A}{\partial\cdot k^2}}{\partial\cdot k^2} = \tfrac{1}{4}A,$$

oder, wenn man der Kürze halber

$$\frac{\partial\cdot k^2}{k^2k'^2} = \partial\log\frac{k^2}{k'^2} = \partial l$$

setzt, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial l^2} = \tfrac{1}{4}k^2k'^2 A$$

Genüge leistet. Diese Differentialgleichung bleibt unverändert, wenn man k in k' verändert. Es ist daher auch

$$K' = \int\frac{d\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)}$$

ein Integral derselben. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 A}{\partial l^2} = \tfrac{1}{4}k^2 k'^2 A, \qquad \frac{\partial^2 K'}{\partial l^2} = \tfrac{1}{4}k^2 k'^2 K'$$

folgt

$$A\frac{\partial^2 K'}{\partial l^2} - K'\frac{\partial^2 A}{\partial l^2} = 0,$$

und durch Integration

$$A\frac{\partial K'}{\partial l} - K'\frac{\partial A}{\partial l} = \alpha,$$

wo α eine Constante ist. Diese Gleichung kann man auch so darstellen,

$$\frac{\partial\cdot\frac{K'}{A}}{\partial l} = \frac{\alpha}{A^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\cdot\frac{K'}{A}}{\partial\cdot k^2} = \frac{\alpha}{k^2 k'^2\cdot A^2}.$$

Der Bruch $\frac{1}{k'^2 A^2} = \frac{\pi^2}{4k'^2 K^2}$ läfst sich für kleine Werthe von k in eine nach den ganzen positiven Potenzen von k^2 fortschreitende, mit der Einheit beginnende Reihe entwickeln, woraus durch Integration folgt, dafs der Werth von $\frac{K'}{A} = \frac{\pi K'}{2K}$ für kleine Werthe von k bis auf Gröfsen von der Ordnung k^2 genau

$$\alpha \log k^2 + \beta$$

ist, wo β eine neue Constante bedeutet. Die Werthe von α und β hat *Euler* in den „Opusculis varii argumenti" $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \log 4$ gefunden. Substituirt man den Werth von α, und setzt

$$\log q = -\frac{\pi K'}{K} = -2\frac{K'}{A},$$

so erhält man

$$3. \qquad \frac{\partial \log q}{\partial\cdot k^2} = \frac{1}{k^2 k'^2 A^2} = \frac{1}{k'^2 A_1^2} = \frac{1}{k^2 A_2^2},$$

oder auch

$$3^*. \qquad \frac{\partial \log \frac{k^2}{k'^2}}{\partial \log q} = A^2, \qquad \frac{\partial \log \frac{1}{k'^2}}{\partial \log q} = A_1^2, \qquad \frac{\partial \log k^2}{\partial \log q} = A_2^2.$$

Wenn man mittelst der Formeln (3.) statt des Differentials $\partial\cdot k^2$ das Differential $\partial \log q$ einführt, so werden die Formeln (2.):

$$4. \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}BA^2, & \dfrac{\partial B}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}k^2 k'^2 A^3; \\[2ex] \dfrac{\partial A_1}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}B_1 A_1^2, & \dfrac{\partial B_1}{\partial \log q} = -\tfrac{1}{2}\dfrac{k'^2}{k^4}A_1^3; \\[2ex] \dfrac{\partial A_2}{\partial \log q} = -\tfrac{1}{2}B_2 A_2^2, & \dfrac{\partial B_2}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{k'^4}A_2^3. \end{cases}$$

Man hat daher, wenn man

$$A = \frac{1}{C}, \quad A_1 = \frac{1}{C_1}, \quad A_2 = \frac{1}{C_2}$$

setzt, und die nach $\log q$ genommenen Differentialen der Functionen C mit obern Indices bezeichnet,

$$5. \quad 4C^3C'' = -k^2k'^2, \quad 4C_1^3C_1'' = \frac{k'^2}{k^4}, \quad 4C_2^3C_2'' = -\frac{k^2}{k'^4}.$$

