Beiträge zur Theorie der ganzen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

Von **Ludwig Baumgartner** aus Landshut[1]).

Die vorliegende Arbeit bezweckt eine Übertragung der Untersuchungen über das Unendlichwerden ganzer Funktionen einer komplexen Veränderlichen von endlicher Ordnung im Unendlichen und dessen Zusammenhang sowohl mit dem infinitären Verhalten der Koeffizienten als mit der Verteilung der Nullstellen auf Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

In ihrem Aufbau und der durchweg elementaren Ableitung der Resultate, sowie auch in der Bezeichnung der Begriffe schließt sich die Arbeit ziemlich enge an die „Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung" an, wie sie Herr A. Pringsheim in den Math. Annalen, Bd. 58 (1904) veröffentlicht hat[2]). Daneben wurde eine von Herrn A. Pringsheim im Jahre 1910 über denselben Gegenstand gehaltene Vorlesung benützt, welche noch manche Vereinfachungen brachte, die sich auch bei Betrachtung der Funktionen zweier Veränderlichen als wertvoll erwiesen (insb. im II. Abschnitt).

Da beim Übergang zu Funktionen mehrerer Veränderlichen eine Reihe von Schwierigkeiten entsteht, für welche die Funktionen einer Veränderlichen kein Analogon bieten, konnte natürlich bei weitem nicht die Vollständigkeit erreicht werden, welche die entsprechende Theorie der ganzen Funktionen einer Veränderlichen auszeichnet. Zwar ließ sich bei den Untersuchungen über das Unendlichwerden selbst, sowie über den Zusammenhang des Unendlichwerdens mit dem infinitären Verhalten der Koeffizienten noch die allgemeine ganze Funktion zweier Veränderlicher von endlicher Ordnung zu Grunde legen. Dagegen gelang die Auffindung eines Zusammenhanges zwischen dem Unendlichwerden und der Nullstellen-Verteilung nur für eine sehr spezielle Klasse, die aber immer noch so allgemeiner Natur ist, daß sie jede ganze Funktion einer Veränderlichen liefert, wenn die eine der beiden Veränderlichen festgehalten wird.

---

[1]) Die Literatur über den im folgenden behandelten Gegenstand beschränkt sich, soviel ich weiß, auf eine Arbeit des Herrn Jules Sire in Bd. 31 (1911) der Rendiconti circ. mat. Palermo: „Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini". Doch beruht diese Arbeit im wesentlichen auf anderer Grundlage und verfolgt andere Ziele, hat daher mit der vorliegenden wenig Berührungspunkte. Vgl. übrigens Fußnote 2, p. 45.

[2]) Dort findet sich auch eine Zusammenstellung der wesentlichen Literatur über diesen Gegenstand.

Es mag hier ein Auszug aus dem Nachfolgenden Platz finden, der die Hauptresultate im Zusammenhang überblicken läßt:

Zur Charakterisierung des Unendlichwerdens der ganzen Funktion $g(x, y)$ dient das Verhalten der Maxima ihrer absoluten Beträge in Kreisgebieten um den Nullpunkt bei unbegrenzt wachsenden Radien. Diese Maxima erweisen sich als reelle, stetige und monotone Funktionen von $|x|$ und $|y|$ (I. Abschn., § 1). Es zeigt sich dann zunächst, daß das Verhalten einer ganzen rationalen Funktion $g(x, y)$ im Unendlichen sich durch dasjenige einer Summe von Potenzen $|x|^\alpha + |y|^{\alpha'}$ charakterisieren läßt, wobei die zulässigen Wertepaare α, α' eine unendliche Menge bilden (§ 2). Genauer wird auf die entsprechenden Verhältnisse eingegangen bei den nun folgenden Untersuchungen der ganzen transzendenten Funktionen $g(x, y)$; zur Abschätzung der für $|x| = r$, $|y| = r'$ mit $\bar{g}(r, r')$ bezeichneten Maxima der absoluten Beträge dient hier die Vergleichung mit Funktionen der Form $e^{r^\alpha + r'^{\alpha'}}$, und zwar werden als die im folgenden ausschließlich zu betrachtenden ganzen Funktionen nicht-unendlicher Ordnung diejenigen definiert, welche einer Ungleichung der Form

$$\bar{g}(r, r') < e^{r^\alpha + r'^{\alpha'}}$$

genügen, sofern nur $r^2 + r'^2$ eine gewisse positive Zahl übersteigt. Durch möglichste Verkleinerung der Exponenten a, a' ergibt sich das grundlegende Resultat, daß für jede ganze Funktion nicht-unendlicher Ordnung $g(x, y)$ eine unendliche Menge festbestimmter Wertepaare α, α' existieren derart, daß man für alle positiven δ, δ' hat:

$$\bar{g}(r, r') \begin{cases} < e^{r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'}} & \text{für alle } r, r', \text{ für die } r^2 + r'^2 \text{ hinreichend groß ist,} \\ > e^{r^{\alpha-\delta} + r'^{\alpha'-\delta'}} & \text{für gewisse } r, r' \text{ für die } r^2 + r'^2 \text{ beliebig groß ist.} \end{cases}$$

Die Gesamtheit aller derartigen Wertepaare α, α', die als „Ordnungspaare“ bezeichnet werden, definiert eine stetige, monotone Funktion $\alpha' = \varphi(\alpha)$, die „Ordnungsfunktion“, geometrisch eine stetige, monotone Kurve, die „Ordnungskurve“, welche auch in einen rechten Winkel mit parallel zu den Achsen verlaufenden Schenkeln ausarten kann. Wie bei Funktionen einer Veränderlichen lassen sich nun drei Spezialtypen trennen, der Maximal-, Normal-, Minimaltypus. Die Tatsache, daß keine zwei Zahlen c, c' existieren, für welche wieder in dem obigen Sinne

$$\bar{g}(r, r') < e^{c r^\alpha + c' r'^{\alpha'}}$$

wäre, definiert den Maximaltypus, die Existenz zweier solchen Zahlen dagegen den Normaltypus, wenn keine von ihnen beliebig klein sein kann, andernfalls den Minimaltypus. Im Falle des Normaltypus zeigt sich wieder, daß eine unendliche Menge festbestimmter Wertepaare γ, γ' („Typuspaare“) existiert, so daß man für alle positiven $\varepsilon, \varepsilon'$ im obigen Sinne hat:

$$\bar{g}(r, r') \begin{cases} < e^{(\gamma+\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'+\varepsilon') r'^{\alpha'}} \\ > e^{(\gamma-\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'-\varepsilon') r'^{\alpha'}}. \end{cases}$$

Die Gesamtheit der Typuspaare bestimmt wieder eine stetige monotone Funktion $\gamma' = \chi(\gamma)$, die „Typusfunktion" bezw. „Typuskurve" genannt wird (§ 3). Den Schluß dieser Betrachtungen bildet der Nachweis, daß sich die Ordnungsfunktion bei gewissen linearen Transformationen die ganzen Funktionen invariant verhält, bezw. daß die Endlichkeit der Ordnung durch gewisse allgemeinere Transformationen nicht alteriert wird (§ 4).

Der zweite Abschnitt behandelt Zusammenhänge der Koeffizienten der ganzen Funktionen endlicher Ordnung mit dem Verhalten der Funktionen im Unendlichen. Es werden gewisse Doppelfolgen betrachtet, deren Terme abhängen von den absoluten Beträgen der Koeffizienten und ihren Indices, sowie von Zahlen, welche das Unendlichwerden nach oben oder unten hin beschränken (§ 1 bezw. 2), bezw. von Ordnungspaaren oder Ordnungs- und Typenpaaren (§ 3). Über die oberen Limites der einfachen Folgen, welche aus diesen Doppelfolgen durch Ordnung nach allgemeinen Diagonalen entstehen, ergeben sich in voller Analogie mit den Verhältnissen bei Funktionen einer Veränderlichen durchweg umkehrbare, in § 3 zusammengestellte Sätze.

Für den dritten Abschnitt, welcher Beziehungen des Unendlichwerdens der ganzen Funktionen zur Art ihres Verschwindens sucht, müssen die ganzen Funktionen in die Form unendlicher Produkte von sogenannten Primfunktionen gebracht werden. Die allgemeine derartige Darstellung der ganzen Funktionen von zwei Veränderlichen, wie sie Herr H. Hahn gegeben hat, kann hier deswegen nicht zu Grunde gelegt werden, weil sie — vermöge ihrer Allgemeinheit — keine Analoga zum Range und Grenzexponenten der ganzen Funktionen einer Veränderlichen erkennen läßt (§ 1). Es werden daher nur noch Funktionen der spezielleren, im wesentlichen von O. Biermann angegebenen Form betrachtet:

$$G(x, y) = e^{g(x,y)} \prod_{\varkappa=1}^{k} \bar{\gamma}_{\varkappa}(x, y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left\{ [1 - \gamma_{\varkappa}(x, y)]\, e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda} (\gamma_\varkappa(x,y))^{\lambda}} \right\},$$

wobei $g(x, y)$ eine ganze rationale oder transzendente Funktion ist, ferner

$$\bar{\gamma}_{\varkappa}(x, y) = c_{10}^{(\varkappa)} x + c_{01}^{(\varkappa)} y + \cdots + c_{r0}^{(\varkappa)} x^r + \cdots + c_{0r}^{(\varkappa)} y^r$$
$$\gamma_{\varkappa}(x, y) = a_{10}^{(\varkappa)} x + a_{01}^{(\varkappa)} y + \cdots + a_{s0}^{(\varkappa)} x^s + \cdots + a_{0s}^{(\varkappa)} y^s.$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Funktionen $1 - \gamma_{\varkappa}(x, y)$ als verschwindende Bestandteile der Primfunktionen auftreten können, wird die Beziehung erwiesen:

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{\mu,\nu}^{(\varkappa)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0,\ 1, \ldots s \\ \nu = 0,\ 1, \ldots s \end{pmatrix}.$$

