Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunctionen einer Variablen.

(Von Herrn *G. Bauer* zu München)

Wenn die Function, welche durch eine Reihe von Kugelfunctionen dargestellt werden soll, nur von einem Winkel θ abhängt, so nimmt die Entwicklung der Function bekanntlich die einfache Form an

$$f(\theta) = \Sigma A_n P_n(\cos\theta),$$

wo $P_n(\cos\theta)$ ein bekanntes Polynom von $\cos\theta$ vom n^{ten} Grade ist und A_n durch die Formel bestimmt ist

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta\,\partial\theta.$$

Führen wir der Kürze wegen statt θ die Variable $x = \cos\theta$ ein und bezeichnen sodann das Polynom $P_n(\cos\theta)$ durch X_n, so nimmt die Entwicklung folgende Form an

$$\text{(I.)}\qquad f(x) = \Sigma A_n X_n,\quad \text{wo}\quad A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) X_n\,\partial x.$$

Da die Zusammensetzung der Polynome X_n keineswegs einfach ist, so ist die Form der Coefficienten A_n, wie man sie unmittelbar aus vorstehender Formel erhält, vorausgesetzt, dafs die Integration ausführbar ist, sehr complicirt und das Bildungsgesetz derselben in seiner einfachsten Gestalt schwer zu erkennen. In einer Abhandlung von Herrn ***Lejeune Dirichlet*** über die Dichte einer sphärischen Schicht, deren Potential gegeben ist, (gelesen in der Berliner Akademie 1850 und reproducirt im Journal von ***Liouville*** 1857) beschäftigt sich derselbe auch mit der Bestimmung der Coefficienten A in dem Falle, wo $f(x) = x^k$ (§. IV und §. V). Schon in diesem einfachen Beispiele ist die Form der Coefficienten, welche sich unmittelbar aus dem Integral $\int_{-1}^{+1} f(x) X_n\,\partial x$ ergiebt, wenn man darin für X_n das Polynom setzt, welches es darstellt, so complicirt, dafs nach dem Ausspruche Herrn ***Dirichlets*** nur die vorgängige Betrachtung des einfachern Falls $f(x) = x^1$ die grofse Vereinfachung vermuthen läfst, deren diese Form fähig ist. Die Analyse, deren sich Herr *Dirichlet* bedient, um zu dieser einfachen Form der Coefficienten zu gelangen, ist weder elementar, noch einer Ausdehnung auf andere Fälle fähig. Es mag daher nicht unpassend sein, hier ein Verfahren anzugeben, durch welches man in sehr vielen Fällen, und gerade den wichtigsten, die Coefficienten der Reihe (I.) mit der gröfsten Leichtigkeit bestimmen kann.

§. 1.

Betrachten wir zuerst das Integral $\int_{-1}^{+1} X_m \frac{\partial X_n}{\partial x} \partial x$. Da $\frac{\partial X_n}{\partial x}$ ein Polynom vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, so ist vermöge einer bekannten Eigenschaft der Polynome X dieses Integral immer gleich 0, wenn $n \overline{\overline{<}} m$ ist. Ist aber $n > m$, so ist vermöge derselben Eigenschaft $\int_{-1}^{+1} X_n \frac{\partial X_m}{\partial x} \partial x = 0$, und man hat daher in diesem Falle

$$\int_{-1}^{+1} X_m \frac{\partial X_n}{\partial x} \partial x = \int_{-1}^{+1} X_m \frac{\partial X_n}{\partial x} \partial x + \int_{-1}^{+1} X_n \frac{\partial X_m}{\partial x} \partial x = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial (X_m X_n)}{\partial x} \partial x$$
$$= (X_m X_n)_{+1} - (X_m X_n)_{-1}.$$

Da für $x=1$, $X_m = X_n = 1$ ist, für $x=-1$, $X_m = (-1)^m$, $X_n = (-1)^n$ ist, so ist das Integral gleich 0, wenn m und n beide gerade oder beide ungerade sind; hingegen $=2$, wenn m und n ungleichartig sind.

Hieraus ergiebt sich sogleich nach dem Gesetz der Reihe (I.)

$$\text{(II.)} \qquad \frac{\partial X_n}{\partial x} = (2n-1) X_{n-1} + (2n-5) X_{n-3} + (2n-9) X_{n-5} + \cdots,$$

eine Formel, welche auch Herr *Christoffel* in seiner Abhandlung über die *Gaufs*sche Quadratur (Bd. 55 Heft 1 dieses Journals) auf andere Weise abgeleitet hat.

Aus dieser Formel folgt aber sogleich

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x} = (2n+1) X_n,$$

und hieraus für jedes n, von $n=1$ an,

$$\text{(III.)} \qquad \int X_n \partial x = \frac{1}{2n+1} (X_{n+1} - X_{n-1}),$$

wenn das Integral so genommen wird, dafs es für $x=1$ verschwindet.

Vermittelst dieser so einfachen Relation zwischen den Polynomen X und ihrem Integral läfst sich leicht eine Relation finden zwischen den Coefficienten der Entwicklung von $f(x)$ und der von $\int f(x)\partial x$. Bezeichnen wir nämlich $\int f(x)\partial x$ mit $F(x)$, so giebt die partielle Integration

$$\frac{2n+1}{2}\int F(x)X_n\partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}F(x).(X_{n+1}-X_{n-1}) - \tfrac{1}{2}\int f(x)X_{n+1}\partial x + \tfrac{1}{2}\int f(x)X_{n-1}\partial x.$$

Ist $F(x)$ continuirlich, so verschwindet das Glied $\frac{1}{2}F(x)(X_{n+1}-X_{n-1})$ an den Grenzen $x=+1$ und $x=-1$; denn $F(x)$ kann nicht unendlich werden, wenn die Entwicklung von $f(x)$ in eine Reihe von der Form (I.) möglich sein soll, und $X_{n+1}-X_{n-1}$ hat den Factor x^2-1. Geht man also zu diesen Grenzen über, und bezeichnet mit A_n den Coefficienten von X_n in der Entwicklung von $f(x)$, so ist der Coefficient von X_n in der Entwicklung von $F(x)$ gleich $\frac{1}{2n-1}A_{n-1}-\frac{1}{2n+3}A_{n+1}$. Es läfst sich also das Integral der Reihe (I.) unmittelbar hinschreiben, nämlich

$$\text{(IV.)}\qquad \int f(x)\partial x + \text{const.} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n-1}A_{n-1}-\frac{1}{2n+3}A_{n+1}\right)X_n.$$