Ich bemerke jetzt, dafs wenn man in dem Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(4h+1)}-1}{\sqrt{(4h+1)}+1}$$

für h die drei vorstehenden Gröfsen

$$-k^2k'^2, \quad \frac{k^2}{k^4}, \quad \frac{k^2}{k'^4}$$

setzt, die drei Gröfsen

$$-\frac{k^2}{k'^2}, \quad k'^2, \quad k^2$$

erhalten werden. Dies sind zufolge (3*.) die Gröfsen, deren Logarithmen differentiirt die Differentiale $A^2\partial\log q$, $-A_1^2\partial\log q$, $A_2^2\partial\log q$ oder

$$\frac{\partial\log q}{C^2}, \quad -\frac{\partial\log q}{C_1^2}, \quad \frac{\partial\log q}{C_2^2}$$

geben. Es ist aber

$$\partial\log\frac{\sqrt{(4h+1)}-1}{\sqrt{(4h+1)}+1} = \frac{\partial h}{h\sqrt{(4h+1)}} = \frac{\partial\log h}{\sqrt{(4h+1)}}.$$

Substituirt man daher in $\frac{\partial\log h}{\sqrt{(4h+1)}}$ für h die drei Werthe (5.), so erhält man

$$\frac{\partial\log q}{C^2}, \quad \frac{-\partial\log q}{C_1^2}, \quad \frac{\partial\log q}{C_2^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs für alle drei Gröfsen C, C_1, C_2 dieselbe Differentialgleichung

$$6. \quad \partial\log\cdot C^3C'' = \sqrt{(16C^3C''+1)}\frac{\partial\log q}{C^2}$$

Statt findet, nur dafs man, wenn man C_1 für C setzt, die Quadratwurzel negativ zu nehmen hat. Macht man diese Gleichung rational, so ergiebt sich für alle drei Functionen

$$C = \frac{\pi}{2K}, \quad C_1 = \frac{\pi}{2kK}, \quad C_2 = \frac{\pi}{2k'K}$$

dieselbe Differentialgleichung dritter Ordnung und zweiten Grades,

$$7. \quad C^2(CC'''+3C'C'')^2 = C''^2(16C^3C''+1).$$

Wenn man

$$C = y^{-2}$$

setzt, und die nach $\log q$ genommenen Differentialquotienten von y wieder durch obere Indices bezeichnet, so erhält man nach einander

$$C' = -2y^{-3}y', \qquad C'' = -2y^{-3}y'' + 6y^{-4}y'^2,$$
$$C''' = -2y^{-3}y''' + 18y^{-4}y'y'' - 24y^{-5}y'^3,$$

und daher

$$CC''' + 3C'C'' = -2y^{-5}y''' + 30y^{-6}y'y'' - 60y^{-7}y'^3.$$

Es verwandelt sich daher die Differentialgleichung (7.), wenn man noch mit $\frac{1}{4}y^{18}$ multiplicirt, in die folgende Differentialgleichung zwischen y und q,

8. $$(y^2y''' - 15yy'y'' + 30y'^3)^2 + 32(yy'' - 3y'^2)^3 = y^{10}(yy'' - 3y'^2)^2.$$

In dieser Gleichung kann y, den drei Werthen von C entsprechend, jede der drei Functionen $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$ bedeuten. Wenn man daher die aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten, nach den Potenzen von q fortschreitenden Reihenentwicklungen dieser Functionen einführt, so erhält man das folgende Theorem:

Theorem.