Bleiben die Zahlen $p_\varkappa$ unter einer (von $\varkappa$ unabhängigen) Schranke, so heißen die Funktionen „von endlichem Range" (§ 2). Von den Funktionen der angeführten Form wird nun wieder eine spezielle Art zur weiteren Betrachtung ausgewählt[1]), die „ganzen Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen", d. h. die Funktionen der Form:

$$G(x,y) = e^{g(x,y)} \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left\{ [1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)]\, e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda} (a_\varkappa x + b_\varkappa y)^\lambda} \right\} \quad (\S\ 3).$$

Für diese wird gezeigt, daß die Endlichkeit des Ranges aus der Endlichkeit der Ordnung folgt, sodann (ganz analog wie bei Funktionen einer Veränderlichen), daß im Gebiete der primitiven Funktionen diejenigen endlichen Ranges und endlicher Ordnung sich vollständig decken (§ 4). Dieses letzte Resultat wird dann noch auf eine etwas allgemeinere Klasse von Funktionen, die sich auf solche mit wesentlich linearen Primfunktionen zurückführen lassen, ausgedehnt (§ 5). Die bisherige Produktdarstellung der betrachteten Funktionen läßt noch nicht das eigentliche Analogon zum Range erkennen. Es zeigt sich, daß die bisher benützten Konvergenzfaktoren nur eine mittlere Stellung unter allgemeineren Formen einnehmen, d. h.: die schließlich nicht mehr verschwindende Funktion $1 - \gamma_\varkappa(x,y)$ läßt sich in der Form $e^{-\Gamma_\varkappa}$ darstellen, $\Gamma_\varkappa$ aber in eine Doppelreihe entwickeln; die Konvergenz wird sodann dadurch herbeigeführt, daß der Exponent des Exponentialfaktors von dieser Doppelreihe einen Teil abtrennt, nämlich in der bisher betrachteten mittleren Form alle Glieder diesseits einer unter 45^0 verlaufenden Diagonale, in der nunmehr einzuführenden alle Glieder diesseits einer beliebigen (d. h. unter irgend einem Winkel verlaufenden) Diagonale (§ 6, 7). Jede solche Diagonale wird durch drei, wenn sie aber dem Anfangsgliede möglichst nahe liegen soll, durch zwei Zahlen festgelegt. So wird man zu einer unendlichen Menge von Zahlenpaaren geführt, welche das als „Rangsystem" bezeichnete Analogon zum Range vorstellt. Wie bei Funktionen einer Veränderlichen ergibt sich durch eine entsprechende Verschärfung dieses Begriffes das Analogon zum Grenzexponenten (§ 8). Zum Schlusse werden Beziechnungen dieser beiden Begriffe zum Unendlichwerden der Funktion gesucht; es ergibt sich die zu erwartende Identität des letzteren dieser Begriffe mit der Ordnungsfunktion, wenigstens unter einer bei Funktionen nicht allzu fernliegender Art erfüllten Bedingung (§ 9).

[1]) Der eigentliche Grund für diese Einschränkung tritt erst zu Anfang des § 7 deutlich hervor (siehe dort Fußnote).

I. Abschnitt.

Über das Verhalten ganzer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen im Unendlichen.

§ 1. Über das Maximum des absoluten Betrages einer ganzen Funktion $g(x,y)$ in einem Kreisgebiet $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$.

$g(x, y)$ bedeutet im folgenden eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion der beiden unabhängigen komplexen Veränderlichen x, y.

Die absoluten Beträge der Funktionswerte $g(x, y)$ in einem Kreisgebiet $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$ haben ein Maximum, für welches die folgenden Sätze gelten:

Satz 1. Ist x_0, y_0 Maximalstelle der Funktion $g(x, y)$ im Kreisgebiet $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$, so ist $|x_0| = r$, $|y_0| = r'$.

Erteilt man nämlich etwa der Veränderlichen x einen festen Wert, so bleibt eine Potenzreihe in y allein übrig, deren absoluter Betrag sein Maximum für den Kreis $|y| \leqq r'$ auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius r' hat. Dies gilt auch für $x = x_0$, wobei x_0 derjenige Wert ist, für welchen $g(x, y)$ das Maximum in dem Gebiete der beiden Kreise annimmt; d. h. aber $|y_0| = r'$, wenn y_0 die y-Koordinate dieser Maximalstelle ist.

Das Analoge läßt sich für x_0 beweisen.

Nach diesem Satze ist $\underset{\substack{|x| \leqq r \\ |y| \leqq r'}}{\text{Max}} |g(x, y)|$ mit $\underset{\substack{|x| = r \\ |y| = r'}}{\text{Max}} |g(x,y)|$ gleichbedeutend; es wird im folgenden mit $\bar{g}(r, r')$ bezeichnet. $\bar{g}(r, r')$ ist dann eine reelle, nicht-negative Funktion der reellen nicht-negativen Veränderlichen r, r'.

Satz 2. Die Funktion $\bar{g}(r, r')$ wächst monoton, wenn r und r' monoton wachsen oder doch eine von diesen beiden Größen, während die andere konstant bleibt, und zwar wächst $\bar{g}(r, r')$ ins Unendliche, wenn mindestens eine der Größen r, r' ins Unendliche wächst.

Ist nämlich $r_2 \geqq r_1$, $r_2' \geqq r_1'$, wobei nicht in beiden Relationen zugleich das Gleichheitszeichen gelten soll, so folgt unmittelbar aus der Definition von $\bar{g}$, daß nicht

$$\bar{g}(r_2, r_2') < \bar{g}(r_1, r_1')$$

sein kann; aber auch

$$\bar{g}(r_2, r_2') = \bar{g}(r_1, r_1')$$

ist unmöglich, da sonst gegen Satz 1 das Maximum $\underset{\substack{|x| \leqq r_2 \\ |y| \leqq r_2'}}{\mathrm{Max}} |g(x,y)$ schon in einem Punkte x, y angenommen würde, für welchen $|x| = r_1$, $|y| = r_1'$ wäre.

Daß $\bar{g}(r, r')$ etwa mit r ins Unendliche wächst, folgt daraus, daß das Maximum des absoluten Betrages einer ganzen Funktion einer Veränderlichen ins Unendliche wächst und

$$\underset{\substack{|x| \leqq r \\ |y| \leqq r'}}{\mathrm{Max}} |g(x,y)| \geqq \underset{|x| \leqq r}{\mathrm{Max}} |(x, y_0)|$$

ist, wenn y_0 einen festen Wert bedeutet, für den $|y_0| \leqq r'$ ist.

Satz 3. Die Funktion $\bar{g}(r, r')$ ist eine stetige Funktion der beiden Veränderlichen r, r'.

Es handelt sich um den Nachweis folgender vier Ungleichungen:

$$\bar{g}(r, r') - \bar{g}(r - \Delta r, r' - \Delta r') < \varepsilon, \tag{1}$$

$$\bar{g}(r + \Delta r, r' + \Delta r') - \bar{g}(r, r') < \varepsilon, \tag{2}$$

$$|\bar{g}(r + \Delta r, r' - \Delta r') - \bar{g}(r, r')| < \varepsilon, \tag{3}$$

$$|\bar{g}(r - \Delta r, r' + \Delta r') - \bar{g}(r, r')| < \varepsilon \tag{4}$$

nach Annahme von $\varepsilon > 0$ etwa für $0 < \Delta r < \sigma$, $0 < \Delta r' < \sigma$, falls σ so bestimmt wird, daß für alle x, y eines hinreichend großen Kreisgebietes, etwa des Kreisgebietes $|x| \leqq 2r$, $|y| \leqq 2r'$ gilt:

$$|g(x + h, y + k) - g(x, y)| < \varepsilon \text{ für } h \leqq \sigma, \; k \leqq \sigma, \tag{5}$$

was stets möglich ist, da $g(x, y)$ stetig und damit in dem betrachteten Kreisgebiet gleichmäßig stetig ist.

Nachweis der Ungl. (1): $\bar{g}(r, r')$ wird in einem Punkte x_0, y_0 angenommen, es ist also

$$\bar{g}(r, r') = |g(x_0, y_0)|.$$

Nach Ungl. (5) ist

$$|g(x,y) - g(x_0, y_0)| < \varepsilon \text{ für } |x - x_0| \leqq \sigma, \; |y - y_0| \leqq \sigma$$

und um so mehr

$$\big||g(x, y)| - |g(x_0, y_0)|\big| < \varepsilon \text{ für } |x - x_0| \leqq \sigma, \; |y - y_0| \leqq \sigma.$$

Da $\Delta r < \sigma$, $\Delta r' < \sigma$ gewählt wird, ragt das Kreisgebiet $|x - x_0| \leqq \sigma$, $|y - y_0| \leqq \sigma$ in das Kreisgebiet $|x| \leqq r - \Delta r$, $|y| \leqq r' - \Delta r'$ hinein, so daß gemeinsame Punkte, z. B. x_1, y_1 existieren. Nun hat man einerseits

$$\big||g(x_1, y_1)| - |g(x_0, y_0)|\big| < \varepsilon,$$

anderseits

$$|g(x_1, y_1)| < \bar{g}(r - \Delta r,\ r' - \Delta r'),$$

also um so mehr

$$\bar{g}(r, r') - \bar{g}(r - \Delta r,\ r' - \Delta r') < \varepsilon.$$

Ähnlich erfolgt der Nachweis der Ungl. (2).

Zum Nachweis der Ungl. (3) unterscheidet man die Fälle:

$$a) \qquad \bar{g}(r, r') < \bar{g}(r + \Delta r,\ r' - \Delta r'),$$

$$b) \qquad \bar{g}(r, r') > \bar{g}(r + \Delta r,\ r' - \Delta r')$$ [1]

und verfährt ähnlich.

Der Nachweis der Ungl. (4) erfolgt analog demjenigen der Ungl. (3).

§ 2. Einige Sätze über das Verhalten ganzer rationaler Funktionen $g(x, y)$ im Unendlichen.

