25.

Démonstration nouvelle du théorème du binome.

(Par l'Editeur.)

Il y a plusieurs démonstrations différentes du binome; mais toutes celles que je connois, laissent encore, à ce que je crois, plus ou moins à désirer. Ou elles procèdent du cas particulier au cas général, par une sorte d'induction plus ou moins vicieuse, par laquelle on cache plutôt les difficultés qu'on ne les lève, ou elles supposent une partie plus ou moins grande de ce qu'il s'agit de démontrer, par exemple la forme de la série du développement; ou bien elles sont tellement métaphysiques, qu'elles, ne peuvent entrer convenablement dans une saine analyse mathématique; ou enfin elles sont incomplètes, surtout en ce qui regarde le reste de la série, dont le développement ne donne pas l'expression.

Donc une démonstration complète du théorème du binome, vraiment rigoureuse et générale, et en même tems tellement claire et élémentaire, qu'elle soit accessible aux premiers commençans, est encore à désirer. Ce théorème étant une des parties les plus essentielles et des plus remarquables des élémens, sa démonstration semble être importante pour les traités élémentaires de l'analyse et pour l'enseignement de cette science.

Je vais présenter ici une démonstration qui semble satisfaire à toutes les demandes qu'on puisse lui faire. Elle découle, comme corollaire, de la théorie nouvelle et générale des puissances et des facultés analytiques, dont j'ai tracé les premières idées dans un petit écrit en Allemand, sous le titre (*Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten etc. Berlin bei* Reimer, 1823.) et qui tire ses développemens de cette formule générale de développement, que j'ai nommée Théorème général de Taylor, pour le distinguer du théorème particulier connu sous ce nom, et qui, dans toute sa généralité, peut être démontré avec la même simplicité et rigueur qu'on remarquera dans la démonstration du théorème du binome qui va suivre. Je me propose de reproduire, à l'occasion, la théorie générale dont je parle, refondue et complétée. La démonstration du binome que je donne ici, est un échantillon de ce traité plus étendu.

Ecrivons l'équation identique

$$1.\quad a^{x+k} = a^x.1^k + k.\frac{a^{x+k} - a^x.1^k}{k}.$$

Le facteur 1^k doit être ajouté aux termes a^x pour faire égaler les nombres des racines différentes qui peuvent avoir lieu des deux cotés de l'équation.

Supposant pour abréger

$$2.\quad \frac{a^{x+k} - a^x.1^k}{k} = p,$$

on a:

$$3.\quad a^{x+k} = a^x.\,1^k + kp.$$

Cela posé, faisons augmenter x de 1 et en même tems diminuer k de 1, de sorte que la valeur de $x+k$ reste la même, l'équation (3.) se changera en

$$4.\quad a^{x+k} = a^{x+1}.1^k + (k-1)p_1,$$

en désignant par p_1 la valeur variée de p, et en remarquant que $1^{k-1} = 1^k$.

Retranchons l'équation (3.) de celle (4.), nous aurons:

$$5.\quad 0 = (a^{x+1} - a^x)1^k + (k-1)(p_1 - p) - p.$$

Désignons, comme à l'ordinaire, la différence entre la valeur variée et la valeur primitive d'une quantité quelconque par Δ, mis devant le signe de la quantité, l'équation (5.) pourra être présentée sous la forme:

$$6.\quad 0 = \Delta(a^x.1^k) + (k-1)\Delta p - p.$$

Augmentons de nouveau dans cette équation x de 1, et diminuons k de 1, nous aurons

$$7.\quad 0 = \Delta(a^{x+1}.1^k) + (k-2)\Delta p_1 - p_1.$$

Retranchons de cette équation celle (6.), le reste sera

$$8.\quad 0 = \Delta(a^{x+1}.1^k) - \Delta(a^x.1^k) + (k-2)(\Delta p_1 - \Delta p) - \Delta p - (p_1 - p),$$

ou, parcequ'en vertu de l'algorithme de Δ, la différence de différences peut être désignée par Δ^2:

$$9.\quad 0 = \Delta^2(a^x.1^k) + (k-2)\Delta^2 p - 2\Delta p.$$

La première répétition de l'opération qu'on vient de faire, donnera:

$$10.\quad 0 = \Delta^3(a^x.1^k) + (k-3)\Delta^3 p - 3\Delta^2 p,$$

et on pourra continuer cette opération à volonté.