Es bedeute y ***eine der drei Reihen***

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + 2q^{16} \pm 2q^{25} + \text{etc.},$$
$$2\{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \sqrt[4]{q^{49}} + \text{etc.}\},$$

so findet zwischen y ***und*** q ***die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung und zweiten Grades Statt, in welcher*** $d\log q$ ***als das constante Differential angenommen ist,***

$$\{y^2d^3y - 15y\,dy\,d^2y + 30dy^3\}^2 + 32\{y\,d^2y - 3dy^2\}^3$$
$$= y^{10}\{y\,d^2y - 3dy^2\}^2(d\log q)^2.$$

Die beiden der vorstehenden Differentialgleichung genügenden Reihen

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

$$1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

werden aus einander durch Veränderung von q in $-q$ erhalten. Allgemeiner kann man, da die Differentialgleichung (8.) nur die nach $\log q$ genommenen Differentiale und nicht q selber enthält, aus jedem für y gefundenen Ausdruck einen andern, welcher derselben Differentialgleichung Genüge leistet, erhalten, wenn man αq statt q setzt, wo α eine beliebige Constante bedeutet. Wenn man in der Reihe

$$2\sqrt[4]{q}\{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\text{etc.}\} = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},$$

welche ebenfalls der Differentialgleichung (8.) genügt, die Variable q in $-q$ verwandelt, oder $\alpha = -1$ setzt, so wird diese Reihe mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt. Die Differentialgleichung (8.) mufs daher so beschaffen sein, dafs sie unverändert bleibt, wenn man y mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt, oder es müssen in den verschiedenen Termen der Gleichung (8.) die Unterschiede ihrer Dimensionen in Bezug auf y und seine Differentialquotienten durch 8 theilbar sein. Dies ist auch in der That der Fall, da in Bezug auf y und seine Differentialquotienten die Terme links vom Gleichheitszeichen in der Gleichung (8.) von der 6ten, die Terme rechts vom Gleichheitszeichen von der 14ten Dimension sind.

Die Gleichung

$$\partial \log q = \frac{\partial \cdot k^2}{k^2 k'^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2} = \frac{\partial \cdot k^2}{k^2 k'^2 y^4}$$

bleibt unverändert, wenn man q in q^m und gleichzeitig y in $\frac{y}{\sqrt[4]{m}}$ (oder C in $\sqrt{m}C$) ändert. Hieraus folgt, ***dafs aus jeder gegebenen Function, welche der Differentialgleichung* (8.) *Genüge leistet, eine andere erhalten wird, welche derselben Differentialgleichung genügt, wenn man die gegebene Function mit* $\sqrt[4]{m}$ *multiplicirt und gleichzeitig* q *in* q^m *ändert.*** Es mufs daher in jedem Term der Differentialgleichung (8.) die Summe der Ordnungen der einzelnen Differentialquotienten weniger dem 4ten Theile seiner in Bezug auf y und die Differentialquotienten von y gemefsnen Dimension die gleiche Zahl geben, oder in je zwei verschiednen Termen die Differenz der Summe der Ordnungen der Differentialquotienten gleich dem vierten Theile des Unterschiedes ihrer Dimensionen sein. In der That ist in (8.) der 4te Theil des Unterschiedes der Dimensionen der Terme rechts und links vom Gleichheitszeichen $\frac{1}{4}(14-6)=2$ und der Unterschied der Summe der Ordnungen ihrer Differentialquotienten ebenfalls $6-4=2$.

In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird gezeigt, dafs durch die Änderung von q in q^m, wenn m eine beliebige rationale Zahl ist, das ganze elliptische Integral K und daher auch $C=\frac{\pi}{2K}$ mit einem Factor, welcher eine algebraische Function von k ist, multiplicirt wird. Bedeutet daher g einen solchen Factor, so mufs dem Vorhergehenden zufolge der Differentialgleichung (7.), welcher C genügt, auch die Function $\frac{gC}{\sqrt{m}}$ genügen. Es giebt daher unendlich viele Fälle, in welchen zwei Integrale der Differentialgleichung (7.) aus einander durch Multiplication mit einer algebraischen Function von k erhalten werden. Wenn allgemein f einen Factor von der Beschaffenheit bedeutet, dafs $fC=\frac{\pi f}{2K}$ wieder ein Integral der Differentialgleichung (7.) wird, welcher C genügt, so findet man die zwischen diesem Factor f und dem Modul k bestehende Differentialgleichung auf folgende Art.

