

SUGL'INTEGRALI DELLE EQUAZIONI  
DEL MOTO D'UN PUNTO  
CHE SONO FUNZIONI LINEARI  
FRATTE DELLE VELOCITÀ COMPONENTI (\*)

Nota di G. Vivanti, in Mantova.

---

Adunanza del 10 luglio 1892

---

1 In un lavoro recente (\*\*) abbiamo esteso allo spazio un problema trattato da Bertrand (\*\*\*) pel moto d'un punto nel piano. Ci proponiamo ora di fare la stessa cosa per un altro problema di cui si è pure occupato Bertrand nella Memoria testè citata, e cioè per lo studio degli integrali primi delle equazioni del moto che sono funzioni lineari frazionarie delle componenti della velocità.

---

(\*) La questione della ricerca di integrali appartenenti ad intere classi di problemi della dinamica è trattata da un punto di vista molto generale nella Nota del prof. Padova *Sugli integrali comuni a più problemi di dinamica* (Atti dell'Istituto Veneto, serie 6, t. I). Vedansi pure le memorie di Bertrand, Korkine e Pennacchietti citate in quello scritto.

(\*\*) *Su certi integrali primi delle equazioni del moto d'un punto* (Rend. dell'Istituto Lombardo, 1892).

(\*\*\*) Journal de mathématiques, 2<sup>e</sup> série, t. II, 1857

La forma generale d'un integrale di questa natura è

$$\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{Ex' + Fy' + Gz' + H} = \text{cost}, \quad (1)$$

dove le  $A, \dots, H$  sono funzioni delle coordinate. Derivando rispetto al tempo, sostituendo ad  $x'', y'', z''$  rispettivamente  $X, Y, Z$ , e sopprimendo il denominatore comune  $(Ex' + Fy' + Gz' + H)^2$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= (Ex' + Fy' + Gz' + H)[(AX + BY + CZ) \\ &+ x'(A_1x' + A_2y' + A_3z') + y'(B_1x' + B_2y' + B_3z') \\ &+ z'(C_1x' + C_2y' + C_3z') + (D_1x' + D_2y' + D_3z')] \\ &- (Ax' + By' + Cz' + D)[(EX + FY + GZ) \\ &+ x'(E_1x' + E_2y' + E_3z') + y'(F_1x' + F_2y' + F_3z') \\ &+ z'(G_1x' + G_2y' + G_3z') + (H_1x' + H_2y' + H_3z')] \\ &= (EA_1 - AE_1)x'^3 + (FB_2 - BF_2)y'^3 + (GC_3 - CG_3)z'^3 \\ &+ (FB_3 - BF_3 + FC_2 - CF_2 + GB_2 - BG_2)y'^2z' \\ &+ (GC_2 - CG_2 + FC_3 - CF_3 + GB_3 - BG_3)y'z'^2 \\ &+ (GC_1 - CG_1 + GA_3 - AG_3 + EC_3 - CE_3)z'^2x' \\ &+ (EA_3 - AE_3 + GA_1 - AG_1 + EC_1 - CE_1)z'x'^2 \\ &+ (EA_2 - AE_2 + EB_1 - BE_1 + FA_1 - AF_1)x'^2y' \\ &+ (FB_1 - BF_1 + EB_2 - BE_2 + FA_2 - AF_2)x'y'^2 \\ &+ (EB_3 - BE_3 + FC_1 - CF_1 + GA_2 - AG_2 + EC_2 - CE_2 \\ &+ FA_3 - AF_3 + GB_1 - BG_1)x'y'z' + (ED_1 - DE_1 + HA_1 - AH_1)x'^2 \\ &+ (FD_2 - DF_2 + HB_2 - BH_2)y'^2 + (GD_3 - DG_3 + HC_3 - CH_3)z'^2 \\ &+ (FD_3 - DF_3 + GD_2 - DG_2 + HB_3 - BH_3 + HC_2 - CH_2)y'z' \\ &+ (GD_1 - DG_1 + ED_3 - DE_3 + HC_1 - CH_1 + HA_3 - AH_3)z'x' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (ED_2 - DE_2 + FD_1 - DF_1 + HA_2 - AH_2 + HB_1 - BH_1)x'y' \\
& + (HD_1 - DH_1 + EU - AV)x' + (HD_2 - DH_2 + FU - BV)y' \\
& + (HD_3 - DH_3 + GU - CV)z' + (HU - DV),
\end{aligned}$$