Für $x=1$ reducirt sich die rechte Seite dieser Gleichung auf $A_0+\frac{1}{3}A_1$; für $x=-1$ auf $-A_0+\frac{1}{3}A_1$. Nimmt man mithin das Integral $\int f(x)\partial x$ z. B. so dafs es für $x=1$ verschwindet, so ist

$$\text{const.} = A_0+\tfrac{1}{3}A_1.$$

Nach dem Beweis von Herrn *Dirichlet* von der Convergenz der Reihen mit Kugelfunctionen ist die Reihe (I.) für jeden Werth von x von $x=-1$ bis $x=+1$ convergent, wenn die entwickelte Function $f(x)$ nie unendlich wird. Die Reihe (IV.) ist mithin auch immer convergent. In der That müssen, wenn die Reihe (I.) für jeden Werth von x von $x=-1$ bis $x=+1$ convergent ist, die Coefficienten A_n mit wachsenden n gegen Null convergiren, mithin für grofse Werthe von n von der Ordnung $\frac{1}{n^\varepsilon}$ sein, wo ε eine positive Zahl ist. Die Coefficienten der Reihe (IV.) sind mithin höchstens von der Ordnung $\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ und da die Polynome X_n für keinen Werth von x innerhalb dieser Grenzen den numerischen Werth 1 übersteigen, so ist hiedurch schon die Convergenz der Reihe gesichert. Diese Convergenz wird aber noch vermehrt, durch die Natur der Polynome $P_n(\cos\theta)$, welche sich, für grofse Werthe von n, wie *Poisson* gezeigt hat *), durch die Näherungsformel $\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos((n+\frac{1}{2})\theta-\frac{1}{4}\pi)$ darstellen lassen. Mittelst dieser Formel überzeugt man sich, dafs die Reihe (IV.) selbst dann immer convergent sein wird, wenn die Coefficienten A_n nicht gegen Null convergiren, sondern allenfalls gegen eine endliche Grenze. Dieser Fall kann eintreten, wenn die entwickelte Function $f(x)$ für einzelne Werthe von x unendlich wird, in welchem Falle auch die Reihe für gewisse Werthe von x divergirt.

Mit Hülfe der Gleichung (IV.) nun wird man in den meisten Fällen leicht eine Relation zwischen den Coefficienten A auffinden können, wodurch sie bestimmt werden, wie ich es im Folgenden an einigen Fällen, in welchen die Coefficienten eine interessante Form annehmen, näher erläutern will.

§. 2.

Sei zuerst als einfachster Fall $f(x)=e^{ax}$, wo a eine beliebige Gröfse ist, und

$$(1.)\qquad e^{ax}=A_0X_0+A_1X_1+A_2X_2+\cdots,$$

so wird Gleichung (IV.)

$$\frac{1}{a}e^{ax}-\frac{1}{a}e^{a}+A_0+\tfrac{1}{3}A_1=\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2n-1}A_{n-1}-\frac{1}{2n+3}A_{n+1}\right)X_n.$$

Da nun bekanntlich eine Function nur auf *eine* Art in eine Reihe von Kugelfunctionen entwickelt werden kann, so giebt die Vergleichung beider Reihen für e^{ax}

$$e^a-aA_0-\frac{a}{3}A_1=A_0\quad\text{und}\quad A_n-a\left(\frac{1}{2n-1}A_{n-1}-\frac{1}{2n+3}A_{n+1}\right)=0.$$

Letztere Gleichung gilt für jedes n, von $n=1$ an. Nun ist aber

$$A_0=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1}e^{ax}\partial x=\frac{1}{2a}(e^a-e^{-a}),$$

und hiermit wird

$$A_1=-\frac{3}{2a}\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)e^a-\left(1+\frac{1}{a}\right)e^{-a}\right],$$

$$A_2=+\frac{5}{2a}\left[\left(1-\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}\right)e^a-\left(1+\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}\right)e^{-a}\right],$$

so dafs also im Allgemeinen A_n von der Form sein wird:

$$(2.)\qquad A_n=(-1)^n\frac{2n+1}{2a}(P_ne^a-Q_ne^{-a}),$$

*) Connaissance des Temps 1831.

wo P_n und Q_n Polynome von $\frac{1}{a}$ sind. Um das Gesetz, nach welchem dieselben gebildet sind, zu finden, substituire man für A_{n+1}, A_n, A_{n-1} ihre Ausdrücke nach Gleichung (2.) in die Relation, welcher sie genügen, und bemerke, dafs die Coefficienten von e^a und e^{-a} in der so erhaltenen Gleichung einzeln gleich Null sein müssen; so ergeben sich folgende Relationen, von $n=1$ an

$$P_{n+1}-P_{n-1}-\frac{2n+1}{a}P_n = 0, \qquad Q_{n+1}-Q_{n-1}-\frac{2n+1}{a}Q_n = 0,$$

aus welchen man ersieht, dafs P_n und Q_n der Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruchs eines Kettenbruchs sind. Da ferner die Coefficienten A_n mit wachsendem n gegen Null convergiren, so mufs der Werth des vollständigen Kettenbruchs e^{-2a} sein. Stellen wir denselben dar durch

$$\alpha_0+\cfrac{\alpha_1}{\beta_1+\cfrac{\alpha_2}{\beta_2+\cdots}},$$

so folgt aus obigen Relationen $\alpha_{n+1}=1$, $\beta_{n+1}=\frac{2n+1}{a}$, von $n=1$ an. Die Werthe von α_0, α_1, β_1 ergeben sich aus den Werthen von A_0 und A_1, nämlich $\alpha_0=1$, $\alpha_1=-2$, $\beta_1=1+\frac{1}{a}\cdot$ Der Kettenbruch also, aus welchem die Werthe von P_n und Q_n zu entnehmen sind, ist

$$(3.)\quad e^{-2a} = \frac{1}{1}-\cfrac{2}{1+\frac{1}{a}+\cfrac{1}{\frac{3}{a}+\cfrac{1}{\frac{5}{a}+\cfrac{1}{\frac{7}{a}+\cdots}}}}$$

Man hätte A_n auch unter die Form

$$A_n = (-1)^n\frac{2n+1}{a}\left(Q'_n\frac{e^a-e^{-a}}{2}-P'_n\frac{e^a+e^{-a}}{2}\right)$$

bringen können, wo nun P'_n und Q'_n Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruchs des folgenden Kettenbruchs sind:

$$(3'.)\qquad \frac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}} = \frac{0}{1}+\cfrac{1}{\frac{1}{a}+\cfrac{1}{\frac{3}{a}+\cfrac{1}{\frac{5}{a}+\cfrac{1}{\frac{7}{a}+\cdots}}}}$$

Setzt man

$$(4.)\quad \begin{cases} \cos ax = A_0 X_0 - A_2 X_2 + A_4 X_4 - + \cdots, \\ \sin ax = A_1 X_1 - A_3 X_3 + A_5 X_5 - + \cdots, \end{cases}$$

bildet sodann die Reihe für $\cos ax + \sin ax . \sqrt{-1}$ und integrirt, so findet man ganz auf dieselbe Weise, wie vorhin, dafs A_n von der Form

$$(5.)\qquad A_n = \frac{2n+1}{a}(Q_n \sin a - P_n \cos a)$$

ist, wo P_n und Q_n Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruchs des folgenden Kettenbruchs sind:

$$(6.)\qquad \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tang} a = \frac{0}{1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{a} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{a} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{a} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{a} - \cdots}}}}$$

§. 3.