Die zwischen den Gröfsen C und q Statt findende Differentialgleichung (7.) wurde durch Elimination von $k^2k'^2$ aus den Gleichungen

$$4C^3C'' = -k^2k'^2, \qquad \frac{\partial \log - k^2k'^2}{\sqrt{(1-4k^2k'^2)}} = \frac{\partial \log q}{C^2}$$

abgeleitet. Die letztere Gleichung folgt aus der Gleichung $\partial \log \frac{k^2}{k'^2} = \partial l = \frac{\partial \log q}{C^2}$. Diese giebt für eine beliebige Function u,

$$C^2u' = C^2\frac{\partial u}{\partial \log q} = \frac{\partial u}{\partial l}.$$

Setzt man

$$D = f.C,$$

und bezieht die obern Indices von D und f, ebenso wie die von y, C und u auf die Differentiation nach $\log q$, so wird

$$D'' = fC''+2f'C'+f''C.$$

Man hat daher

$$\begin{aligned} 4D^3D'' &= -4f^4k^2k'^2+4f^3C^2\frac{\partial.C^2f'}{\partial \log q} \\ &= -4f^4k^2k'^2+4f^3\frac{\partial^2 f}{\partial l^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial l}{f^2} = \frac{\partial \log q}{D^2}.$$

Setzt man den Ausdruck

$$9. \qquad -4f^4k^2k'^2+4f^3\frac{\partial^2 f}{\partial l^2} = H,$$

und denkt sich die Function f so bestimmt, dafs

$$10.\qquad \frac{\partial \log H}{\sqrt{(4H+1)}} = \frac{\partial l}{f^2},$$

so hat man die beiden Gleichungen

$$11.\qquad 4D^3D'' = H,\quad \frac{\partial \log H}{\sqrt{(4H+1)}} = \frac{\partial \log q}{D^2}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Gröfse H, so erhält man dieselbe Differentialgleichung zwischen D und q, welche zwischen C und q gefunden worden ist. Wenn man andrerseits aus (9.) den Werth von H in (10.) substituirt, so erhält man eine Differentialgleichung 3ter Ordnung zwischen f und k. Setzt man in dieser Differentialgleichung $l = \log k_1$ oder

$$\frac{k^2}{k'^2} = k_1,$$

so wird dieselbe,

$$12.\qquad k_1^2 f^4 \left(\frac{\partial H}{\partial k_1}\right)^2 = H^2 + 4H^3,$$

wo zufolge (9.) die Gröfse H den Ausdruck

$$13.\qquad 4k_1^2 f^3 \frac{\partial^2 f}{\partial k_1^2} + 4k_1 f^3 \frac{\partial f}{\partial k_1} - \frac{4k_1 f^4}{(1+k_1)^2} = H$$

bedeutet.

So wie die Function $D = \frac{\pi f}{2K}$ ein Integral der Gleichung (7.) wurde, wenn f ein beliebiges Integral der Gleichung (12.) ist, so wird auch umgekehrt $f = \frac{2K}{\pi} D$ ein Integral der Gleichung (12.), wenn D ein beliebiges Integral der Gleichung (7.) ist. Setzt man nämlich $4D^3D'' = H$, so verwandelt sich die Gleichung (7.), welcher D genügt, in die Gleichung (10.). Bestimmt man dann f durch die Gleichung $D = \frac{\pi f}{2K} = fC$, so erhält man durch zweimalige Differentiation für H den Werth (9.), und wenn man diesen in die Gleichung (10.) substituirt, die Differentialgleichung (12.).