Satz 4. Ist

$$g(x, y) = a_0^{(0)} + (a_1^{(0)} x + a_0^{(1)} y) + \cdots$$
$$\cdots + (a_s^{(0)} x^s + \cdots + a_{s-\lambda}^{(\lambda)} x^{s-\lambda} y^\lambda + \cdots a_0^{(s)} y^s),$$ [2]

so ist

$$|g(x, y)| \begin{cases} < |x|^{s+\delta} + |y|^{s+\delta'} \text{ für alle } |x|^2 + |y|^2 > R^2_{\delta, \delta'} & (1\,a) \\ > |x|^{s-\delta} + |y|^{s-\delta'} \text{ für gewisse beliebig große } |x|^2 + |y|^2. & (1\,b) \end{cases}$$

Beim Beweise von Ungl. (1 a) werden die Fälle unterschieden:

$$a)\ |x| \geqq |y|, \quad b)\ |x| \leqq |y|.$$

$$a) \qquad |g(x, y)| \leqq |a_0^{(0)}| + |a_1^{(0)} x| +$$

$$+ |a_0^{(1)} y| + \cdots |a_s^{(0)} x^s| + \cdots |a_{s-\lambda}^{(\lambda)} x^{s-\lambda} y^\lambda| + \cdots |a_0^{(s)} y^s| =$$

$$= |x|^{s+\delta} \left(\frac{|a_0^{(0)}|}{|x|^{s+\delta}} + \frac{|a_1^{(0)}|}{|x|^{s-1+\delta}} + \frac{|a_0^{(1)}|}{|x|^{s-1+\delta}} \cdot \left|\frac{y}{x}\right| + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{|a_s^{(0)}|}{|x|^\delta} + \cdots \frac{|a_{s-\lambda}^{(\lambda)}|}{|x|^\delta} \cdot \left|\frac{y}{x}\right|^\lambda + \cdots + \frac{|a_0^{(s)}|}{|x|^\delta} \cdot \left|\frac{y}{x}\right|^s \right) < |x|^{s+\delta}$$

für hinreichend große $|x|$, etwa $|x| > R_\delta$ und solche y, für die Bedingung (a) erfüllt ist; damit jedenfalls für alle x, y, für welche

---

[1]) Im Falle der Gleichheit ist die Richtigkeit der zu beweisenden Ungleichung evident.

[2]) Dabei sollen natürlich nicht alle Koeffizienten in dieser letzten Klammer verschwinden.

$|x|^2+|y|^2>2R_\delta^2$ ist und Bedingung (a) zutrifft. Um so mehr ist für diese

$$|g(x,y)|<|x|^{s+\delta}+|y|^{s+\delta'}.$$

Analog findet man im Falle (b)

$$|g(x,y)|<|x|^{s+\delta}+|y|^{s+\delta'} \text{ etwa für } |x|^2+|y|^2>2R_{\delta'}^2.$$

Wählt man nun

$$R_{\delta,\delta'}>\begin{cases} R_\delta\,.\sqrt{2} \\ R_{\delta'}.\sqrt{2} \end{cases},$$

so ist Ungl. (1 a) in dem behaupteten Umfang erwiesen.

Beweis der Ungl. (1 b):

$$|g(x,y)|\geqq\Big|\,|a_s^{(0)}x^s+\cdots+a_{s-\lambda}^{(\lambda)}x^{s-\lambda}y^\lambda+\cdots+a_0^{(s)}y^s|-$$
$$-|a_0^{(0)}+a_1^{(0)}x+a_0^{(1)}y+\cdots+a_{s-1}^{(0)}x^{s-1}+\cdots+a_0^{(s-1)}y^{s-1}|\,\Big|.$$

Setzt man $y=cx$, so ergibt sich

$$|g(x,y)|\geqq\Big|\,|x|^s.|a_s^{(0)}+\cdots+a_{s-\lambda}^{(\lambda)}c^\lambda+\cdots+a_0^{(s)}c^s|-$$
$$-|a_0^{(0)}+x(a_1^{(0)}+a_0^{(1)}c)+\cdots+x^{s-1}(a_{s-1}^{(0)}+\cdots+a_0^{(s-1)}c^{s-1})|\,\Big|.$$

c bestimmt man so, daß $a_s^{(0)}+\cdots+a_{s-\lambda}^{(\lambda)}c^\lambda+\cdots+a_0^{(s)}c^s$ nicht verschwindet, sondern etwa den Wert G hat. Für hinreichend große Werte von $|x|$ gilt dann

$$|g(x,y)|>\frac{G}{2}|x|^s \text{ für gewisse } x,\, y, \tag{2}$$

nämlich solche, für welche $y=cx$ ist.

Anderseits ist aber für $y=cx$ und hinreichend große Werte von $|x|$

$$|x|^{s-\delta}+|y|^{s-\delta'}=|x|^s\left(\frac{1}{|x|^\delta}+\frac{c^{s-\delta'}}{|x|^{\delta'}}\right)<\frac{G}{2}|x|^s. \tag{3}$$

Aus Ungl. (2) und (3) folgt Ungl. (1 b) in dem behaupteten Sinne.

Zusatz 1. Für manche Zwecke erscheint es vorteilhafter, die Ungl. (1 a) durch die folgende nur scheinbar schärfere zu ersetzen, deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet, wenn man in (1 a) δ, δ' durch 2δ, $2\delta'$ ersetzt und dann die Faktoren $|x|^\delta<\varepsilon$, $|y|^{\delta'}<\varepsilon'$ absondert:

$$|g(x,y)|<\varepsilon\,|x|^{s+\delta}+\varepsilon'\,|y|^{s+\delta'} \text{ für } |x|^2+|y|^2>R^2. \tag{4}$$

Stellt man sich die Aufgabe, weitere Wertepaare α, α' zu finden, für welche im Sinne des Satzes 4

$$|g(x,y)|\begin{cases} < |x|^{\alpha+\delta} + |y|^{\alpha'+\delta'} \\ > |x|^{\alpha-\delta} + |y|^{\alpha'-\delta'} \end{cases}$$

ist, indem man von dem dort mit s, s' bezeichneten Wertepaar ausgeht, so zeigt sich, daß im allgemeinen eine Verminderung des einen Exponenten s eine Vermehrung des anderen bedingt und umgekehrt. Doch kann auch ein Exponent s ohne Änderung des anderen erniedrigt werden in den beiden folgenden Fällen:

a) Es sind alle $a^{(\lambda)}_{s-\lambda} = 0$ für $\lambda = 1, 2, \ldots s$, nur $a^{(0)}_s \neq 0$;

b) es sind alle $a^{(\lambda)}_{s-\lambda} = 0$ für $\lambda = 0, 1, \ldots s-1$, nur $a^{(s)}_0 \neq 0$.

Im Falle a) sei $a^{(0)}_k x^k + \cdots + a^{(k)}_0 y^k$ die höchste homogone Summe in der Darstellung von $g(x,y)$ (vgl. Satz 4), welche eine Potenz von y mit nicht verschwindendem Koeffizienten enthält; im Falle b) sei $a^{(0)}_l x^l + \cdots + a^{(l)}_0 y^l$ die höchste homogene Summe, welche eine Potenz von x mit nicht verschwindendem Koeffizienten enthält. Dann gilt:

Zusatz 2. Neben den Ungleichungen des Satzes 4 bestehen die folgenden Ungleichungen in demselben Sinne:

Im Falle a) $|g(x,y)|\begin{cases} < |x|^{s+\delta} + |y|^{k+\delta'} \\ > |x|^{s-\delta} + |y|^{k-\delta'} \end{cases}$,

im Falle b) $|g(x,y)|\begin{cases} < |x|^{l+\delta} + |y|^{s+\delta'} \\ > |x|^{l-\delta} + |y|^{s-\delta'} \end{cases}$;

in allen übrigen Fällen läßt sich in den Ungleichungen des Satzes 4 keiner der beiden Exponenten s erniedrigen, ohne daß der andere erhöht wird. Der leichte, aber umständliche Beweis dieses weiterhin nicht benützten Satzes wird unterlassen.

Für die einfachsten ganzen rationalen Funktionen $g(x,y)$ lassen sich alle möglichen Wertepaare α, α' berechnen von der Art, daß im bisherigen Sinne ist:

$$|g(x,y)|\begin{cases} < |x|^{\alpha+\delta} + |y|^{\alpha'+\delta'} \\ > |x|^{\alpha-\delta} + |y|^{\alpha'-\delta'} \end{cases}.$$

Beispiele:

$g(x,y) = x + y$ ergibt als Wertepaare α, α' alle diejenigen, welche den Bedingungen genügen:

$$\alpha = 1,\ \infty > \alpha' \geqq 1 \text{ oder } \infty > \alpha \geqq 1,\ \alpha' = 1;$$

geometrisch ausgedrückt: alle Wertepaare, die den Punkten eines rechten Winkels mit dem Scheitel (1, 1) entsprechen, dessen Schenkel den Achsen parallel laufen.

$g(x, y) = xy$ ergibt als Wertepaare α, α' alle diejenigen, welche der Gleichung $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ oder $\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha' - 1}$ genügen; geometrisch: alle Wertepaare, die den Punkten eines Astes einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Scheitel (2, 2) entsprechen.

$g(x, y) = x^2 + y$ ergibt als Wertepaare α, α' alle, die den Bedingungen genügen:

$$\alpha = 2, \; \infty > \alpha' \geqq 1 \text{ oder } \infty > \alpha \geqq 2, \; \alpha' = 1;$$

geometrisch: alle Wertepaare, die den Punkten eines den Achsen parallelen rechten Winkels mit dem Scheitel (2, 1) entsprechen.

Das erste und zweite Beispiel bestätigen Satz 4, das dritte den Zusatz 2.