Es ist bekanntlich $X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{\partial^n (x^2-1)^n}{\partial x^n}$. Vermöge dieser Form von X_n erhält man durch $n$malige partielle Integration

$$\int_{-1}^{+1} f(x) X_n \partial x = \frac{(-1)^n}{2.4\ldots 2n} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} (x^2-1)^n \partial x,$$

vorausgesetzt, dafs $f(x)$ continuirlich und die vom Integralzeichen freien Glieder bei jeder partiellen Integration vermöge des Factors x^2-1 an den Grenzen $x = \pm 1$ verschwinden. Da nun der Coefficient $A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_n \partial x$ ist, so ist, wenn A_n gefunden ist, auch das Integral $\int_{-1}^{+1} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} (x^2-1)^n \partial x$ bestimmt. So folgt aus Gleichung (2.)

$$(7.)\qquad \frac{a^n}{2.4.6\ldots 2n} \int_{-1}^{+1} e^{ax} (x^2-1)^n \partial x = \frac{1}{a}(P_n e^a - Q_n e^{-a}),$$

oder auch

$$\frac{(2a)^{-n}}{1.2.3\ldots n} \int_{-a}^{+a} e^z (z^2-a^2)^n \partial z = P_n e^a - Q_n e^{-a}.$$

Aus dieser letzten Formel ergiebt sich eine Entwicklung für das Integral $\int_p^q e^{-z^2} \partial z$, welche einiges Interesse gewähren mag. Multiplicirt man nämlich beide Gleichungsseiten mit $(-ar)^n$ und summirt nach n, so erhält man

$$\Sigma(P_n e^a - Q_n e^{-a})(-ar)^n = \int_{-a}^{+a} e^{z-\frac{r}{2}(z^2-a^2)} \partial z$$

$$= \frac{1}{\nu} e^{\nu^2 a^2 + \frac{1}{(2\nu)^2}} \int_{\frac{1}{2\nu}-a\nu}^{\frac{1}{2\nu}+a\nu} e^{-z^2} \partial z,$$

wo $\nu^2 = \frac{r}{2}$ gesetzt ist. Sei nun $\frac{1}{2\nu} - a\nu = p$, $\frac{1}{2\nu} + a\nu = q$, so wird

$$\frac{1}{\nu} = p+q,\ a\nu = \frac{q-p}{2},\ a = \frac{q^2-p^2}{2},\ ar = 2a\nu^2 = \frac{q-p}{q+p},$$

$$a^2\nu^2 + \frac{1}{(2\nu)^2} = \frac{q^2+p^2}{2}$$

und hiermit

$$(8.) \qquad (p+q)e^{p^2}\int_p^q e^{-z^2}\partial z = \Sigma(P_n - Q_n e^{-(q^2-p^2)})\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^n,$$

wo P_n und Q_n aus dem Kettenbruch (3.) zu entnehmen sind, nachdem man darin a durch $\frac{q^2-p^2}{2}$ ersetzt hat.

Für $p = 0$ reducirt sich Gleichung (8.) auf folgende:

$$(9.) \qquad q\int_0^q e^{-z^2}\partial z = \Sigma(-1)^n(P_n - Q_n e^{-q^2}),$$

vorausgesetzt, dafs in dem Kettenbruch (3.), aus welchem P_n und Q_n bestimmt werden, $a = \frac{q^2}{2}$ gesetzt wird.

Auf dieselbe Weise erhält man aus (7.)

$$(10.) \qquad (p+q)e^{-q^2}\int_p^q e^{z^2}\partial z = \Sigma(P_n - Q_n e^{-(q^2-p^2)})\left(\frac{q-p}{q+p}\right)^n,$$

also für $p = 0$,

$$(11.) \qquad qe^{-q^2}\int_0^q e^{z^2}\partial z = \Sigma(P_n - Q_n e^{-q^2}).$$

Die beiden letzten Reihen unterscheiden sich nur dadurch von den Reihen (8.) und (9.) respective, dafs in diesen die Glieder alle positiv sind, während in den Reihen (10.) und (11.) die Zeichen der Glieder wechseln.

Ganz ähnliche Reihenentwicklungen erhält man aus den Gleichungen (4.) bis (6.) für die Integrale $\int_p^q \cos z^2 \partial z$ und $\int_p^q \sin z^2 \partial z$.

Was endlich die Convergenz dieser Reihen betrifft, so überzeugt man sich leicht, dafs sie für jeden positiven endlichen Werth von p und q statt hat.

§. 4.

Als zweites Beispiel sei $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ gegeben, wo $a^2 \overline{\overline{<}} 1$ ist, und es seien die Coefficienten der Entwicklung

$$(12.)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}} = A_0X_0+A_2X_2+A_4X_4+\cdots+A_{2n}X_{2n}+\cdots$$

zu bestimmen, welche natürlich nur Polynome X von geradem Grade enthalten kann.

Nach der bekannten Relation, welcher die Polynome X genügen, hat man

$$(a.)\qquad xX_n = \frac{n}{2n+1}X_{n-1}+\frac{n+1}{2n+1}X_{n+1}.$$

Multiplicirt man also die Gleichung (12.) mit x, so geht sie in folgende über:

$$(13.)\qquad \frac{x}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \sum_{n=0}\left(\frac{2n+1}{4n+1}A_{2n}+\frac{2n+2}{4n+5}A_{2n+2}\right)X_{2n+1},$$

und hieraus folgt durch Integration nach (IV.)

$$\int_1^x \frac{x\,\partial x}{\sqrt{1-a^2x^2}} = -\frac{1}{a^2}\sqrt{1-a^2x^2}+\frac{1}{a^2}\sqrt{1-a^2} = -\tfrac{1}{3}(A_0+\tfrac{2}{5}A_2)$$

$$+\sum_{n=1}\left[\frac{2n-1}{4n-1.4n-3}A_{2n-2}+\left(\frac{2n}{4n-1.4n+1}-\frac{2n+1}{4n+1.4n+3}\right)A_{2n}-\frac{2n+2}{4n+3.4n+5}A_{2n+2}\right]X_{2n}.$$

Andererseits erhält man aus (12.) durch Multiplication mit $1-a^2x^2$ mittelst der Relation (a.)

$$\sqrt{1-a^2x^2} = \left[A_0-\frac{a^2}{3}(A_0+\tfrac{2}{5}A_2)\right]X_0+\sum_{n=1}\Bigg(A_{2n}-a^2\Bigg[\frac{2n.2n-1}{4n-1.4n-3}A_{2n-2}$$

$$+\left(\frac{(2n)^2}{4n-1.4n+1}+\frac{(2n+1)^2}{4n+1.4n+3}\right)A_{2n}+\frac{2n+1.2n+2}{4n+3.4n+5}A_{2n+2}\Bigg]\Bigg)X_{2n}.$$