Aus den Gleichungen (3*.) und (5.) ergiebt sich, dafs man, ohne dafs $\partial \log q$ und die Gleichung (7.) sich ändert, für $-\frac{k^2}{k'^2}$ die Gröfsen $\frac{1}{k'^2}$ und k^2 setzen kann, wenn man gleichzeitig K in kK und $k'K$ ändert. Bedeutet daher $f(k_1)$ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (12.), so wird nicht nur $\frac{\pi}{2K} f\left(\frac{k^2}{k'^2}\right)$, sondern es werden auch die Functionen $\frac{\pi}{2kK} f\left(-\frac{1}{k'^2}\right)$, $\frac{\pi}{2k'K} f(-k^2)$

Integrale der Gleichung (7.) werden. Umgekehrt werden, wenn D ein beliebiges Integral der Gleichung (7.) ist, die Functionen $\frac{2K}{\pi}D$, $\frac{2kK}{\pi}D$, $\frac{2k'K}{\pi}D$ Integrale der Gleichung (12.), je nachdem in letzterer k_1 die Gröfsen $\frac{k^2}{k'^2}$, $-\frac{1}{k'^2}$, $-k^2$ bedeutet.

Der Differentialgleichung (12.) genügen unendlich viel algebraische Werthe von f, welche nur um einen Zahlenfactor von den Werthen verschieden sind, die der in der Theorie der Transformation der elliptischen Integrale vorkommende Multiplicator M für die verschiednen Transformationen annimmt. Kennt man die algebraische Gleichung zwischen dem gegebnen Modul k und dem transformirten λ, so wird das Quadrat dieses Multiplicators rational durch k und λ vermittelst der allgemeinen Formel

$$14. \qquad M^2 = \frac{(\lambda-\lambda^3)\partial k}{n(k-k^3)\partial\lambda}$$

gegeben, wo n die Ordnung der Transformation bedeutet. Aufserdem findet zwischen den nach k genommnen ersten beiden Differentialquotienten von M und dem ersten von λ noch die Differentialgleichung

$$15. \qquad M\left\{(k-k^3)\frac{\partial^2 M}{\partial k^2}+(1-3k^2)\frac{\partial M}{\partial k}-kM\right\}+\frac{\lambda\partial\lambda}{n\partial k} = 0$$

Statt. In den *Fund. N.* (pag. 77) ist aus den beiden Gleichungen (14.) und (15.) durch Elimination von M die zwischen je zwei Moduln, welche in einander transformirt werden können, bestehende Differentialgleichung 3ter Ordnung gefunden worden. Wenn man aber aus denselben beiden Differentialgleichungen statt M den transformirten Modul λ eliminirt, so erhält man für $\sqrt{n}.M$ dieselbe Differentialgleichung, wie oben für f gefunden worden, welche von der Ordnung der Transformation unabhängig ist. Es können nämlich die beiden Gleichungen (14.) und (15.), wenn man $\lambda'^2 = 1-\lambda^2$, $l = \log\frac{k^2}{k'^2}$ setzt, durch folgende beide ersetzt werden:

$$16. \qquad \begin{cases} n^2\left\{-4M^4k^2k'^2+4M^3\dfrac{\partial^2 M}{\partial l^2}\right\} = -\lambda^2\lambda'^2, \\ \partial\log\dfrac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \dfrac{\partial\log.-\lambda^2\lambda'^2}{\sqrt{(1-4\lambda^2\lambda'^2)}} = \dfrac{\partial l}{nM^2}. \end{cases}$$

Da nun, wenn man

$$H = -\lambda^2\lambda'^2, \qquad f = \sqrt{n}.M$$

setzt, die Gleichungen (9.) und (10.) mit den Gleichungen (16.) übereinkommen, so werden die Functionen $\sqrt{n}.M$ Integrale der zwischen f und $k_1=\frac{k^2}{k'^2}$ bestehenden Differentialgleichung (12.), und zwar algebraische Integrale dieser Gleichung.