Zwecks späterer Anwendung soll hier noch der Satz bewiesen werden:

Satz 5. Bedeutet $g(x, y)$ wieder dieselbe Funktion wie im Satze 4 und $\Re\big(g(x, y)\big)$ den reellen Teil von $g(x, y)$, so hat man

$$\Re\big(g(x, y)\big) \begin{cases} < |x|^{s+\delta} + |y|^{s+\delta'} \text{ für alle } |x|^2 + |y|^2 > R^2_{\delta, \delta'} \\ > |x|^{s-\delta} + |y|^{s-\delta'} \text{ für gewisse beliebig große } |x|^2 + |y|^2 \end{cases}.$$

Die erste Ungleichung folgt unmittelbar aus der ersten Ungleichung des Satzes 4, da

$$\Re\big(g(x, y)\big) \leqq |g(x, y)|$$

ist.

Die zweite Ungleichung läßt sich für alle Wertsysteme x, y nachweisen, bei welchen etwa die x-Koordinate auf gewissen Strahlen durch den Nullpunkt liegt, während die y-Koordinate der jeweilige Bildpunkt der x-Koordinate ist, der durch eine Substitution $y = cx$ geliefert wird.

Für $y = cx$ wird nämlich

$$g(x, y) = x^s \Big[(a_s^{(0)} + a_{s-1}^{(1)} c + \cdots + a_0^{(s)} c^s) + \\ + \Big(\frac{a_0^{(0)}}{x^s} + \frac{a_1^{(0)}}{x^{s-1}} + \frac{a_0^{(1)} c}{x^{s-1}} + \cdots + \frac{a_0^{(s-1)} c^{s-1}}{x} \Big) \Big]$$

c wird so bestimmt, daß $a_s^{(0)} + a_{s-1}^{(1)} c + \cdots + a_0^{(s)} c^s$ einen von Null verschiedenen Wert, etwa A annimmt.

Dann ist

$$g(x, y) = x^s A \big(1 + f(x)\big),$$

wobei

$$|f(x)| = \frac{1}{|A|} \cdot \left| \frac{a_0^{(0)}}{x^s} + \frac{a_1^{(0)}}{x^{s-1}} + \frac{a_0^{(1)} c}{x^{s-1}} + \cdots + \frac{a_0^{(s-1)} c^{s-1}}{x} \right| < \varepsilon \text{ für } |x| > R.$$

Setzt man

$$x = |x| \cdot e^{\varphi i}, \quad A = |A| \cdot e^{\psi i},$$

so ist

$$g(x, y) = |x|^s |A| e^{(s\varphi+\psi)i}\left(1+f(x)\right)$$

oder, wenn man φ so wählt, daß $s\varphi + \psi = 2k\pi$ ist,

$$g(x, y) = |x|^s |A| \left(1+f(x)\right);$$

folglich

$$\Re\left(g(x, y)\right) = |x|^s |A| \left(1 + \Re\left(f(x)\right)\right) \quad \text{oder}$$

$$\Re\left(g(x, y)\right) > |x|^s |A| (1-\varepsilon) \quad \text{für } |x| > R, \tag{5}$$

da

$$\Re\left(f(x)\right) \leqq |f(x)| < \varepsilon \text{ für } |x| > R.$$

Anderseits ergibt sich wie am Schlusse des Beweises von Satz 4:

$$x|^{s-\delta} + |y|^{s-\delta'} < |x|^s |A| (1-\varepsilon) \text{ für } |x| > R', \ y = cx. \tag{6}$$

Aus Ungl. (5) und (6) folgt die behauptete Ungleichung.

§ 3. Das Verhalten ganzer transzendenter Funktionen $g(x,y)$ im Unendlichen; Ordnungsfunktion und Typusfunktion.

Während der absolute Betrag einer ganzen rationalen Funktion von zwei Veränderlichen x, y nach Satz 4 nicht stärker ins Unendliche wächst als eine Summe von Potenzen von $|x|$ und $|y|$, ergibt sich für ganze transzendente Funktionen:

Satz 6. Der absolute Betrag einer ganzen transzendenten Funktion $g(x, y)$ wächst stärker ins Unendliche als jede Summe zweier Potenzen von $|x|$ und $|y|$.

Wenn nämlich $g(x, y)$ eine ganze transzendente Funktion ist, so ist, falls x_0, y_0 beliebig fixiert werden, nur nicht so, daß $g(x, y_0)$ bezw. $g(x_0, y)$ identisch verschwindet, mindestens eine dieser beiden Funktionen eine ganze transzendente Funktion von x bezw. y allein. Es sei etwa das erstere der Fall, und es werde $|y_0| = r'_0$ gesetzt. Gäbe es nun zwei Zahlen a, a', so daß man von einem gewissen Werte von $r^2 + r'^2$ an hätte

$$\overline{g}(r, r') < r^a + r'^{a'},$$

so wäre

$$\overline{g}(r, r'_0) < r^a + r_0'^{a'} < r^b \text{ für } b > a \text{ und hinreichend großes } r.$$

Anderseits wird aber

$$\bar{g}(r, r_0') = \underset{\substack{|x|=r \\ |y|=r_0'}}{\mathrm{Max}} |g(x, y)| \geqq^{1)} \underset{|x|=r}{\mathrm{Max}} |g(x, y_0)| > r^b$$

für jedes b, da das Maximum des absoluten Betrages einer ganzen transzendenten Funktion einer Veränderlichen stärker als jede Potenz ins Unendliche wächst.

Bei Betrachtung des Unendlichwerdens von ganzen transzendenten Funktionen $g(x, y)$ wählt man daher als Vergleichsfunktionen zweckmäßig Funktionen der Form

$$e^{r^a + r'^{a'}}.$$

Definition: Eine ganze transzendente Funktion $g(x, y)$ heißt von nicht-unendlicher Ordnung, wenn zwei positive Zahlen a, a' existieren, so daß man hat

$$\bar{g}(r, r') < e^{r^a + r'^{a'}} \text{ für } r^2 + r'^2 > A^2 \text{ (endliche Zahl).} \tag{1}$$

Diejenigen Funktionen, für welche Ungl. (1) gilt, wie klein auch a oder a' bezw. a und a' zugleich gewählt werden, gehören der Ordnung Null an.[2] Wir beschäftigen uns hier ausschließlich mit Funktionen nicht-unendlicher Ordnung; wird dabei ausdrücklich von Funktionen endlicher Ordnung gesprochen, so soll die Ordnung Null ausgeschlossen sein.

Satz 7. Ist $g(x, y)$ eine ganze transzendente Funktion von nicht-unendlicher Ordnung, also

$$\lg \bar{g}(r, r') < r^a + r'^{a'} \text{ für } r^2 + r'^2 > A^2, \tag{2}$$

so gibt es eine bestimmte Zahl α von der Art, daß man für jedes positive δ hat

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha+\delta} + r'^{a'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R_\delta^2 \\ > r^{\alpha-\delta} + r'^{a'} & \text{für gewisse beliebig große } r^2 + r'^2. \end{cases} \tag{3}$$

Ebenso gibt es eine bestimmte Zahl α', so daß im analogen Sinne gilt

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^a + r'^{\alpha'+\delta'} \\ > r^a + r'^{\alpha'-\delta'}. \end{cases}$$

Der Beweis, der etwa für die Ungl. (3) geführt wird, verläuft ganz analog dem entsprechenden bei Funktionen einer Veränderlichen.

---

[1]) Im allgemeinen gilt das Zeichen $>$, y_0 braucht ja nicht gerade die y-Koordinate desjenigen Punktes x, y zu sein, in welchem das Maximum für das Gebiet beider Kreise $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$ angenommen wird.

[2]) Z. B. $e^x + y$, $x \cdot e^y$; hieher gehören eigentlich auch die ganzen rationalen Funktionen.

Man betrachtet zunächst die Verhältnisse für alle r, r', für die $r^2 + r'^2 > R_1^2$ ist, wo $R_1 > A$ ist. Der Exponent a der Ungl. (2) läßt sich eventuell erniedrigen; schließlich findet man einen Wert $\alpha_1 \leqq a$, so daß für alle positiven ε ist

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha_1 + \varepsilon} + r'^{a'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R_1^2 \\ > r^{\alpha_1 - \varepsilon} + r'^{a'} & \text{für gewisse beliebig große } r^2 + r'^2. \end{cases}$$

Dasselbe gilt für eine ins Unendliche wachsende Folge von Zahlen

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_\nu < \ldots;$$

man findet dazu eine Folge von Zahlen

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_\nu \geqq \ldots,$$

derart, daß für jedes ν und alle positiven ε gilt

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha_\nu + \varepsilon} + r'^{a'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R_\nu^2 \\ > r^{\alpha_\nu - \varepsilon} + r'^{a'} & \text{für gewisse bel. große } r^2 + r'^2. \end{cases} \tag{4}$$

Da $0 \leqq \alpha_\nu \leqq a$ ist, existiert $\lim\limits_{\nu = \infty} \alpha_\nu = \alpha$; für dieses α gelten die Ungl. (3) in dem angegebenen Sinne; denn man kann zu jedem δ ein so großes ν wählen, daß für ein passendes ε, z. B. $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$

$$\alpha + \delta > \alpha_\nu + \varepsilon, \quad \alpha - \delta < \alpha_\nu - \varepsilon$$

ist; zu α_ν gehört dann ein R_ν, so daß die Ungl. (4) zutreffen. Wählt man R_δ größer als dieses R_ν, (das aber nun zu jedem gegebenen δ bestimmt wird), so gelten um so mehr die Ungl. (3).

Man kann nun in der vorausgesetzten Ungl. (2) a' von beliebig großen Werten an bis zu einer gewissen Grenze stetig abnehmen lassen und für jeden durchlaufenen Wert $a' = \alpha'$ den ersten Teil des Satzes 7 anwenden; so findet man unendlich viele Wertepaare α, α', wobei α' sich stetig ändert. Ebenso kann man in Ungl. (2) a von beliebig großen Werten an stetig abnehmende Werte α durchlaufen lassen und stets den zweiten Teil des Satzes 7 anwenden; man findet wieder unendlich viele Wertepaare α, α'.