dove si è posto per brevità :

$$AX + BY + CZ = U, \quad EX + FY + GZ = V.$$

Segue di qui :

$$EA_1 - AE_1 = 0, \quad FB_2 - BF_2 = 0, \quad GC_3 - CG_3 = 0; \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned}
& FB_3 - BF_3 + FC_2 - CF_2 + GB_2 - BG_2 = 0, \\
& GC_2 - CG_2 + FC_3 - CF_3 + GB_3 - BG_3 = 0, \\
& GC_1 - CG_1 + GA_3 - AG_3 + EC_3 - CE_3 = 0, \\
& EA_3 - AE_3 + GA_1 - AG_1 + EC_1 - CE_1 = 0, \\
& EA_2 - AE_2 + EB_1 - BE_1 + FA_1 - AF_1 = 0, \\
& FB_1 - BF_1 + EB_2 - BE_2 + FA_2 - AF_2 = 0;
\end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned}
& EB_3 - BE_3 + FC_1 - CF_1 + GA_2 - AG_2 + EC_2 - CE_2 \\
& + FA_3 - AF_3 + GB_1 - BG_1 = 0;
\end{aligned} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{aligned}
& ED_1 - DE_1 + HA_1 - AH_1 = 0, \quad FD_2 - DF_2 + HB_2 - BH_2 = 0, \\
& GD_3 - DG_3 + HC_3 - CH_3 = 0;
\end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned}
& FD_3 - DF_3 + GD_2 - DG_2 + HB_3 - BH_3 + HC_2 - CH_2 = 0, \\
& GD_1 - DG_1 + ED_3 - DE_3 + HC_1 - CH_1 + HA_3 - AH_3 = 0, \\
& ED_2 - DE_2 + FD_1 - DF_1 + HA_2 - AH_2 + HB_1 - BH_1 = 0;
\end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned}
& HD_1 - DH_1 + EU - AV = 0, \quad HD_2 - DH_2 + FU - BV = 0, \\
& HD_3 - DH_3 + GU - CV = 0;
\end{aligned} \right\} (7)$$

$$HU - DV = 0. \quad (8)$$

Dalle (2) si ha

$$A = E\lambda(y, z), \quad B = F\mu(z, x), \quad C = G\nu(x, y) \quad (9)$$

Supporremo che nessuna delle  $\lambda, \mu, \nu$  si riduca ad una costante, e che esse siano tra loro diverse, omettendo per brevità i casi particolari derivanti dall'ipotesi contraria, i quali d'altronde sono assai facili a svolgersi e conducono a risultati compresi in quelli a cui noi giungeremo. Le (3) divengono in virtù delle (9)

$$\left. \begin{aligned} F(F\mu_3 + G\nu_2) - (FG_2 - GF_2)(\mu - \nu) &= 0, \\ G(F\mu_3 + G\nu_2) - (FG_3 - GF_3)(\mu - \nu) &= 0, \\ G(G\nu_1 + E\lambda_3) - (GE_3 - EG_3)(\nu - \lambda) &= 0, \\ E(G\nu_1 + E\lambda_3) - (GE_1 - EG_1)(\nu - \lambda) &= 0, \\ E(E\lambda_2 + F\mu_1) - (EF_1 - FE_1)(\lambda - \mu) &= 0, \\ F(E\lambda_2 + F\mu_1) - (EF_2 - FE_2)(\lambda - \mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

Posto :

$$\frac{G}{F} = P, \quad \frac{E}{G} = Q, \quad \frac{F}{E} = R,$$

le ultime due delle (3') possono scriversi così

$$R_1 - \frac{\mu_1}{\lambda - \mu} R = \frac{\lambda_2}{\lambda - \mu}, \quad \left(\frac{1}{R}\right)_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda - \mu} \frac{1}{R} = - \frac{\mu_1}{\lambda - \mu}.$$