Die für C und y oben aufgestellten Differentialgleichungen sind aus der lineären Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren besondere Integrale K und K' sind, in Verbindung mit der Gleichung

$$\partial \log q = \partial \cdot \frac{-\pi K'}{K} = \frac{\partial . k^2}{k^2 k'^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}$$

erhalten worden. Setzt man für K und K' zwei vollständige Integrale der erstern,

$$Q = aK + \sqrt{-1}\, bK', \qquad Q' = a'K' + \sqrt{-1}\, b'K,$$

so wird

$$\partial \cdot \frac{-\pi Q'}{Q} = \frac{(aa'+bb')\partial \cdot k^2}{k^2 k'^2 \left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2}.$$

Hieraus folgt, dafs man in den zwischen K, k und q aufgestellten Differentialgleichungen für K und $\log q$ auf die allgemeinste Art die Gröfsen $\frac{Q}{\sqrt{(aa'+bb')}}$ und $-\frac{\pi Q'}{Q}$ setzen kann. ***Es wird daher das vollständige Integral der Differentialgleichungen*** (7.) ***und*** (8.) ***durch das System der beiden Gleichungen***

$$17. \quad \begin{cases} C^{-\frac{1}{2}} = y = \sqrt{\dfrac{\frac{2}{\pi}(aK+\sqrt{-1}\, bK')}{\sqrt{(aa'+bb')}}}, \\ \log q = -\dfrac{\pi(a'K'+\sqrt{-1}\, b'K)}{aK+\sqrt{-1}\, bK'} \end{cases}$$

gegeben, wo a, b, a', b' willkürliche Constanten bedeuten, und die Gröfsen K und K' gegebne Functionen einer dritten Gröfse k sind, nämlich die ganzen elliptischen Integrale erster Gattung für die Moduln k und $\sqrt{(1-k^2)}$.

Setzt man

$$-\frac{K'}{K} = r,$$

woraus

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \text{etc.}$$

folgt, so erhält man aus der letzten der beiden vorstehenden Gleichungen (17.),

$$\log q = \frac{\pi(a'r - \sqrt{-1}\, b')}{a - \sqrt{-1}\, br},$$

und daher

$$r = \frac{a\log q+\sqrt{-1}\,b'\pi}{a'\pi+\sqrt{-1}\,b\log q}, \qquad a-\sqrt{-1}\,br = \frac{(aa'+bb')\pi}{a'\pi+\sqrt{-1}\,b\log q}.$$

Der vollständige Werth von y, durch r ausgedrückt, wird

$$y = \sqrt{\frac{a-\sqrt{-1}\,br}{\sqrt{(aa'+bb')}}}\cdot\{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\text{etc.}\}.$$

Wenn man in diesen Formeln a, b, a', b' statt $\frac{a}{\sqrt{(aa'+bb')}}$, $\frac{b}{\sqrt{(aa'+bb')}}$, $\frac{a'}{\sqrt{(aa'+bb')}}$, $\frac{b'}{\sqrt{(aa'+bb')}}$ und

$$q = e^{\pi\varrho}, \qquad \log q = \pi\varrho$$

setzt, so erhält man das folgende

Theorem.

„Die Reihe

$$y = 1+2e^{\pi\varrho}+2e^{4\pi\varrho}+2e^{9\pi\varrho}+\text{etc.}$$

genügt der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\{y^2d^3y-15y\,dy\,d^2y+30\,dy^3\}^2+32\{y\,d^2y-3\,dy^2\}^3 = y^{10}\{y\,d^2y-3\,d^2y\}^2\pi^2d\varrho^2,$$

in welcher $d\varrho$ das beständige Differential ist, und es wird das vollständige Integral dieser Differentialgleichung,

$$y = \frac{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\text{etc.}}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}},$$

wo

$$r = \frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}$$

ist, und a, a', b, b' willkürliche Constanten bedeuten, für welche

$$aa'+bb' = 1$$

ist."

Man kann das vorstehende Theorem aus dem ersten oben gegebnen Theorem ableiten, wenn man beweist,

dafs, wenn $y = f(\varrho)$, *wo* $\pi\varrho = \log q$, *ein beliebiges particuläres Integral der Differentialgleichung* (8.) *bedeutet, und man* $r = \frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}$ *setzt, wo* $aa'+bb' = 1$, *die Function*

$$y = \frac{f(r)}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}}$$

das vollständige Integral der Differentialgleichung (8.) *ist.*

Man zeigt dieses leicht auf folgende Art.