Für alle so gefundenen Wertepaare α, α' und irgend welche positive Zahlen δ, δ' gilt, wie unmittelbar aus Satz 7 folgt:

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha + \delta} + r'^{\alpha' + \delta'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R_{\delta, \delta'}^2 \\ > r^{\alpha - \delta} + r'^{\alpha' - \delta'} & \text{für gewisse bel. große } r^2 + r'^2. \end{cases} \tag{5}$$

Jedes Wertepaar α, α', das den Ungl. (5) genügt, wird im folgenden kurz als „Ordnungspaar“ bezeichnet; die von der Gesamtheit aller Ordnungspaare bestimmte Funktion $\alpha' = \varphi(\alpha)$ $\big($oder $\alpha = \psi(\alpha')\big)$ soll „Ordnungsfunktion“ der Funktion $g(x, y)$, ihr geometrisches Bild „Ordnungskurve“ heißen.

Satz 8. Die Ordnungsfunktion einer ganzen transzendenten Funktion $g(x, y)$ ist eine monotone, und zwar im wesentlichen abnehmende Funktion, d. h. sind α_1, α_1' und α_2, α_2' zwei Ordnungspaare und ist $\alpha_2 > \alpha_1$, so ist $\alpha_2' \leqq \alpha_1'$.

α_1, α_1' und α_2, α_2' sind Ordnungspaare, bedeutet:

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha_1+\delta} + r'^{\alpha_1'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > (R^{(1)}_{\delta,\delta'})^2 & (5\,a) \\ > r^{\alpha_1-\delta} + r'^{\alpha_1'-\delta'} \text{ für gew. bel. große } r^2 + r'^2, & (5\,b) \end{cases}$$

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha_2+\delta} + r'^{\alpha_2'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > (R^{(2)}_{\delta,\delta'})^2 & (6\,a) \\ > r^{\alpha_2-\delta} + r'^{\alpha_2'-\delta'} \text{ für gew. bel. große } r^2 + r'^2. & (6\,b) \end{cases}$$

Da $\alpha_2 > \alpha_1$ ist, kann man δ so wählen, daß

$$\alpha_2 - \delta > \alpha_1 + \delta$$

ist $\left(\text{nämlich } \delta < \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)$; wäre zugleich $\alpha_2' > \alpha_1'$, so könnte man δ' so wählen, daß

$$\alpha_2' - \delta' > \alpha_1' + \delta'$$

wäre; dann wäre

$$r^{\alpha_2-\delta} + r'^{\alpha_2'-\delta'} > r^{\alpha_1+\delta} + r'^{\alpha_1'+\delta'};$$

damit würden sich die Ungl. (6 b) und (5 a) widersprechen; denn sie müssen für gewisse Werte r, r' zugleich gelten, nämlich für solche, für die (6 b) gilt und die zugleich so gewählt sind, daß $r^2 + r'^2 > (R^{(1)}_{\delta,\delta'})^2$ ist.

Es ist möglich und kommt tatsächlich vor (vgl. die Beispiele!), daß neben α, α' auch α, $\alpha' - c$, wo c eine positive Zahl vorstellt, ein Ordnungspaar ist.

Satz 9. Sind α, α' und α, $\alpha' - c$ Ordnungspaare, so sind auch alle Wertepaare α, $\alpha' - \varkappa$ für $0 \leqq \varkappa \leqq c$ Ordnungspaare; dasselbe gilt natürlich für vertauschte Rollen von α und α'.

Da man nämlich nach Voraussetzung hat

$$\lg \bar{g}(r, r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'-c+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}$$

und

$$\lg \bar{g}(r, r') > r^{\alpha-\delta} + r'^{\alpha'-\delta'} \text{ für gew. bel. große } r^2 + r'^2,$$

so ist um so mehr

$$\lg \bar{g}(r, r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'-\varkappa+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}$$

bezw.

$$\lg \bar{g}(r, r') > r^{\alpha-\delta} + r'^{\alpha'-\varkappa-\delta'} \text{ für gew. bel. große } r^2 + r'^2.$$

Ist α, α' ein Ordnungspaar, so gehört, wie oben gezeigt wurde [1]), zu jedem $\alpha + h$ für beliebig kleines h ein $\alpha' - k$, so daß $\alpha + h$, $\alpha' - k$ ein Ordnungspaar ist. Nach Satz 8 ist dabei für $h > 0$ auch $k \geqq 0$, und es muß mit abnehmendem h auch k abnehmen oder doch konstant bleiben; es existiert also $\lim_{h=0} k$. Nun sind zwei Fälle möglich:

$$a) \lim_{h=0} k = 0, \qquad b) \lim_{h=0} k = c > 0.$$

Satz 10. Im Falle b) ist neben α, α' auch α, $\alpha' - c$ ein Ordnungspaar, d. h. es gilt für jedes Wertepaar δ_1, δ_1'

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha+\delta_1} + r'^{\alpha'-c+\delta_1'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta_1, \delta_1'} & (7\,a) \\ > r^{\alpha-\delta_1} + r'^{\alpha'-c-\delta_1'} \text{ für gew. bel. große } r^2 + r'^2. & (7\,b) \end{cases}$$

Vorausgesetzt ist die Gültigkeit der folgenden Ungleichungen für beliebig kleines h:

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha+h+\delta} + r'^{\alpha'-k+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta, \delta'} & (8\,a) \\ > r^{\alpha+h-\delta} + r'^{\alpha'-k-\delta'} \text{ für gew. bel. große } r^2 + r'^2. & (8\,b) \end{cases}$$

Ist nun ein beliebig kleines Wertepaar δ_1, δ_1' gegeben, so ergibt sich die Gültigkeit der Ungl. (7 a) folgendermaßen: Man betrachtet Ungl. (8 a) für solche h, k, δ, δ', daß

$$\alpha + h + \delta \leqq \alpha + \delta_1 \text{ und } \alpha' - k + \delta' \leqq \alpha' - c + \delta_1'$$

ist; dies ist offenbar stets möglich, man braucht nur

$$h + \delta \leqq \delta_1 \text{ und } \delta' \leqq \delta_1'$$

zu wählen; dann folgt aber Ungl. (7 a) a fortiori aus Ungl. (8 a).

Um die Giltigkeit der Ungl. (7 b) zu erkennen, betrachtet man die Ungl. (8 b) für solche h, k, δ, δ', daß

$$\alpha + h - \delta \geqq \alpha - \delta_1 \text{ und } \alpha' - k - \delta' \geqq \alpha' - c - \delta_1'$$

ist; dazu braucht man nur $\delta \leqq \delta_1$ bezw. h so klein zu wählen, daß (wegen $\lim_{h=0} k = c$)

$$k + \delta' \leqq c + \delta_1'$$

ist; damit folgt wieder Ungl. (7 b) a fortiori aus Ungl. (8 b).

Aus den drei letzten Sätzen ergibt sich: [2])

Satz 11. Die Ordnungskurve einer ganzen transzendenten Funktion $g(x, y)$ ist eine im positiven Quadranten liegende, aus

[1]) Vgl. die an Satz 7 sich anschließende Folgerung!

[2]) Dabei wird die geometrische Ausdrucksweise als die einfachste gewählt.

dem Unendlichen kommende, stetige und im wesentlichen monoton abnehmende Kurve, die wieder ins Unendliche geht. Speziell kann sie in die beiden Schenkel eines den Achsen parallelen rechten Winkels ausarten.

Es mag hier noch eine Klasse besonders einfacher ganzer transzendenter Funktionen kurz betrachtet werden: Die Funktionen der Form $e^{g(x, y)}$.

Satz 12. Alle ganzen Funktionen der Form $e^{g(x, y)}$, bei welchen $g(x, y)$ eine ganze rationale Funktion ist, sind von nicht-unendlicher Ordnung.

Es ist nämlich

$$|e^{g(x, y)}| = e^{\Re(g(x, y))};$$

nach der ersten Ungleichung des Satzes 5 existieren nun zwei Zahlen a, a', nämlich $a = s + \delta$, $a' = s + \delta'$, so daß für hinreichend große Werte von $r^2 + r'^2$ gilt:

$$\Re(g(x, y)) = \lg |e^{g(x, y)}| < r^a + r'^{a'},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Mit Benützung der zweiten Ungleichung des Satzes 5 ergibt sich ferner, daß das Wertepaar s, s ein Ordnungspaar der Funktion $e^{g(x, y)}$ ist.

In den besonderen Fällen, in welchen

$$\operatorname*{Max}_{\substack{|x| \leqq r \\ |y| \leqq r'}} \Re(g(x, y)) = \overline{g}(r, r')$$

ist, fallen sicher alle Ordnungspaare mit denjenigen Wertepaaren α, α' zusammen, für welche die Ungleichungen bestehen:

$$|g(x, y)| \begin{cases} < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta, \delta'} \\ > r^{\alpha-\delta} + r'^{\alpha'-\delta'} & \text{für gew. beliebig große } r^2 + r'^2. \end{cases}$$

Z. B. sind die Ordnungspaare der Funktionen e^{x+y}, e^{xy}, e^{x^2+y} bezw. diejenigen Wertepaare α, α', welche in § 2 zu den Funktionen $x + y$, xy, $x^2 + y$ angegeben sind.

Es handelt sich nun um diejenige schärfere Untersuchung des Unendlichwerdens ganzer Funktionen endlicher Ordnung von zwei Veränderlichen, welche das Analogon zur Unterscheidung der ganzen Funktionen endlicher Ordnung von einer Veränderlichen in drei Spezialtypen, denjenigen des Maximal-, Normal- und Minimaltypus vorstellt. Dem einheitlichen Zahlenwerte, welcher bei Funktionen einer Veränderlichen die Ordnung angibt, stehen im Gebiete der

Funktionen zweier Veränderlichen eine unendliche Menge von Ordnungspaaren α, α' gegenüber. Für jedes derartige Ordnungspaar kann die Untersuchung geführt werden [1]).