Die Vergleichung der beiden Reihen, welche wir für $\sqrt{1-a^2x^2}$ erhalten haben, giebt

$$\frac{a^2}{3}(A_0+\tfrac{2}{5}A_2)+\sqrt{1-a^2} = A_0-\frac{a^2}{3}(A_0+\tfrac{2}{5}A_2),$$

woraus

$$A_2 = \frac{3.5}{2^2a^2}\left[\left(1-\frac{1.2}{1.3}a^2\right)A_0-\sqrt{1-a^2}\right]$$

und allgemein, von $n=1$ an,

$$(14.)\qquad A_{2n+2} = \frac{4n+3.4n+5}{(2n+2)^2a^2}\left(1-\frac{2n-1.2n}{4n-1.4n+1}a^2-\frac{2n+1.2n+2}{4n+1.4n+3}a^2\right)A_{2n} - \frac{4n+3\cdot 4n+5}{4n-3.4n-1}\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^2 A_{2n-2}.$$

Da nun $A_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\partial x}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin a$ ist, so ist

$$A_2 = \frac{3.5}{2^2a^2}\left[\left(1-\frac{1.2}{1.3}a^2\right)\frac{\arcsin a}{a}-\sqrt{1-a^2}\right],$$

und allgemein ist A_{2n} von der Form

$$(15.)\qquad A_{2n} = Q_{2n}\frac{\arcsin a}{a} - P_{2n}\sqrt{1-a^2}.$$

Es findet nun zwischen Q_{2n+2}, Q_{2n}, Q_{2n-2} und ebenso zwischen P_{2n+2}, P_{2n}, P_{2n-2} dieselbe Relation statt, welche zwischen A_{2n+2}, A_{2n} und A_{2n-2} besteht, mithin sind P_{2n} und Q_{2n} Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruchs eines Kettenbruchs, dessen wahrer Werth $\frac{\arcsin a}{a\sqrt{1-a^2}}$ ist. Stellen wir diesen Kettenbruch dar durch

$$\alpha_0+\cfrac{\alpha_2}{\beta_2+\cfrac{\alpha_4}{\beta_4+\cdots,}}$$

so ist $\alpha_0 = 0$, $\alpha_2 = \frac{3.5}{2^2a^2}$, $\beta_2 = \frac{3.5}{2^2a^2}\left(1-\frac{1.2}{1.3}a^2\right)$ und vermöge der Relation (14.), von $n=1$ an,

$$\alpha_{2n+2} = -\frac{4n+3.4n+5}{4n-1.4n-3}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^2,$$

$$\beta_{2n+2} = \frac{4n+3.4n+5}{(2n+2)^2a^2}\left(1-\frac{2n-1.2n}{4n-1.4n+1}a^2-\frac{2n+1.2n+2}{4n+1.4n+3}a^2\right).$$

P_{2n} und Q_{2n} sind mithin Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruchs des folgenden Kettenbruchs

$$(16.)\qquad \frac{\arcsin a}{a\sqrt{1-a^2}} = \frac{0}{1}+\cfrac{\frac{3.5}{2^2a^2}}{\frac{3.5}{2^2a^2}\left(1-\frac{1.2}{1.3}a^2\right)-\cfrac{\frac{7.9}{1.3}\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{7.9}{4^2a^2}\left(1-\frac{1.2}{3.5}a^2-\frac{3.4}{5.7}a^2\right)-\cfrac{\frac{11.13}{5.7}\left(\frac{3}{6}\right)^2}{\frac{11.13}{6^2a^2}\left(1-\frac{3.4}{7.9}a^2-\frac{5.6}{9.11}a^2\right)-\cdots}}}$$

Dieser Kettenbruch läfst sich in der Art verwandeln, dafs man jeden Theilbruch in zwei Theilbrüche entwickelt; zugleich lassen sich aus ihm die Factoren $\frac{3.5}{2^2 a^2}$, $\frac{7.9}{4^2.a^2}$ u. s. f. entfernen, indem man A_{2n} die folgende Form giebt:

$$A_{2n} = \frac{3.5}{2^2}\cdot\frac{7.9}{4^2}\cdots\frac{4n-1.4n+1}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{a^{2n}}\left(Q'_{2n}\frac{\arcsin a}{a} - P'_{2n}\sqrt{1-a^2}\right).$$

Dadurch wird der Kettenbruch

$$\frac{\arcsin a}{a\sqrt{1-a^2}} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{1.2}{1.3}a^2}{1-\cfrac{\frac{1.2}{3.5}a^2}{1-\cfrac{\frac{3.4}{5.7}a^2}{1-\cfrac{\frac{3.4}{7.9}a^2}{1-\cdots,}}}}}$$

übereinstimmend mit dem von *Gaufs* gegebenen Kettenbruch für $\frac{t}{\sin t \cos t}$ (Disqq. generales circa seriem etc.); und zwar sind P'_{2n} und Q'_{2n} nun Zähler und Nenner des $2n^{\text{ten}}$ Näherungsbruchs dieses Kettenbruchs.

Ist $a=1$, so reducirt sich A_{2n} auf $Q_{2n}\cdot\frac{\pi}{2}$, und es ergiebt sich $Q_2 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $Q_4 = 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2$. Mittelst dieser Werthe und der Relation (14.) beweist man leicht, dafs allgemein $Q_{2n} = (4n+1)\left(\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\right)^2$ ist. Es wird also

$$(17.)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\left(1+5\left(\frac{1}{2}\right)^2 X_2 + 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 X_4 + 13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 X_6 + \cdots\right).$$

Für $x=0$ wird $X_{2n} = (-1)^n\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}$ und folglich

$$\frac{2}{\pi} = 1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 - 13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + - \cdots$$

eine Reihe, welche jedoch nur vermöge der Zeichenwechsel convergirt, indem $\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}$ für grofse Werthe von n von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist, mithin die Glieder dieser Reihe von derselben Ordnung sind.

Ferner ergiebt sich aus der Reihe (17.)

$$(18.)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{X_{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\partial x = \int_0^{\pi} P_{2n}(\cos\theta)\,\partial\theta = \left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2\pi,$$

wo $P_{2n}(\cos\theta)$, wie im Eingange, das bezeichnet, was X_{2n} wird, wenn man x durch $\cos\theta$ ersetzt.

Noch mag bemerkt werden, dafs die Gleichung (13.) für $a=1$ in folgende übergeht

$$(19.)\qquad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\left(3\cdot\tfrac{1}{2}X_1+7\left(\frac{1}{2}\right)^2\tfrac{3}{4}X_3+11\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\tfrac{5}{6}X_5+\cdots\right).$$

Aus dieser Gleichung und Gleichung (17.) folgt nun sogleich durch Integration nach IV.