Integrando e designando con  $\rho, \sigma$  due funzioni arbitrarie si ha:

$$R = \frac{1}{\lambda - \mu} [\lambda_2 x - \rho(y, z)], \quad \frac{1}{R} = - \frac{1}{\lambda - \mu} [\mu_1 y - \sigma(x, z)],$$

quindi :

$$(\mu - \lambda)^2 + (\sigma - \mu_1 y)(\rho - \lambda_2 x) = 0$$

La soluzione più generale di questa identità, in cui  $z$  figura come un parametro, è (\*)

$$\lambda = \frac{a'y + b'}{c'y + d'}, \quad \mu = \frac{ax + b}{cx + d},$$

$$\rho = \frac{a'c'y + a'd' - ad}{ac(c'y + d')^2}, \quad \sigma = \frac{acx + ad - a'd'}{a'c'(cx + d')^2},$$

dove  $a, b, c, d, a', b', c', d'$  sono funzioni di  $z$  legate dalle relazioni:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad ad - bc = a'd' - b'c' = 1. \quad (10)$$

Ne segue.

$$R = \frac{(acx - a'c'y + ad - a'd')(cx + d)}{ac(c'y + d')[c b' - a d']x + (d a' - b c')y + (d b' - b d')}.$$

Ora si ha, denotando con  $e$  il valore comune dei rapporti  $\frac{a}{a'}, \frac{c}{c'}$ .

$$cb' - ad' = -e(a'd' - b'c') = -e, \quad da' - bc' = \frac{1}{e}(ad - bc) = \frac{1}{e},$$

$$db' - bd' = d \frac{a'd' - 1}{c'} - d' \frac{ad - 1}{c} = \frac{d'}{c} - \frac{d}{c'} = -\frac{ad - a'd'}{e a' c'},$$

quindi:

$$(cb' - ad')x + (da' - bc')y + (db' - bd')$$

$$= -\frac{1}{e a' c'} [a' c' e^2 x - a' c' y + ad - a'd']$$

$$= -\frac{1}{e a' c'} [acx - a' c' y + ad - a'd'],$$

(\*) V Bertrand, Mem cit, e la Nota *Sulla determinazione di quattro funzioni mediante un'equazione unica* (Rend del Circ. Matem., 1892).

e infine,

$$R = -\frac{1}{e} \frac{cx + d}{c'y + d'} = -\frac{x + \frac{d}{c}}{y + \frac{d'}{c'}}$$

La 3<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup> delle (3') condurrebbero analogamente ad espressioni della forma:

$$\nu = \frac{\bar{a}'x + \bar{b}'}{\bar{c}'x + \bar{d}'}, \quad \lambda = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}},$$

in cui i coefficienti dipendono da  $y$ . Eguagliando i due valori di  $\lambda$ , si ha:

$$(a'y + b')(\bar{c}z + \bar{d}) - (c'y + d')(\bar{a}z + \bar{b}) = 0.$$

Se in questa relazione, che dev'essere soddisfatta identicamente tanto rispetto ad  $y$  che rispetto a  $z$ , noi diamo successivamente a  $z$  tre valori particolari, le tre equazioni risultanti, le quali contengono la sola variabile  $y$ , ci daranno ciascuno dei rapporti  $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$  espresso mediante il quoziente di due polinomi di 3° grado in  $y$ , sicchè potremo scrivere.

$$\lambda = \frac{\varphi^{(1)}z + \varphi^{(2)}}{\varphi^{(3)}z + \varphi^{(4)}},$$

dove le  $\varphi$  rappresentano delle funzioni intere di terzo grado di  $y$ . Ma poichè d'altra parte  $\lambda$ , come risulta dalla sua prima espressione, dev'essere il quoziente di due funzioni lineari di  $y$ , le  $\varphi^{(1)}$ ,  $\varphi^{(2)}$ ,  $\varphi^{(3)}$ ,  $\varphi^{(4)}$  avranno necessariamente un fattore quadratico comune, e  $\lambda$  sarà una funzione bilineare fratta di  $y$ ,  $z$ . Potremo porre cioè