Es sei also α, α' ein beliebiges Ordnungspaar der ganzen Funktion endlicher Ordnung $g(x, y)$, d. h.

$$\lg \overline{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'} \\ > r^{\alpha-\delta} + r'^{\alpha'-\delta'} & \text{für gew. bel. große } r^2 + r'^2. \end{cases}$$

Nun sind zwei Fälle möglich:

1. Es gibt zwei positive Zahlen c, c', so daß man hat

$$\lg \overline{g}(r, r') < c r^{\alpha} + c' r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > C^2 \text{ (endliche Zahl);} \tag{9}$$

2. es gibt keine solchen Zahlen c, c'.

Im Falle (1) kann die Besonderheit eintreten, daß Ungl. (9) für beliebig kleines c oder beliebig kleines c' oder gleichzeitig beliebig kleine c und c' zutrifft. [2]) Dieser Fall soll als Fall (1 a) vom Falle (1) abgetrennt werden. Dann wird im Anschluß an die entsprechenden Verhältnisse bei Funktionen einer Veränderlichen folgende Ausdrucksweise eingeführt:

Im Falle (1 a) heißt $g(x, y)$ eine Funktion vom „Minimaltypus" in bezug auf das Ordnungspaar α, α', [3]) im Falle (1) vom „Normaltypus" im Falle (2) vom „Maximaltypus".

Im Falle des Normaltypus lassen sich nun alle Betrachtungen, welche von der Definition der Funktionen von nicht-unendlicher Ordnung zu den Ordnungsfunktionen und ihren Eigenschaften geführt haben, wiederholen, indem man das Zahlenpaar c, c' die Rolle des früheren Zahlenpaares a, a' — siehe Ungl. (1) — übernehmen läßt. Es ergibt sich als Analogon zu den Ordnungspaaren eine unendliche Menge von Wertepaaren γ, γ', welche, wenn ε, ε' irgend welche positiven Zahlen sind, den Ungleichungen genügen:

$$\lg \overline{g}(r, r') \begin{cases} < (\gamma+\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'+\varepsilon') r'^{\alpha'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'} \\ > (\gamma-\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'-\varepsilon') r'^{\alpha'} & \text{für gew. bel. große } r^2 + r'^2. \end{cases} \tag{10}$$

Jedes derartige Wertepaar γ, γ' soll ein zum Ordnungspaar α, α' der Funktion $g(x, y)$ gehöriges „Typuspaar" heißen; die von der Gesamtheit aller zum Ordnungspaar α, α' gehörigen Typuspaare

---

[1]) Auf die Frage, welche Beziehungen zwischen den zu den einzelnen Ordnungspaaren einer Funktion gehörigen Typen bezw. Typusfunktionen (vgl. die folgende Untersuchung!) bestehen, wird nicht eingegangen; sie scheint keine einfache Antwort zuzulassen. Das erste der zum Schlusse dieses Paragraphen angeführten Beispiele zeigt, daß eine Funktion in bezug auf die verschiedenen Ordnungspaare jedenfalls nicht von gleichem Typus zu sein braucht.

[2]) Vgl. die Analogie bei den zu Anfang dieses Paragraphen definierten Funktionen der Ordnung O.

[3]) Insbesondere wird, falls Ungl. (9) für gleichzeitig beliebig kleine c, c' gilt, von einem „eigentlichen Minimaltypus" gesprochen.

bestimmte Funktion $\gamma' = \chi(\gamma)$ oder $(\gamma = \omega(\gamma'))$ wird die zum Ordnungspaar α, α' gehörige „Typusfunktion“, ihr geometrisches Bild die „Typuskurve“ genannt. Dann gilt der folgende Satz, dessen Beweis in allen Teilen demjenigen für die analogen Behauptungen über die Ordnungspaare entspricht:

Satz 13. Die Typuskurve in bezug auf ein beliebiges Ordnungspaar α, α' einer Funktion $g(x, y)$, — in bezug auf welches die Funktion überhaupt vom Normaltypus ist — ist eine im positiven Quadranten liegende, aus dem Unendlichen kommende, stetige und im wesentlichen monoton abnehmende Kurve, die wieder ins Unendliche geht. Speziell kann sie in die beiden Schenkel eines den Achsen parallelen rechten Winkels ausarten.

Dem Übergang vom Normaltypus zum Minimal- oder Maximaltypus entspricht die geometrische Vorstellung, daß die Typuskurve ganz oder zum Teil mit dem aus den positiven Achsen gebildeten Winkel zusammenfällt bezw. vollständig ins Unendliche rückt.

Beispiele:

$g(x, y) = e^{x+y}$; zum Ordnungspaar 1, 1 ergibt sich eine Typusfunktion, die denselben Charakter hat wie die Ordnungsfunktion, nämlich durch alle Wertepaare γ, γ' definiert ist, welche den Bedingungen genügen:

$$\gamma = 1, \ \infty > \gamma' \geqq 1 \ \text{ oder } \ \infty > \gamma \geqq 1, \ \gamma' = 1.$$

In bezug auf alle anderen Ordnungspaare ist die Funktion vom Minimaltypus.

$g(x, y) = e^{xy}$; hier ergeben sich die Typusfunktionen:

Zum Ordnungspaar 2, 2 gehört $\gamma' = \dfrac{1}{4\gamma}$, $\gamma = \dfrac{1}{4\gamma'}$;

„ „ $\dfrac{3}{2}$, 3 „ $\gamma' = \dfrac{4}{27\gamma^2}$, $\gamma = \sqrt{\dfrac{4}{27\gamma'}}$;

allgemein:

Zum Ordnungspaar α, $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ gehört $\gamma' = \dfrac{\alpha - 1}{(\alpha^\alpha \gamma)^{\frac{1}{\alpha-1}}}$, $\gamma = \dfrac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha \gamma'^{\alpha-1}}$.

§ 4. Der Einfluß gewisser Transformationen einer ganzen transzendenten Funktion $g(x,y)$ von endlicher Ordnung auf ihre Ordnungsfunktion.

Die Entscheidung der Frage, wie sich die Ordnungsfunktion einer ganzen transzendenten Funktion $g(x, y)$ von endlicher Ordnung verhält, wenn $g(x, y)$ einer linearen Transformation

$$x = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1$$
$$y = a_2 \xi + b_2 \eta + c_2$$

unterworfen wird, scheint erhebliche Schwierigkeiten darzubieten.

Für den Fall der spezielleren Substitution

$$x = a\xi + b$$
$$y = c\eta + d, \tag{1}$$

ergibt sich allerdings die Invarianz der Ordnungsfunktion. Doch gestaltet sich selbst in diesem einfachsten Falle die Untersuchung so kompliziert, daß sie hier unterdrückt werden soll.

Für den Fall der allgemeinen ganzen Substitution

$$x = a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \cdots + a_1 \xi + a_0$$
$$y = b_m \eta^m + b_{m-1} \eta^{m-1} + \cdots + b_1 \eta + b_0 \tag{2}$$

läßt sich, wie hier gleichfalls ohne Beweis angeführt wird, wenigstens zeigen, daß die Nicht-Unendlichkeit bezw. Unendlichkeit der Ordnung dabei erhalten bleibt.

II. Abschnitt.

Beziehungen zwischen dem Unendlichwerden ganzer transzendenter Funktionen zweier komplexer Veränderlichen von nicht-unendlicher Ordnung und dem infinitären Verhalten ihrer Reihenkoeffizienten.

§ 1. Beziehungen, welche aus der Existenz einer oberen Schranke für das Anwachsen des absoluten Betrages einer Funktion $g(x,y)$ von nicht-unendlicher Ordnung folgen.

Ähnlich wie bei Funktionen einer Veränderlichen lassen sich auch bei Funktionen zweier Veränderlichen aus den Ungleichungen, welche das Verhalten im Unendlichen charakterisieren, Beziehungen für das infinitäre Verhalten der Koeffizienten der Potenzreihen, durch welche die Funktionen definiert sind, gewinnen. Dabei wird zunächst von denjenigen Ungleichungen ausgegangen, welche das Anwachsen des absoluten Betrages der Funktionen nach oben hin beschränken. Es wird also eine Funktion $g(x, y)$ betrachtet, welche für beliebige ε, ε' der Ungleichung genügt:

$$\lg \overline{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon)\, r^{\alpha} + (\gamma' + \varepsilon')\, r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}, \tag{1}$$

wobei

$$\alpha > 0, \quad \alpha' > 0.$$

Die Potenzreihe der Funktion $g(x, y)$ laute ein für allemal:

$$g(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu}^{(\nu)} x^{\mu} y^{\nu}.$$

Nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz für Funktionen von zwei Veränderlichen ist nun

$$\begin{aligned} |a_\mu^{(\nu)}|\, r^\mu r'^\nu &< \bar{g}(r, r') \\ &< e^{(\gamma+\varepsilon) r^\alpha + (\gamma'+\varepsilon') r'^{\alpha'}} \quad \text{für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}. \end{aligned} \tag{2}$$

Man kann nun speziell

$$r = \left(\frac{\mu}{\alpha(\gamma+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad r' = \left(\frac{\nu}{\alpha'(\gamma'+\varepsilon')}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}$$

setzen, wenn man hierin μ und ν derart wählt, daß

$$r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}$$

ist[1]); Ungl. (2) wird dann nach einiger Umformung:

$$|a_\mu^{(\nu)}| \left(\frac{\mu}{e}\right)^{\frac{\mu}{\alpha}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}} < \left(\alpha(\gamma+\varepsilon)\right)^{\frac{\mu}{\alpha}} \left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon')\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}}. \tag{3}$$

Während sich bei den Untersuchungen über Funktionen einer Veränderlichen an dieser Stelle die rechte Seite der entsprechenden Ungleichung durch einfaches Wurzel-Ausziehen vom Index (μ) unabhängig machen und damit eine Grenzrelation sich gewinnen läßt, scheinen hier zu demselben Zwecke zunächst Einschränkungen notwendig zu sein. Man könnte die Ungl. (3) nur für solche Werte von μ, ν betrachten, zwischen welchen eine geeignete Beziehung besteht, nämlich etwa

$$\mu = p\lambda, \quad \nu = q\lambda,$$

wo p, q feste ganze positive Zahlen sind, während λ ins Unendliche wächst. Dieser Weg soll jedoch hier nicht betreten werden, da der folgende allgemeinere Resultate verspricht:

Man bestimmt zwei positive ganze Zahlen s, s' und zwei beliebige positive Zahlen c, c' derart, daß

$$c\,(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c'\,(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}}$$

ist[2]); der gemeinsame Wert dieser beiden Ausdrücke wird mit A

---

[1]) Dabei kann eine der beiden Zahlen μ, ν beliebig, auch gleich Null gewählt werden, wenn nur die andere hinreichend groß gewählt wird. Wenn unten $s'\mu + s\nu$ (wo s, s' positive ganze Zahlen sind) hinreichend groß gewählt wird, wird diese Bedingung stets erfüllt.