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} = \tfrac{1}{2}-5\cdot\frac{1}{2^2.4}X_2-9\cdot\frac{1^2.3}{2^2.4^2.6}X_4-13\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2\tfrac{5}{8}X_6-\cdots$$

und

$$\frac{2}{\pi}\arcsin x = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2X_1+7\left(\frac{1}{2.4}\right)^2X_3+11\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2X_5+\cdots.$$

Multiplicirt man endlich die Gleichungen (17.) und (19.) auf der einen Seite mit $(1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}$, auf der andern mit der gleichgeltenden Reihe

$$X_0+rX_1+r^2X_2+\cdots,$$

und integrirt von $x=-1$ bis $x=+1$, so erhält man folgende bekannte elliptische Integrale in Reihen

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-2rx+r^2}} = \int_0^\pi\frac{\partial\theta}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

$$= \pi\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2r^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2r^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2r^6+\cdots\right),$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-2rx+r^2}} = \int_0^\pi\frac{\cos\theta\,\partial\theta}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

$$= \pi\left(\tfrac{1}{2}r+\left(\frac{1}{2}\right)^2\tfrac{3}{4}r^3+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\tfrac{5}{6}r^5+\cdots\right).$$

§. 5.

Als letztes Beispiel seien noch die Coefficienten in der Entwicklung von $(a+x)^m$ zu bestimmen, ein Beispiel, welches den Eingangs erwähnten von Herrn ***Dirichlet*** betrachteten Fall einschliefst.

Der zu befolgende Gang ist derselbe wie in den vorigen Beispielen.

Sei

$$(20.)\qquad (a+x)^m = A_0X_0+A_1X_1+A_2X_2+\cdots,$$

so giebt die Integration nach (IV.)

$$\frac{1}{m+1}(a+x)^{m+1} - \frac{1}{m+1}(a+1)^{m+1} + A_0 + \tfrac{1}{3}A_1$$
$$= \sum_{n=1}\left(\frac{1}{2n-1}A_{n-1} - \frac{1}{2n+3}A_{n+1}\right)X_n.$$

Andererseits giebt die Multiplication der Gleichung (20.) mit $a+x$ mit Hülfe der Relation (a.) §. 4

$$(a+x)^{m+1} = aA_0 + \tfrac{1}{3}A_1 + \sum_{n=1}\left(\frac{n}{2n-1}A_{n-1} + aA_n + \frac{n+1}{2n+3}A_{n+1}\right)X_n.$$

Die Vergleichung beider Reihen für $(a+x)^{m+1}$ giebt

$$(a+1)^{m+1} - (m+1)A_0 - aA_0 = \tfrac{1}{3}(m+2)A_1$$

und von $n=1$ an

$$(21.)\qquad \frac{m-n+1}{2n-1}A_{n-1} - aA_n - \frac{m+n+2}{2n+3}A_{n+1} = 0.$$

Da nun

$$A_0 = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(a+x)^m\,\partial x = \frac{1}{m+1}\cdot\tfrac{1}{2}[(a+1)^{m+1} - (a-1)^{m+1}],$$

so wird, wenn wir zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}[(a+1)^{m+1} - (a-1)^{m+1}] = f_1(a) \text{ und } \tfrac{1}{2}[(a+1)^{m+1} + (a-1)^{m+1}] = f_2(a)$$

setzen,

$$A_0 = \frac{1}{m+1}f_1(a),\quad A_1 = -\frac{3}{(m+1)(m+2)}(af_1(a) - (m+1)f_2(a)),\quad \text{u. s. f.}$$

Allgemein ist A_n von der Form

$$(22.)\qquad A_n = (-1)^n\frac{2n+1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n+1)}(Q_nf_1(a) - P_nf_2(a)),$$

und P_n und Q_n ergeben sich wie in den vorigen Beispielen als Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruchs eines Kettenbruchs, dessen Werth $\frac{f_1(a)}{f_2(a)}$ ist. Diesen Kettenbruch findet man mittelst der Relation (21.), nämlich

$$(23.)\qquad \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{(a+1)^{m+1} - (a-1)^{m+1}}{(a+1)^{m+1} + (a-1)^{m+1}} = \frac{0}{1} + \cfrac{m+1}{a + \cfrac{m(m+2)}{3a + \cfrac{(m-1)(m+3)}{5a + \cdots}}}$$

Dieser Kettenbruch bricht ab, wenn m irgend eine ganze, positive oder negative Zahl ist. Ist m eine negative ganze Zahl, so nimmt der eben gefundene Ausdruck für A_n die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, sobald $n \gtreqless -m-1$ wird. Ich werde diesen Fall, in welchem die Coefficienten eine andere Form annehmen, später besonders betrachten. Ist aber m eine ganze positive Zahl, so wird $A_n = 0$, wenn $n \gtreqqless m+1$ ist; die Reihe (20.) bricht also, wie vorauszusehen war, bei dem Gliede $A_m X_m$ ab. Hierbei kann a einen ganz beliebigen Werth haben. Ist z. B. $a = 0$, so wird $f_1(a) = 1$, $f_2(a) = 0$, wenn m gerade, hingegen $f_2(a) = 1$, $f_1(a) = 0$, wenn m ungerade. Es ist also für gerade m

$$(24.)\begin{cases} x^m = \frac{1}{m+1} X_0 + 5\frac{m}{(m+1)(m+3)} X_2 + 9\frac{m(m-2)}{(m+1)(m+3)(m+5)} X_4 + \cdots \\ \qquad + (2m+1)\frac{m(m-2)\dots 2}{(m+1)(m+3)\dots(2m+1)} X_m, \\ \text{für ungerade } m \\ x^m = 3\frac{1}{m+2} X_1 + 7\frac{m-1}{(m+2)(m+4)} X_3 + 11\frac{(m-1)(m-3)}{(m+2)(m+4)(m+6)} X_5 + \cdots \\ \qquad + (2m+1)\frac{(m-1)(m-3)\dots 2}{(m+2)(m+4)\dots(2m+1)} X_m. \end{cases}$$

Ist m keine ganze positive Zahl, so müssen wir im Obigen $a > 1$ voraussetzen. Wollte man z. B. x^m entwickeln, wenn m ein Bruch ist, so müfste man, wie Herr ***Dirichlet*** gethan hat, in der Gleichung (I.) $f(x) = x^m$ setzen, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = +1$, und $f(x) = 0$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = -1$. Man erhielte sodann

$$A_0 = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{m+1}, \qquad A_1 = \tfrac{3}{2}\cdot\frac{1}{m+2}$$

und hiermit aus der Relation (21.) allgemein,

$$\text{wenn } n \text{ gerade,} \quad A_n = \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{m(m-2)\dots(m-n+2)}{(m+1)(m+3)\dots(m+n+1)},$$

$$\text{wenn } n \text{ ungerade,} \quad A_n = \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{(m-1)(m-3)\dots(m-n+2)}{(m+2)(m+4)\dots(m+n+1)},$$

übereinstimmend mit den von Herrn ***Dirichlet*** gegebenen Formeln.