En résumant les équations (3., 6., 9., 10.) et celles qui les suivent, on aura, en transportant en même tems au coté gauche les derniers termes des équations (3., 6., 9., 10. etc.), et en divisant les équations qu'on trouve par les coëfficiens de Δp, $\Delta^2 p$ etc.:

$$11.\quad \left\{\begin{aligned} a^{x+k} &= a^x.1^k + kp,\\ p &= \Delta(a^x.1^k) + (k-1)\Delta p,\\ \Delta p &= \frac{\Delta^2(a^x.1^k)}{2} + \frac{k-2}{2}\Delta^2 p,\\ \Delta^2 p &= \frac{\Delta^3(a^x.1^k)}{3} + \frac{k-3}{3}\Delta^3 p,\\ &\dots\dots\dots\\ \Delta^{n-2} p &= \frac{\Delta^{n-1}(a^x.1^k)}{n-1} + \frac{k-(n-1)}{n-1}\Delta^{n-1} p,\\ \Delta^{n-1} p &= \frac{\Delta^{n}(a^x.1^k)}{n} + \frac{k-n}{n}\Delta^{n} p,\\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Substituant successivement ces équations l'une dans l'autre, on trouvera

$$12.\quad \left\{\begin{aligned} a^{x+k} &= a^x.1^k + kp,\\ a^{x+k} &= a^x.1^k + k\Delta(a^x.1^k) + k.(k-1)\Delta p,\\ a^{x+k} &= a^x.1^k + k\Delta(a^x.1^k) + \frac{k.k-1}{2}\Delta^2(a^x.1^k) + \frac{k.k-1.k-2}{2}\Delta^2 p,\\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

et généralement, si l'on substitue la valeur $\frac{a^{x+k}-a^x.1^k}{k}$ de p (2.):

$$13.\quad a^{x+k} = a^x.1^k + k\Delta(a^x.1^k) + \frac{k.k-1}{2}\Delta^2(a^x.1^k)\dots\dots + \frac{k.k-1\dots k-(n-1)}{2.3\dots n}\Delta^n(a^x.1^k) + \frac{k.k-1\dots(k-n)}{2.3\dots n}\Delta^n\left(\frac{a^{x+k}-a^x.1^k}{k}\right).$$

Mais $\Delta(a^x.1^k)$ n'est autre chose que

$$a^{x+1}.1^{k-1} - a^x.1^k = (a^{x+1}-a^x)1^k = a^x.1^k(a-1);$$

donc $\Delta^2(a^x.1^k)$ est égal à $(a-1)\Delta(a^x.1^k) = a^x.1^k(a-1)^2$; $\Delta^3(a^x.1^k)$ est égal à $a^x.1^k(a-1)^3$ etc. Donc l'équation (13.) donne:

$$16.\quad a^{x+k} = a^x.1^k\left[1 + k(a-1) + \frac{k.k-1}{2}(a-1)^2 + \dots + \frac{k.(k-1)\dots[k-(n-1)]}{2.3\dots n}(a-1)^n\right] + \frac{k.(k-1)\dots(k-n)}{2.3\dots n}\Delta^n\left(\frac{a^{x+k}-a^x.1^k}{k}\right).$$

Faisant dans cette équation $x=0$ et écrivant $a+1$ au lieu de a, on aura:

$$15.\quad (1+a)^k = 1^k\left[1 + ka + \frac{k.k-1}{2}a^2 + \frac{k.k-1.k-2}{2.3}a^3 + \dots + \frac{k.k-1\dots[k-(n-1)]}{2.3\dots n}a^n\right] + \frac{k(k-1)\dots(k-n)}{2.3\dots n}\Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=0)+k}-(1+a)^{x(=0)}1^k}{k}\right).$$

Voila la formule connue de développement d'une puissance quelconque du binome, mais complétée par l'expression de la valeur exacte du reste de la série, et en même tems du facteur 1^k, qui exprime les racines ou valeurs différentes que peut avoir l'expression $(1+a)^k$.

Comme on voit, il n'a été rien supposé arbitrairement; il n'y a non plus aucune condition ou restriction à faire pour les valeurs de la base et de l'exposant du binome. Le développement a été fondé seulement sur une équation identique, et ne consiste qu'en transformations algébriques.

L'expression finale elle même n'est effectivement qu'identique, comme on peut le voir en développant l'expression du reste. Ce développement fait, tous les termes à droite se détruiront, excepté le seul terme $(1+a)^k$, et l'équation rentrera à l'expression identique $(1+a)^k = (1+a)^k$. Donc la démonstration du théorème de binome, que nous venons de présenter, est parfaitement générale et rigoureuse, en même tems qu'elle est élémentaire.

Berlin, le 2. Avril 1829.