$$\lambda = \frac{ayz + by + cz + d}{eyz + fy + gz + h}, \quad \mu = \frac{a'zx + b'z + c'x + d'}{e'zx + f'z + g'x + h'},$$

$$\nu = \frac{a''xy + b''x + c''y + d''}{e''xy + f''x + g''y + h''},$$

dove le  $a, b,$  sono costanti. Ne segue

$$P = - \frac{e''xy + f''x + g''y + h''}{e'zx + f'z + g'x + h'} \cdot \frac{e'x + f'}{e'y + g'}$$

$$Q = - \frac{eyz + fy + gz + h}{e''xy + f''x + g''y + h''} \cdot \frac{e''y + f''}{e'y + g'}$$

$$R = - \frac{e'zx + f'z + g'x + h'}{eyz + fy + gz + h} \cdot \frac{e'z + f}{e'z + g'}$$

Dopo ciò si ha per la relazione  $PQR = 1$ :

$$(e'x + f')(e''y + f'')(e'z + f) = -(e''x + g'')(ey + g)(e'z + g') \quad (11)$$

Confrontando i termini di 3° grado si vede che  $ee'e'' = 0$ , ma se  $e = 0$  il primo membro non contiene  $z$ , quindi nel secondo dev'essere  $e' = 0$ , e parimenti il secondo membro non contiene  $y$ , quindi nel primo dev'essere  $e'' = 0$ , sicchè si ha  $e = e' = e'' = 0$ . Inoltre segue dalla prima delle (10) (\*)

$$\begin{aligned} \frac{a'z + c'}{e'z + g'} &= \frac{az + b}{e'z + f}, & \frac{a''x + c''}{e''x + g''} &= \frac{a'x + b'}{e'x + f'}, \\ \frac{ay + c}{ey + g} &= \frac{a''y + b''}{e''y + f''}, \end{aligned} \quad (12)$$

sicchè dalla (11) si ha

$$(a'x + b')(a''y + b'')(az + b) = -(a''x + c'')(ay + c)(a'z + c'),$$

da cui collo stesso ragionamento di prima si deduce  $a = a' = a'' = 0$ .

(\*) Rammentiamo che le  $a, c, a', c'$  che figurano in quella formola corrispondono rispettivamente ai binomi  $a'z + c', e'z + g', az + b, e'z + f$  nella notazione attuale.

Dalle (11), (12) si ha poi

$$ff'f'' = -gg'g'', bb'b'' = -cc'c'', c'f = g'b, c''f' = g''b', cf'' = gb'',$$

sicchè le espressioni delle  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  possono scriversi così.

$$\lambda = \frac{by + b''\frac{g}{f''}\alpha + d}{fy + g\alpha + h} = \frac{bf''y + gb''\alpha + df''}{ff''y + gf''\alpha + hf''},$$

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{b'\alpha + b\frac{g'}{f}x + d'}{f'\alpha + g'x + b'} = \frac{b'f\alpha + g'b'x + d'f}{f'f\alpha + g'fx + b'f} \\ &= \frac{gg''\frac{b'}{f'}\alpha - bf''x + \frac{d'gg''}{f'}}{gg''\alpha - ff''x + \frac{b'gg''}{f'}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{b''x + b'\frac{g''}{f'}y + d''}{f''x + g''y + b''} = \frac{b''f'x + g''b'y + d''f'}{f''f'x + g''f'y + b''f'} \\ &= \frac{-gb''x - \frac{gg''b'}{f'}y - gd''}{-gf''x - gg''y - gb''},\end{aligned}$$

ossia introducendo nuove costanti

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{a''y - a'\alpha + b}{c''y - c'\alpha + d} = \frac{\xi}{\xi'}, \quad \mu = \frac{a\alpha - a''x + b'}{c\alpha - c''x + d'} = \frac{\eta}{\eta'}, \\ \nu &= \frac{a'x - ay + b''}{c'x - cy + d''} = \frac{\zeta}{\zeta'},\end{aligned}$$