[2]) Derselbe Grad der Allgemeinheit würde natürlich schon erreicht, wenn nur zwei Zahlen c und s so bestimmt würden, daß

$$(\alpha'\gamma')^{\frac{1}{\alpha'}} = c\,(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}}$$

wäre; doch ist die obige Form der Symmetrie wegen vorzuziehen. s, s' und eine der Zahlen c, c' sind dabei noch vollkommen willkürlich.

bezeichnet. Da die Ausdrücke stetige Funktionen von γ bezw. γ' sind, kann man nun stets beliebig kleine Zahlen ε, ε' so bestimmen, daß

$$c\left(\alpha(\gamma+\varepsilon)\right)^{\frac{s}{\alpha}} = c'\left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon')\right)^{\frac{s'}{\alpha'}} = A+\tau$$

ist, wobei τ beliebig klein ist. Daraus folgt:

$$\left(\alpha(\gamma+\varepsilon)\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{A+\tau}{c}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon')\right)^{\frac{1}{\alpha'}} = \left(\frac{A+\tau}{c'}\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Aus Ungl. (3) wird somit nach einiger Umformung:

$$\left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right| \left(\frac{\mu}{e}\right)^{\frac{\mu}{\alpha}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} < (A+\tau)^{\frac{1}{ss'}},$$

gültig für passende μ, ν (vgl. die Fußnote zu Ungl. (3). Daraus folgt, da der obere Limes eine bestimmte Zahl ist, die Ungleichung aber für beliebig kleine τ gilt:

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}}{}^{1)} \left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right| \left(\frac{\mu}{e}\right)^{\frac{\mu}{\alpha}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} \leqq A^{\frac{1}{ss'}}.$$

Berücksichtigt man noch den unten [2]) angeführten Hilfssatz, so ist nunmehr der Satz bewiesen:

---

[1]) Dieser $\overline{\lim\limits_{s'\mu+s\nu=\infty}}$ ist so zu bilden, daß man $s'\mu+s\nu$ der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, . . . durchlaufen läßt und jedesmal alle passenden Wertsysteme μ, ν sucht; d. h. er ist der obere Limes der einfach-unendlichen Zahlenfolge, welche entsteht, wenn man die Doppelfolge

$$b_\mu^{(\nu)} = \left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right| \left(\frac{\mu}{e}\right)^{\frac{\mu}{\alpha}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}$$

nach irgend welchen (nicht nur unter 45° verlaufenden) Diagonalen ordnet. Den Grund für die Einführung von $\overline{\lim\limits_{s'\mu+s\nu=\infty}}$ statt $\overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}}$ ersieht man aus der Fußnote p. 27.

[2]) Hilfssatz:

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty} \left[\frac{\left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu}{\mu!\ \nu!}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = 1.$$

Mit $s'\mu+s\nu$ wird nämlich entweder μ oder ν oder beide zugleich beliebig groß. Es werde etwa μ beliebig groß; dann liegt der Wert des Ausdruckes

$$\left[\frac{\left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu}{\mu!}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = \left[\frac{\frac{\mu}{e}}{\sqrt[\mu]{\mu!}}\right]^{\frac{1}{s'+\frac{s\nu}{\mu}}}$$

Satz 14. Hat eine ganze Funktion

$$g(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$$

die Eigenschaft, daß für irgend ein System positiver Werte α, α', γ, γ' (wobei für α, α' der Wert Null ausgeschlossen ist) und für beliebige positive ε, ε' die Ungleichung

$$\lg \overline{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon) r^\alpha + (\gamma' + \varepsilon') r'^{\alpha'} \quad \text{für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}$$

gilt, so ist

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} . (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} \leqq A^{\frac{1}{ss'}},$$

wenn s, s' irgend welche ganze positive und c, c' irgend welche positive Zahlen sind, für welche

$$c\,(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c'\,(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}}$$

ist, und A den gemeinsamen Wert dieser beiden Ausdrücke bezeichnet.

Zu diesem Satze gilt die folgende Umkehrung:

Satz 15. Haben die Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}$ einer ganzen Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es positive Zahlen α, α', γ, γ', c, c' und positive ganze Zahlen s, s' gibt, welche den Relationen genügen:

$$c\,(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c'\,(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}} \;(= A),$$

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} \leqq A^{\frac{1}{ss'}},$$

so ist für beliebige positive ε, ε'

$$\lg \overline{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon) r^\alpha + (\gamma' + \varepsilon') r'^{\alpha'} \quad \text{für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}.$$

---

für hinreichend große μ beliebig nahe an 1, weil dabei nach der Stirlingschen Formel der Wert des Ausdruckes in der eckigen Klammer beliebig nahe an 1 liegt.

Wird zugleich ν beliebig groß, so gilt für

$$B = \left[\frac{\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu}{\nu!} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}}$$

dasselbe; wenn aber ν unter einer endlichen Schranke bleibt, so betrachtet man B in der Form

$$B = \left[\left(\frac{\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu}{\nu!} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right]^{\frac{1}{s' + \frac{s\nu}{\mu}}};$$

der Wert des Ausdruckes in der eckigen Klammer nähert sich für hinreichend große μ dem Wert 1, also auch der Wert von B.

Soll die Behauptung für ein gegebenes Wertepaar ε, ε' nachgewiesen werden, so bestimmt man ein Wertepaar ε_0, ε_0' entsprechend den Bedingungen:

$$2\varepsilon_0 \leqq \varepsilon, \quad 2\varepsilon_0' \leqq \varepsilon', \tag{4}$$

$$c\left(\alpha(\gamma+\varepsilon_0)\right)^{\frac{s}{\alpha}} = c'\left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')\right)^{\frac{s'}{\alpha'}}.$$

Der gemeinsame Wert der beiden Seiten der letzten Gleichung sei $A+\tau_0$. Aus der Voraussetzung folgt dann, daß zu τ_0 ein n_{τ_0} existiert, so daß man für alle μ, ν, für welche

$$s'\mu + s\nu \geqq n_{\tau_0}$$

ist, erhält:

$$\left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} < (A+\tau_0)^{\frac{1}{ss'}}$$

oder

$$\left|a_\mu^{(\nu)}\right| < \frac{\left(\frac{A+\tau_0}{c}\right)^{\frac{\mu}{s}}}{(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{\left(\frac{A+\tau_0}{c'}\right)^{\frac{\nu}{s'}}}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}}$$

oder, wenn man für $A+\tau_0$ den einen bezw. anderen Ausdruck einsetzt:

$$\left|a_\mu^{(\nu)}\right| < \frac{\left(\alpha(\gamma+\varepsilon_0)\right)^{\frac{\mu}{\alpha}}}{(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{\left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}}}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}}.$$

Anderseits gibt es eine endliche positive Zahl k, so daß für alle (nur in endlicher Anzahl[1]) vorhandenen) Wertepaare μ, ν, für welche

$$s'\mu + s\nu < n_{\tau_0}$$

ist, die Ungleichung gilt:

$$\left|a_\mu^{(\nu)}\right| < k \cdot \frac{\left(\alpha(\gamma+\varepsilon_0)\right)^{\frac{\mu}{\alpha}}}{(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{\left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}}}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}}.$$

Ist K die größere der beiden Zahlen k und 1, so gilt:

$$\left|a_\mu^{(\nu)}\right| < K \frac{\left(\alpha(\gamma+\varepsilon_0)\right)^{\frac{\mu}{\alpha}}}{(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{\left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}}}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}} \quad \text{für} \begin{cases} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

---

[1]) Wäre in diesen Betrachtungen $\overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}$ statt $\overline{\lim}_{s'\mu+s\nu=\infty}$ eingeführt worden, so würde die letzte Ungleichung nur für alle Werte μ, ν gelten, welche einzeln hinreichend groß würden, die Werte μ, ν, für welche sie nicht feststünde, wären in unendlicher Anzahl vorhanden; damit gäbe es nicht notwendig eine Zahl k der eben angegebenen Art.

Multipliziert man beiderseits mit $r^{\mu} r'^{\nu}$ und setzt auf der rechten Seite

$$\alpha(\gamma+\varepsilon_0)r^{\alpha}=\rho, \quad \alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')r'^{\alpha'}=\rho', \tag{5}$$

so ergibt sich:

$$|a_{\mu}^{(\nu)}|\, r^{\mu} r'^{\nu} < K\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\rho'^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \text{ für } \begin{cases}\mu=0,1,2,\ldots\\ \nu=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

Summiert man über alle μ, ν und beachtet, daß

$$|g(x,y)|=\left|\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu}^{(\nu)} x^{\mu} y^{\nu}\right| \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\mu}^{(\nu)}|\, r^{\mu} r'^{\nu}$$

ist, so folgt:

$$|g(x,y)| < K\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\rho'^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}.$$

Für den Ausdruck der rechten Seite wird nun eine obere Schranke gesucht.