Ich mufs jedoch hier bemerken, dafs schon ***Legendre*** das Integral $\int_0^1 x^m X_n \partial x$ für gerade Indices n durch eine andere Betrachtung in der vorstehenden Form gegeben hat (Recherches sur la figure des Planètes, Acad. des Sc. 1784).

§. 6.

Ist $m+1$ positiv, so können wir in dem Vorhergehenden auch $a = 1$ setzen, und es nehmen in diesem Falle die Coefficienten ebenfalls eine einfache

Form an. Es wird dann nämlich $f_1(a) = f_2(a) = 2^m$, also $A_0 = 2^m \frac{1}{m+1}$, $A_1 = 2^m \frac{3m}{(m+1)(m+2)}$ und mittelst dieser Werthe und der Relation (21.) beweist man leicht, dafs allgemein

$$A_n = (2n+1)\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(m+1)(m+2)\dots(m+n+1)}\cdot 2^m$$

ist. Man hat also

$$(25.)\quad \left(\frac{1+x}{2}\right)^m = \frac{1}{m+1}X_0 + 3\frac{m}{(m+1)(m+2)}X_1 + 5\frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)}X_2 + \cdots,$$

eine Reihe, welche für jeden Werth von x von $x=-1$ bis $x=+1$ convergirt, wenn m positiv ist. Wird m negativ, so divergirt die Reihe für $x=-1$; und wird $m=-\frac{1}{2}$, so hören auch die Coefficienten auf gegen Null zu convergiren, indem sie sämmtlich gleich $(-1)^n 2$ werden, übereinstimmend mit der Entwicklung von $2(1+2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}$ für $r=1$.

Der eben gefundene Werth von A_n für $a=1$ führt zu einer Eigenthümlichkeit des Kettenbruchs (23.). Setzt man nämlich in der allgemeinen Formel für A_n (22.) $a=1$, so giebt die Vergleichung mit obigem Werthe

$$(-1)^n(Q_n - P_n) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1),$$

vorausgesetzt, dafs m keine negative Zahl ist. Ist m eine positive ganze Zahl und man macht $n=m$, so wird

$$(26.)\quad (-1)^m(Q_m - P_m) = 1.2.3\dots m,$$

wo P_m und Q_m Zähler und Nenner des Quotienten sind, welcher sich aus dem Kettenbruch

$$(27.)\quad \cfrac{m+1}{1+\cfrac{m(m+2)}{3+\cfrac{(m-1)(m+3)}{5+\cdots+\cfrac{2.2m}{2m-1+\cfrac{1.(2m+1)}{2m+1}}}}},$$

mit Ausschlufs des letzten Theilbruchs $\frac{1.(2m+1)}{2m+1}$, ergiebt. Der Werth des vollständigen Kettenbruchs ist gleich 1, und zwar findet man mittelst der Gleichung (26.) leicht, dafs Zähler und Nenner des vollständigen Quotienten gleich $(m+1)(m+2)\dots(2m+1)$ werden.

Da P_m den Factor $m+1$ hat, so folgt aus (26.)

$$(-1)^m Q_m \equiv 1.2.3.\,.m \quad (\text{mod.}\, m+1).$$

Es hat mithin der Ausdruck Q_m, welcher sämmtliche Zahlen von 1 bis $2m$ enthält, dieselbe Eigenschaft, welche das Product $1.2.3\ldots m$ besitzt, nämlich Q_m+1 ist durch $m+1$ theilbar oder nicht, je nachdem $m+1$ eine Primzahl ist oder keine.

§. 7.

Wir haben nun noch zu betrachten, was die Coefficienten in der Entwicklung von $(a+x)^m$ werden, wenn m eine ganze negative Zahl ist. In diesem Falle aber reicht es hin die Coefficienten der Reihe

$$(28.)\qquad \frac{1}{a+x} = A_0X_0+A_1X_1+A_2X_2+\cdots$$

zu kennen, indem sich die Coefficienten der Reihe für $\frac{1}{(a+x)^m}$ als Differentialquotienten der Coefficienten dieser Reihe ergeben.

Multiplicirt man die Gleichung (28.) mit $a+x$ und setzt für xX_n seinen Werth aus der Relation (*a.*) §. 4, so erhält man auf der rechten Gleichungsseite eine Reihe nach X, deren Coefficienten sämmtlich Null sein müssen, den Coefficienten von X_0 ausgenommen, welcher $=1$ ist. Bemerkt man sodann, dafs $A_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\partial x}{a+x}=\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a-1}$ ist, so findet man, wie in den vorhergehenden Beispielen, dafs

$$(29.)\qquad A_n = (-1)^n(2n+1)\left(Q_n\tfrac{1}{2}\log\frac{a+1}{a-1}-P_n\right)$$

ist, wo P_n und Q_n Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruchs des folgenden Kettenbruchs sind:

$$(30.)\qquad \tfrac{1}{2}\log\frac{a+1}{a-1} = \frac{0}{1}+\cfrac{1}{a-\cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}a-\cfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}a-\cfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}a-\cdots}}}}$$

Zugleich ersieht man aus den Werthen $Q_0=1$, $Q_1=a$ und der Relation, welche sich zwischen Q_{n+1}, Q_n und Q_{n-1} ergiebt, dafs Q_n mit X_n der Form nach identisch ist.

Man weifs, dafs der Ausdruck $Q_n.\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a-1}-P_n$, welchen ich der Kürze wegen mit $Y_n(a)$ bezeichnen will, ein particulares Integral der folgenden Differentialgleichung ist,

$$\frac{d(1-x^2)\frac{dy}{dx}}{dx}+n(n+1)y = 0,$$

in welcher a durch x ersetzt ist, und dafs derselben Differentialgleichung auch das Polynom X_n genügt. Man hat dieses Integral $Y_n(x)$ unter verschiedene Formen gebracht, aber man kann ihm noch eine andere neue Form geben, welche mir bemerkenswerth scheint.