e per conseguenza

$$P = \frac{c'x - cy + d''}{c\alpha - c''x + d'} = \frac{\zeta'}{\eta'}, \quad Q = \frac{c''y - c'\alpha + d}{c'x - cy + d''} = \frac{\xi'}{\zeta'},$$

$$R = \frac{c\alpha - c''x + d'}{c''y - c'\alpha + d} = \frac{\eta'}{\xi'},$$

$$A = \frac{G}{\zeta'} \xi, \quad B = \frac{G}{\xi'} \eta, \quad C = \frac{G}{\zeta'} \zeta, \quad E = \frac{G}{\zeta'} \xi', \quad F = \frac{G}{\xi'} \eta'$$



Ponendo invece di  $D$ ,  $H$  rispettivamente  $\frac{G}{\zeta'} D$ ,  $\frac{G}{\zeta'} H$ , risulta dopo aver tolto dal numeratore e dal denominatore dell'integrale il fattor comune  $\frac{G}{\zeta'}$ .

$$\left. \begin{aligned} A &= a''y - a'\zeta + b = \xi, & B &= a\zeta - a''x + b' = \eta, \\ C &= a'x - ay + b'' = \zeta, \\ E &= c''y - c'\zeta + d = \xi', & F &= c\zeta - c''x + d' = \eta', \\ G &= c'x - cy + d'' = \zeta'. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Si verifica senza difficoltà che la (4) è identicamente soddisfatta.

2. Dalle (13) si ha.

$$\begin{aligned} A_1 &= B_2 = C_3 = E_1 = F_2 = G_3 = 0, & B_3 + C_2 &= C_1 + A_3, \\ &= A_2 + B_1 = F_3 + G_2 = G_1 + E_3 = E_2 + F_1 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

quindi le (5), (6) divengono:

$$ED_1 - AH_1 = 0, \quad FD_2 - BH_2 = 0, \quad GD_3 - CH_3 = 0, \quad (5')$$

$$\begin{aligned} FD_3 + GD_2 - BH_3 - CH_2 &= 0, & GD_1 + ED_3 - CH_1 - AH_3 &= 0, \\ ED_2 + FD_1 - AH_2 - BH_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6')$$

Dalle (5') segue, in virtù delle (9):

$$D_1 = \lambda H_1, \quad D_2 = \mu H_2, \quad D_3 = \nu H_3; \quad (15)$$

dopo ciò le (6') divengono, tenuto conto anche delle (14)

$$(\mu - \nu)(GH_2 - FH_3) = 0, \quad (\nu - \lambda)(EH_3 - GH_1) = 0,$$

$$(\lambda - \mu)(FH_1 - EH_2) = 0,$$

ossia, rammentando che le  $\lambda, \mu, \nu$  sono per ipotesi diverse tra loro.

$$GH_2 - FH_3 = 0, EH_3 - GH_1 = 0, FH_1 - EH_2 = 0, \quad (16)$$

od anche

$$\frac{H_1}{E} = \frac{H_2}{F} = \frac{H_3}{G}, \quad (17)$$

da cui segue per le (9), (15).

$$\frac{D_1}{A} = \frac{D_2}{B} = \frac{D_3}{C}. \quad (18)$$

Indichiamo con  $T_1, T_2$  i primi membri delle due prime equazioni (16); avremo

$$\begin{aligned} (T_1 T_2) &= (FG_3 - GG_2)H_1 + (GG_1 - EG_3)H_2 + (GE_2 - FE_3 + EF_3 - GF_1)H_3, \\ &= cGH_1 + c'GH_2 + (2c''G + c'F + cE)H_3, \end{aligned}$$

ossia per le (16):

$$(T_1 T_2) = 2(cE + c'F + c''G)H_3.$$

Dev'essere quindi  $cE + c'F + c''G = 0$ , ossia .

$$cd + c'd' + c''d'' = 0, \quad (19)$$

ed analogamente .

$$ab + a'b' + a''b'' = 0. \quad (20)$$

Integrando ora i sistemi (17), (18) si ottiene rispettivamente .

$$H = \psi\left(\frac{E}{F}\right), \quad D = \varphi\left(\frac{A}{B}\right),$$

$\varphi$  e  $\psi$  essendo due funzioni arbitrarie da determinarsi in modo che sieno soddisfatte le (15). È facile però accertarsi che è sufficiente

che una di queste equazioni sia soddisfatta perchè lo sieno anche le altre.