Die Differentialgleichung (8.) verwandelt sich, wenn man $y = C^{-\frac{1}{2}}$ setzt, in die Differentialgleichung (7.), welche, wie wir gesehen haben, aus dem Systeme zweier Gleichungen,

$$4C^3C'' = H, \quad \frac{\partial \log H}{\sqrt{(1+4H)}} = \frac{\partial \log q}{C^2},$$

durch Elimination von H hervorgeht. Setzt man $\log q = \pi\varrho$, und für C ein beliebiges particuläres Integral der Differentialgleichung (7.),

$$C = \varphi(\varrho) = \{f(\varrho)\}^{-2},$$

so werden die beiden vorstehenden Gleichungen, wenn man sich der *Lagrange*-schen Bezeichnungsart der Differentialquotienten bedient,

$$4\varphi(\varrho)^3\varphi''(\varrho) = \pi^2 H, \quad \frac{\partial \log H}{\sqrt{(1+4H)}} = \frac{\pi\partial\varrho}{\varphi(\varrho)^2}.$$

Schreibt man r für ϱ, so werden auch zwei Gleichungen von der Form

$$4\varphi(r)^3\varphi''(r) = \pi^2 H_1, \quad \frac{\partial \log H_1}{\sqrt{(1+4H_1)}} = \frac{\pi\partial r}{\varphi(r)^2}$$

gleichzeitig Statt finden. Es seien a, b, a', b' Constanten, für welche $aa'+bb' = 1$, und

$$r = \frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}, \quad \partial r = \frac{\partial\varrho}{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)^2},$$

ferner

$$\psi(\varrho) = (a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)\varphi(r):$$

so erhält man durch zweimaliges Differentiiren,

$$\psi'(\varrho) = \sqrt{-1}\,b\varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho},$$

$$\psi''(\varrho) = \frac{\varphi''(r)}{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)^3},$$

und daher

$$\psi(\varrho)^3\psi''(\varrho) = \varphi(r)^3\varphi''(r).$$

Fügt man hinzu die Formel

$$\frac{\partial r}{\varphi(r)^2} = \frac{\partial\varrho}{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)^2\varphi(r)^2} = \frac{\partial\varrho}{\psi(\varrho)^2},$$

so verwandeln sich die beiden Gleichungen

$$4\varphi(r)^3\varphi''(r) = \pi^2 H_1, \quad \frac{\partial \log H_1}{\sqrt{(1+4H_1)}} = \frac{\pi\partial r}{\varphi(r)^2}$$

in die ganz ähnlichen,

$$4\psi(\varrho)^3\psi''(\varrho) = \pi^2 H_1, \qquad \frac{\partial \log H_1}{\sqrt{(1+4H_1)}} = \frac{\pi\,\partial\varrho}{\psi(\varrho)^2}.$$

Es folgt hieraus, dafs die Function

$$\psi(\varrho) = (a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)\varphi(r),$$

eben so wie $\varphi(\varrho)$, ein Integral der Differentialgleichung (7.) und daher auch

$$\{\psi(\varrho)\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{f(r)}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}}$$

ein Integral der Differentialgleichung (8.) ist, und zwar sind dies die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen, weil sie 3 willkürliche Constanten enthalten.