Wenn man nämlich die obige Differentialgleichung $n$mal differentiirt, so erhält man mit Benutzung der Formel

$$\frac{\partial^n(yz)}{\partial x^n} = y\frac{\partial^n z}{\partial x^n}+n\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{n-1}z}{\partial x^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^{n-2}z}{\partial x^{n-2}}+\cdots$$

die Gleichung

$$(1-x^2)\frac{\partial^{n+2}y}{\partial x^{n+2}}-2(n+1)x\frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}} = 0,$$

und hieraus folgt

$$\frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}} = \frac{C}{(x^2-1)^{n+1}},$$

wo C eine willkürliche Constante bezeichnet. Es ergiebt sich hierdurch für das gesuchte Integral die Form

$$y = C\int^{(n+1)}\frac{\partial x^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}},$$

wo sämmtliche Integrale so zu nehmen sind, dafs sie für $x=\infty$ verschwinden. Bestimmt man die Constante C so, dafs y mit dem, was ich $Y_n(x)$ genannt habe, übereinstimmt, so findet man $C=(-1)^{n+1}.2.4\ldots 2n$. Es ist also

$$(31.)\qquad Y_n(x) = 2.4\ldots 2n\int^{(n+1)}\frac{\partial x^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}},$$

ein Ausdruck, ganz analog dem bekannten Ausdruck $\frac{1}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{\partial^n(x^2-1)^n}{\partial x^n}$, welcher das andere Integral der Gleichung (V.) nämlich X_n darstellt. Man könnte selbst mittelst dieses letztern Ausdrucks für X_n den so eben für y gefundenen unmittelbar aus der Differentialgleichung schliefsen, wenn man bemerkte, dafs dieselbe ungeändert bleibt, wenn man n mit $-(n+1)$ vertauscht.

Der Coefficient von X_n in der Entwicklung von $(a+x)^{-m}$ wird nun, wenn m eine ganze positive Zahl und, wie früher bemerkt wurde, $a>1$ ist,

$$(32.)\qquad \frac{(-1)^{n-m+1}(2n+1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\cdot\frac{\partial^{m-1}Y_n(a)}{\partial a^{m-1}}$$
$$= (-1)^{n-m+1}(2n+1)\frac{2.4\ldots 2n}{1.2.3\ldots(m-1)}\int^{(n-m+2)}\frac{\partial a^{n-m+2}}{(1-a^2)^{n+1}},$$

ein Ausdruck welcher, so lange $n < m-1$ ist, algebraisch und mit der Formel (22.) gleich bedeutend, für $n \gtreqless m-1$ aber logarithmisch ist.

§. 8.

Aus Gleichung (28.) erhält man, wenn man für die Coefficienten A ihre Werthe setzt, nach (IV.)

$$(33.)\quad \log(a+x) = \log(a+1) - Y_0(a) + Y_1(a) + \sum_{n=1} (-1)^n (Y_{n+1}(a) - Y_{n-1}(a)) X_n.$$

Integrirt man aber dieselbe Gleichung nach a, so erhält man, da

$$\int Y_0(a)\,\partial a = \tfrac{1}{2}\int \log\frac{a+1}{a-1}\,\partial a = \tfrac{1}{2}(a+1)\log(a+1) - \tfrac{1}{2}(a-1)\log(a-1) - 1$$
$$= \log(a+1) - Y_0(a) + Y_1(a)$$

ist,

$$\log(a+x) + \text{const.} = \log(a+1) - Y_0(a) + Y_1(a) + \sum (-1)^n (2n-1) \int Y_n(a)\,\partial a\, X_n.$$

Da die Y für $a = \infty$ sämmtlich verschwinden, so wird, wenn man $\int Y_n(a)\,\partial a$ so nimmt, dafs es ebenfalls für $a = \infty$ verschwindet, const. $= 0$, und die Vergleichung beider Reihen für $\log(a+x)$ giebt die der Gleichung (III.) analoge Gleichung

$$(34.)\quad \int Y_n(a)\,\partial a = \frac{1}{2n+1}(Y_{n+1}(a) - Y_{n-1}(a)),$$

welche sich auch auf anderm Wege ohne Mühe finden läfst.

Ich habe die Entwicklung von $\log(a+x)$ hier aus der von $\frac{1}{a+x}$ abgeleitet. Man kann sie aber auch direct aufsuchen, nach derselben Methode, nach welcher wir die Entwicklung von $(a+x)^m$ (§.5) gefunden haben. Man erhält auf diesem Wege die Coefficienten der Gleichung (33.) von $n = 1$ an in der Form

$$(35.)\quad A_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n+1}\left[Q_n . \tfrac{1}{2}(a^2-1)\log\frac{a+1}{a-1} - P_n\right],$$

wo P_n und Q_n Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruchs des folgenden Kettenbruchs sind

$$(36.)\quad \tfrac{1}{2}(a^2-1)\log\frac{a+1}{a-1} = a - \cfrac{1}{\tfrac{3}{2}a - \cfrac{\tfrac{1}{2}}{\tfrac{5}{3}a - \cfrac{\tfrac{2}{3}}{\tfrac{7}{4}a - \cfrac{\tfrac{3}{4}}{\tfrac{9}{5}a - \cdots}}}}$$

eines Kettenbruchs, der sich auch unter folgende Form bringen läfst

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\log\frac{a+1}{a-1} = 1-\cfrac{\frac{2}{1.3.a^2}}{1-\cfrac{\frac{1.3}{3.5.a^2}}{1-\cfrac{\frac{2.4}{5.7.a^2}}{1-\cfrac{\frac{3.5}{7.9.a^2}}{1-\cdots}}}}$$

In den Gleichungen (33.) und (35.) ist $a>1$ vorausgesetzt. Wird $a=1$, so reducirt sich A_0 auf $\log 2-1$, während man, von $n=1$ an,

$$A_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

findet, so dafs in diesem Falle die Entwicklung folgende wird

$$(37.)\qquad \log(1+x) = \log 2-1+\frac{3}{1.2}X_1-\frac{5}{2.3}X_2+\frac{7}{3.4}X_3-\cdots$$

§. 9.

Aus den vorhergehenden Paragraphen ergiebt sich hinreichend, wie die Coefficienten der nach Polynomen X fortschreitenden Reihen in sehr vielen Fällen auf ganz elementarem Wege gefunden werden können. Diese Coefficienten lassen sich aber auch leicht durch unendliche Reihen darstellen. Ist nämlich

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

und ersetzt man in dieser Reihe die Potenzen von x mittelst der Formel (24.) durch ihre Werthe ausgedrückt in Polynomen X, so erhält man für $f(x)$ eine Reihe von der Form (I.), in welcher der Coefficient A_n durch die Reihe gegeben ist

$$(38.)\qquad (2n+1)\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)}$$
$$\times\left(a_n+\frac{(n+1)(n+2)}{2.(2n+3)}a_{n+2}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)}a_{n+4}+\cdots\right).$$

Hat man also den Coefficienten A_n in endlicher Form gefunden, so ist hiermit auch die Summe dieser Reihe bestimmt.

Von den vielen Reihen, deren Summe sich auf diese Weise aus den in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Entwicklungen ergiebt, will ich nur folgende anführen.