Prendiamo la seconda delle (15), introducendo in essa le espressioni di  $D$ ,  $H$  testè trovate otteniamo

$$\frac{a''}{B^2} \varphi' \left( \frac{A}{B} \right) = \frac{c''}{F^2} \psi' \left( \frac{E}{F} \right)$$

In un'altra ricerca (\*) ci siamo incontrati in una relazione analoga a questa, ed abbiamo trovato che ciascuna delle  $\varphi$ ,  $\psi$  deve essere una funzione lineare fratta del proprio argomento. Si ha quindi

$$D = \frac{eA + fB}{gA + hB}, \quad H = \frac{e'E + f'F}{g'E + h'F},$$

i denominatori poi non possono differire che per un fattore costante, sicchè posto

$$J = kx + ly + mz + n,$$

può scriversi

$$D = \frac{pA + qB}{J}, \quad H = \frac{rE + sF}{J}.$$

Per trovare quali relazioni debbano aver luogo tra le costanti  $k$ ,  $l$ , etc. introduciamo le espressioni testè scritte nella seconda delle (15), moltiplicando per  $J^2 FB$  otteniamo

$$\begin{aligned} & F\{(pk + ql)a''x + [p(a'l + a''m) - qal]\chi + [p(a''n - bl) - qb'l]\} \\ & = B\{(rk + sl)c''x + [r(c'l + c''m) - scl]\chi + [r(c''n - dl) - sd'l]\}, \end{aligned}$$

donde risulta che i fattori tra parentesi che figurano nel primo e nel secondo membro devono essere eguali rispettivamente a  $-(pk + ql)B$  e a  $-(rk + sl)F$ , e che dev'essere inoltre  $pk + ql = rk + sl$ . Egualizzando i coefficienti delle variabili nei due membri delle equazioni.

$$S = -(pk + ql)B, \quad T = -(rk + sl)F,$$

(\*) *Sulle trasformazioni di contatto che trasformano qualunque sviluppabile in una sviluppabile* (Rend de' Circ Matem, 1891), § 9

dove  $S$ ,  $T$  denotano i fattori tra parentesi considerati, si ottiene:

$$p(a'l + a''m) - qal = -(pk + ql)a, \quad p(a'n - bl) - qb'l = -(pk + ql)b',$$

$$r(c'l + c''m) - scl = -(rk + sl)c, \quad r(c'n - dl) - sd'l = -(rk + sl)d',$$

da cui

$$k \ l \ m = a'c'' - a''c' \quad a''c - ac'' \quad ac' - a'c,$$

$$k \ l \ n = a''d - c''b \quad d'a'' - b'c'' \quad bd' - db',$$

e per conseguenza

$$\frac{a'c'' - a''c'}{a''c - ac''} = \frac{a''d - c''b}{a'a'' - b'c''},$$

inoltre la relazione  $pk + ql = rk + sl$  diviene

$$\frac{q - s}{p - r} = - \frac{k}{l}.$$

3 Dalle (15), (17), (18) segue

$$\frac{D_1}{A} = \frac{D_2}{B} = \frac{D_3}{C} = \frac{H_1}{E} = \frac{H_2}{F} = \frac{H_3}{G}$$

Denotando con  $M$  il valor comune di questi rapporti, e tenendo conto delle (9), si ha dalle (7)

$$U - MD = \lambda(V - MH), \quad U - MD = \mu(V - MH), \quad U - MD = \nu(V - MH),$$

quindi  $U - MD = V - MH = 0$ , donde segue  $U = MD$ ,  $V = MH$ . Per queste espressioni la (8) è identicamente soddisfatta. Da esse poi si ricavano due delle componenti della forza in funzione della terza, che può prendersi in modo affatto arbitrario. In ciò si nota una differenza dal caso del moto nel piano, nel quale la forma di ambe le componenti riesce pienamente determinata