Man hat oben gesehn, dafs die Reihe

$$2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+2\sqrt[4]{q^{49}}+ \text{etc.}$$

ebenfalls ein Integral der Differentialgleichung (8.) ist. Man wird daher mittelst des eben gefundenen Satzes auch aus dieser Reihe das vollständige Integral der Differentialgleichung (8.) ableiten können, und es mufs das aus der einen Form erhaltene vollständige Integral das Integral der andern Form umfassen. Es müssen daher in dem Ausdruck $r = \frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}$ die Constanten a, b, a', b' immer so bestimmt werden können, dafs

$$\frac{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\text{etc.}}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}} = 2e^{\frac{1}{4}\pi\varrho}+2e^{\frac{9}{4}\pi\varrho}+2e^{\frac{25}{4}\pi\varrho}+\text{etc.}$$

Die Theorie der elliptischen Transcendenten lehrt, dafs diese Bestimmung auf unendlich viel Arten möglich ist. Es ergiebt sich nämlich aus der Theorie der unendlich vielen Formen der Transcendente Θ *), dafs die vorstehende Gleichung immer gilt, wenn a, b, a', b' positive oder negative ganze Zahlen sind, von denen a, a' und b ungerade sind, und a' und b durch 4 dividirt nicht denselben Rest lassen. ***Das Zeichen der den Nenner bildenden Quadratwurzel in der vorstehenden Formel hängt von dem Werthe der in der Theorie der quadratischen Reste mit $\left(\frac{a'}{b}\right)$ bezeichneten Gröfse ab.*** Ein doppelter Gang der Untersuchung, welchen man einschlagen kann, führt zu dieser Zeichen-

---

*) Ich habe diese Theorie in mehreren an der Königsberger Universität gehaltnen Vorlesungen umständlich auseinandergesetzt, und behalte mir vor, dieselbe bei einer andern Gelegenheit bekannt zu machen.

bestimmung entweder mittelst einer Kettenbruchentwicklung oder der von *Gaufs* in seiner Abhandlung *Summatio serierum quarundam singularium* betrachteten Summen. Die vorstehende Gleichung wird, wenn a und b ungerade ist, immer gelten, wofern man nur die eine Seite derselben mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt. Wenn von den Zahlen a und b die eine gerade, die andere ungerade ist, hat man die Gleichung

$$\delta\cdot\frac{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\ldots}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}} = 1\pm 2e^{\pi\varrho}+2e^{4\pi\varrho}\pm 2e^{9\pi\varrho}+\ldots,$$

wo δ eine 8te Wurzel der Einheit bedeutet, und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem von den Zahlen a' und b die eine gerade, die andere ungerade oder beide ungerade sind.

Die vorstehenden Reihenentwicklungen setzen voraus, dafs der reelle Theil der Gröfsen ϱ und r negativ ist. Wenn dies bei ϱ, aber nicht bei der Gröfse r der Fall ist, so kann man die Constanten a und b' mit $\sqrt{-1}$ multipliciren und die Constanten a' und b mit $\sqrt{-1}$ dividiren, wodurch die Bedingung $aa'+bb'=1$ unverändert bleibt, und sich r in $-r$ verwandelt, also der reelle Theil negativ wird. ***Für beliebige reelle Werthe der willkürlichen Constanten a, a', b, b' wird, wenn der reelle Theil von ϱ negativ ist, auch der reelle Theil von r immer negativ sein.*** Setzt man nämlich

$$\varrho = -\varrho_0+\varrho_1\sqrt{-1},$$

so wird

$$r = -\frac{a\varrho_0+(a\varrho_1+b_1)\sqrt{-1}}{a'-b\varrho_1-b\varrho_0\sqrt{-1}}$$

$$= -\frac{\varrho_0+\sqrt{-1}\,\{(a'-b\varrho_1)(a\varrho_1+b_1)-ab\varrho_0^2\}}{(a'-b\varrho_1)^2+b^2\varrho_0^2},$$

woraus der vorstehende Satz folgt.

Den 10ten November 1847.

Verbesserungen.

S. 102 Z. 5 $\frac{k^2}{k'^4}$ st. $-\frac{k^2}{k'^4}$

Z. 9 $\frac{k'^2}{k^4}$ st. $\frac{k^2}{k^4}$

Z. 10 nach „setzt" ist einzufügen „und bei der zweiten die Wurzel negativ nimmt,"

Z. 11 $\frac{1}{k'^2}$ st. k'^2

Z. 13, 14, 18 ist das Minuszeichen fortzulassen.