1) Ist $f(x) = e^{ax}$, so ist $a_n = \frac{a^n}{1.2.3\ldots n}$. Substituirt man diesen Werth in die Reihe (38.), so giebt die Vergleichung mit dem in §. 2 gefundenen Werthe von A_n

$$(39.)\quad 1 + \frac{a^2}{2.(2n+3)} + \frac{a^4}{2.4.(2n+3)(2n+5)} + \frac{a^6}{2.4.6.(2n+3)(2n+5)(2n+7)} + \cdots$$
$$= (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.a^{n+1}} (P_n e^a - Q_n e^{-a})$$
$$= (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{a^{n+1}} \left(Q'_n \frac{e^a - e^{-a}}{2} - P'_n \frac{e^a + e^{-a}}{2}\right),$$

wo P_n, Q_n aus dem Kettenbruch (3.), P'_n, Q'_n aus dem Kettenbruch (3'.) zu entnehmen sind.

2) Ist $f(x) = \cos ax + \sin ax \sqrt{-1}$, so findet man ebenso aus §. 2

$$(40.)\quad 1 - \frac{a^2}{2.(2n+3)} + \frac{a^4}{2.4.(2n+3)(2n+5)} - \cdots$$
$$= \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{a^{n+1}} (Q_n \sin a - P_n \cos a),$$

wo P_n und Q_n sich auf den Kettenbruch (6.) für $\operatorname{tang} a$ beziehen.

3) Sei $f(x) = (a+x)^{m-1}$, so wird nach (38.), da nun

$$a_n = \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n} a^{m-n-1}$$

ist,

$$A_n = (2n+1) \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.3.5\ldots(2n+1)} a^{m-n-1} \left(1 + \frac{(m-n-1)(m-n-2)}{2.(2n+3)} a^{-2} + \text{etc.}\right).$$

Die in der Klammer stehende hypergeometrische Reihe ist nach der Bezeichnung von *Gaufs*

$$F\left(\tfrac{1}{2}(n-m+1),\ \tfrac{1}{2}(n-m+2),\ \tfrac{1}{2}(2n+3),\ \frac{1}{a^2}\right).$$

Bezeichnen wir sie kürzer mit $F(n-m+1)$, so giebt die Vergleichung dieses Ausdrucks von A_n mit Formel (22.) §. 5, wenn man in dieser $m-1$ statt m setzt

$$(41.)\quad F(n-m+1) = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n+1)\, a^{n-m+1}}{(m-n)(m-n+1)\ldots(m+n)} (Q_n f_1(a) - P_n f_2(a)),$$

wo nun $f_1(a) = \frac{1}{2}[(a+1)^m - (a-1)^m]$, $f_2(a) = \frac{1}{2}[(a+1)^m + (a-1)^m]$ und P_n und Q_n aus dem Kettenbruch

$$\frac{(a+1)^m - (a-1)^m}{(a+1)^m + (a-1)^m} = \frac{0}{1} + \cfrac{m}{a + \cfrac{(m-1)(m+1)}{3a + \cfrac{(m-2)(m+2)}{5a + \cdots}}}$$

zu nehmen sind. Die Herleitung der Gleichung (41.) setzt voraus, dafs m keine der ganzen Zahlen 1, 2, ... n ist. Ferner gilt die Gleichung (41.) nicht nach §. 5, wenn m eine der negativen ganzen Zahlen $-1, -2, \ldots -n$ oder Null ist. Die Formel (41.) gilt mithin für jeden Werth von m, ausgenommen wenn m eine der ganzen Zahlen von $-n$ bis $+n$ ist, die Null mit einbegriffen.

Ist aber m eine negative ganze Zahl oder Null, so hat man nach (32.), wenn wir $-m$ statt m schreiben

$$(42.)\quad \begin{cases} F(n+m+1) = (-1)^m \dfrac{1.3.5\ldots(2n+1)}{1.2.3.4\ldots(n+m)} a^{n+m+1} \dfrac{\partial^m Y_n(a)}{\partial a^m} \\ \qquad = (-1)^m \dfrac{1.2.3\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots(n+m)} a^{n+m+1} \displaystyle\int^{(n-m+1)} \dfrac{\partial a^{n-m+1}}{(1-a^2)^{n+1}}. \end{cases}$$

Ist hingegen m eine positive ganze Zahl kleiner als $n+1$, so ergiebt sich mittelst der in §. 7 gegebenen Formeln

$$(43.)\quad F(n-m+1) = (-1)^m \frac{1.2.3\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots(n-m)} a^{n-m+1} \int^{(n+m+1)} \frac{\partial a^{n+m+1}}{(1-a^2)^{n+1}}.$$

Dieses $n+m+1$fache Integral läfst sich aber, wenn $m < n+1$, auf das $n-m+1$fache zurückführen. Denn es läfst sich aus der Differentialgleichung, welcher $Y_n(x)$ genügt (§. 7), nachweisen, dafs für $m < n+1$

$$\int^{(m)} Y_n(x)\,\partial x = \frac{(x^2-1)^m}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n+m)} \cdot \frac{\partial^m Y_n(x)}{\partial x^m}$$

ist, also

$$(44.)\quad \int^{(n+m+1)} \frac{\partial x^{n+m+1}}{(1-x^2)^{n+1}} = \frac{(x^2-1)^m}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n+m)} \int^{(n-m+1)} \frac{\partial x^{n-m+1}}{(1-x^2)^{n+1}}$$

eine Gleichung, ganz analog der schon von *Jacobi* für die Differentialquotienten von $(x^2-1)^n$ gegebenen.

Statt Formel (43.) kann man also auch schreiben

$$(45.)\quad F(n-m+1)$$
$$= (-1)^m \frac{1.2.3\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots(n+m)} a^{n-m+1} (a^2-1)^m \int^{(n-m+1)} \frac{\partial a^{n-m+1}}{(1-a^2)^{n+1}}.$$

Aus der Vergleichung dieser Formel mit Formel (42.) folgt

$$(46.)\quad F(n-m+1) = a^{-2m}(a^2-1)^m F(n+m+1) = \left(1-\frac{1}{a^2}\right)^m F(n+m+1)$$

und zwar gilt diese Gleichung nicht nur, wenn m eine ganze Zahl ist, sondern sie drückt eine allgemeine Eigenschaft der Reihe $F(n-m+1)$ aus, indem man sich leicht überzeugt, dafs auch die Summenformel (41.) dieselbe Eigenschaft besitzt.

Die Gleichung (42.) gilt auch, wenn m eine positive ganze Zahl gröfser als n ist, dasselbe ist mithin mit Gleichung (45.) der Fall. Beide Formeln werden in diesem Falle algebraisch und fallen mit (41.) zusammen.

Bisher war $a > 1$ vorausgesetzt; ist aber $a = 1$, so ist die Reihe nur convergent, wenn m eine positive Gröfse ist. Unter dieser Bedingung ist für $a = 1$

$$F(n-m+1) = \frac{1.3.5\ldots 2n+1}{m(m+1)\ldots(m+n)} 2^{m-1},$$

wie man entweder aus den hier aufgestellten Formeln, oder aus den von *Gaufs* in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe gegebenen, finden kann.

München, Juni 1858.