Man bestimmt zwei positive ganze Zahlen m, n, so daß man hat:

$$\left(\frac{\rho}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{1}{2} \text{ für } \mu \geqq m,$$

$$\left(\frac{\rho'}{\nu+1}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} < \frac{1}{2} \text{ für } \nu \geqq n;$$

dazu braucht nur

$$\frac{\rho}{m+1} < \frac{1}{2\alpha} \text{ oder } m > 2^{\alpha}\rho - 1 \text{ bezw. } n > 2^{\alpha'}\rho' - 1$$

zu sein; man wählt also

$$m=[2^{\alpha}\rho]^{1)} \text{ bezw. } n=[2^{\alpha'}\rho']. \tag{6}$$

Nun zerlegt man die Doppelsumme folgendermaßen:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\rho'^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho'^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} =$$

$$=\left\{\sum_{\mu=0}^{m-1}\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{\rho^{m}}{m!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left[1+\left(\frac{\rho}{m+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\left(\frac{\rho^2}{(m+1)(m+2)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\cdots\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\frac{\rho'^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} + \left(\frac{\rho'^{n}}{n!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\left[1+\left(\frac{\rho'}{n+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\left(\frac{\rho'^2}{(n+1)(n+2)}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}+\cdots\right]\right\}.$$

---

1) $[2^{\alpha}\rho]$ bedeutet die größte in $2^{\alpha}\rho$ enthaltene ganze Zahl.

Ersetzt man im ersten Summanden jedes Faktors jedes Glied durch $e^{\frac{\varrho}{\alpha}}$ bezw. $e^{\frac{\varrho'}{\alpha'}}$, im zweiten Summanden den ersten Faktor ebenfalls durch $e^{\frac{\varrho}{\alpha}}$ bezw. $e^{\frac{\varrho'}{\alpha'}}$, hingegen die Ausdrücke

$$\left(\frac{\rho}{m+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ \left(\frac{\rho}{m+2}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ldots,\left(\frac{\rho'}{n+1}\right)^{\frac{1}{\alpha'}},\ \left(\frac{\rho'}{n+2}\right)^{\frac{1}{\alpha'}},\ldots$$

durch $\frac{1}{2}$, so folgt:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\rho^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}<\left\{m e^{\frac{\varrho}{\alpha}}+e^{\frac{\varrho}{\alpha}}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{n e^{\frac{\varrho'}{\alpha'}}+e^{\frac{\varrho'}{\alpha'}}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right]\right\}=$$

$$=(m+2)(n+2)\,e^{\frac{\varrho}{\alpha}+\frac{\varrho'}{\alpha'}}.$$

Daher ist

$$|g(x,y)|<K(m+2)(n+2)\,e^{\frac{\varrho}{\alpha}+\frac{\varrho'}{\alpha'}}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (5) und (6):

$$|g(x,y)|<K\left(2^{\alpha}\alpha(\gamma+\varepsilon_0)r^{\alpha}+2\right)\left(2^{\alpha'}\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')r'^{\alpha'}+2\right).e^{(\gamma+\varepsilon_0)r^{\alpha}+(\gamma'+\varepsilon_0')r'^{\alpha'}}.$$

Da nun für hinreichend große Werte von $r^2+r'^2$, etwa $r^2+r'^2>R^2$,

$$K\left(2^{\alpha}\alpha(\gamma+\varepsilon_0)r^{\alpha}+2\right)\left(2^{\alpha'}\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')r'^{\alpha'}+2\right)<e^{\varepsilon_0 r^{\alpha}+\varepsilon_0' r'^{\alpha'}}$$

ist [1]), so erhält man hieraus mit Rücksicht auf die Relationen (4) die Behauptung, wenn $R_{\varepsilon,\varepsilon'}\geqq R$ gewählt wird.

Die Beweise der letzten beiden Sätze bleiben richtig, wenn $\gamma=\gamma'=0$ ist; es können also ohne weiteres die folgenden beiden Sätze als Spezialfälle der beiden letzten ausgesprochen werden: [2])

Satz 16. Hat die Funktion $g(x,y)$ die Eigenschaft, daß für ein Paar positiver Werte α, α' die Ungleichung

$$\lg\overline{g}(r,r')<\varepsilon r^{\alpha}+\varepsilon' r'^{\alpha'}\quad\text{für } r^2+r'^2>R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}$$

bei beliebigen positiven ε, ε' gilt, so ist

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}\left[\left|a_{\mu}^{(\nu)}\right|(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}=0,$$

wobei s, s' beliebige positive ganze Zahlen sind.

---

1) Dies läßt sich durch Unterscheidung der Fälle $r\geqq r'$, $r\leqq r'$ leicht in exakter Weise dartun.

2) Dabei wird $c=c'=1$ gesetzt; ferner wird lim statt $\overline{\lim}$ geschrieben, was wegen des Wertes Null gestattet ist.

Satz 17. (Umkehrung des vorigen.) Haben die Koeffizienten einer ganzen Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es zwei positive Zahlen α, α' gibt, so daß für irgend welche positive ganze s, s' die Gleichung

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}\left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right|(\mu\,!)^{\frac{1}{\alpha}}\,(\nu\,!)^{\frac{1}{\alpha'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}=0$$

erfüllt ist, so ist bei beliebigen positiven ε, ε'

$$\lg\overline{g}(r, r')<\varepsilon r^\alpha+\varepsilon' r'^{\alpha'} \text{ für } r^2+r'^2>R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}.$$

Um auch aus der im Vergleich zur Voraussetzung (1) p. 23 weniger exakten Ungleichung

$$\lg\overline{g}(r, r')<r^{\alpha+\delta}+r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2+r'^2>R^2_{\delta,\delta'}$$

eine Folgerung über das Verhalten der Koeffizienten von $g(x, y)$ ziehen zu können, wird der folgende Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz. Aus der für alle positiven δ, δ' und $r^2+r'^2>R^2_{\delta,\delta'}$ gültigen Ungleichung

$$\lg\overline{g}(r,r')<r^{\alpha+\delta}+r'^{\alpha'+\delta'} \tag{7}$$

folgt die Ungleichung

$$\lg\overline{g}(r, r')<\varepsilon r^{\alpha+\delta}+\varepsilon' r'^{\alpha'+\delta'}, \tag{8}$$

gültig für alle positiven ε, ε' und $r^2+r'^2>R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}$.

Ist nämlich zunächst ein beliebiges ε gegeben, so läßt sich zeigen, daß ein R_ε existiert, so daß man hat:

$$\lg\overline{g}(r, r')<\varepsilon r^{\alpha+\delta}+r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2+r'^2>R^2_\varepsilon. \tag{9}$$

Man bestimmt zu den Zahlen δ, ε eine Zahl R_1, so daß die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{r^{\frac{\delta}{2}}}<\varepsilon \text{ von } r>R_1 \text{ an}; \tag{10}$$

R_1 ist eine durch δ und ε fest bestimmte Zahl; nun unterscheidet man die Fälle:

$$a)\ r>R_1,\quad b)\ r\leqq R_1.$$

In jedem der beiden Fälle wird die Existenz einer Zahl R_ε der oben angegebenen Art erwiesen.

a) Man bestimmt $R_{\frac{\delta}{2},\delta'}$, so daß man hat:

$$\lg \bar{g}(r,r') < r^{\alpha+\frac{\delta}{2}} + r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\frac{\delta}{2},\delta'}$$

oder nach Ungleichung (10), da

$$r^{\alpha+\frac{\delta}{2}} = r^{-\frac{\delta}{2}} \cdot r^{\alpha+\delta}$$

ist:

$$\lg \bar{g}(r,r') < \varepsilon r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\frac{\delta}{2},\delta'},\ r > R_1.$$

b) Man bestimmt $R_{\delta,\frac{\delta'}{2}}$, so daß man für $r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\frac{\delta'}{2}}$ erhält:

$$\lg \bar{g}(r,r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\frac{\delta'}{2}} =$$
$$= \varepsilon r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} + \left[(1-\varepsilon) r^{\alpha+\delta} - \left(1 - r'^{-\frac{\delta'}{2}}\right) r'^{\alpha'+\delta'}\right].$$

Wählt man für r' eine Schranke R_2 $\left(\geqq R_{\delta,\frac{\delta'}{2}}\right)$ so groß, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer negativ wird, was wegen der Voraussetzung $r \leqq R_1$ stets möglich ist, so folgt:

$$\lg \bar{g}(r,r') < \varepsilon r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r' > R_2,\ r \leqq R_1,$$

also jedenfalls für $r^2 + r'^2 > R_1^2 + R_2^2$, $r \leqq R_1$.

Wählt man daher

$$R_\varepsilon > \begin{cases} R_{\frac{\delta}{2},\delta'} \\ \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \end{cases},$$

so gilt Ungleichung (9) in beiden Fällen für $r^2 + r'^2 > R_\varepsilon^2$.

Ist nun weiter ein beliebiges ε' gegeben, so läßt sich in derselben Weise wie eben die Existenz eines $R_{\varepsilon,\varepsilon'}$ erweisen, derart, daß die Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r,r') < \varepsilon r^{\alpha+\delta} + \varepsilon' r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}$$

gilt, indem man nun R_1' so bestimmt, daß

$$\frac{1}{r'^{\frac{\delta'}{2}}} < \varepsilon' \text{ ist von } r' > R_1' \text{ an,}$$

die beiden Fälle

$$r' > R_1',\quad r' \leqq R_1'$$

unterscheidet und an Stelle der vorausgesetzten Ungleichung nun die eben (für beliebige δ, δ') bewiesene Ungleichung (9) benützt.

Nunmehr läßt sich das oben beabsichtigte Resultat folgendermaßen aussprechen:

Satz 18. Hat die ganze Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß für ein Paar positiver Werte α, α' und beliebige positive δ, δ' die Ungleichung

$$\lg \overline{g}(r, r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \quad \text{für} \quad r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}$$

gilt, so ist für beliebige positive δ, δ' und ganze positive s, s'

$$\overline{\lim_{s'\mu+\nu s=\infty}} \left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right| (\mu\,!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} (\nu\,!)^{\frac{1}{\alpha'+\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = 0.$$

Zum Beweise benützt man statt der vorausgesetzten Ungleichung die durch den Hilfssatz aus ihr sich ergebende Ungleichung (8) und wendet Satz 16 in der Weise an, daß man α durch $\alpha + \delta$, α' durch $\alpha' + \delta'$ ersetzt.

Auch dieser Satz ist wieder umkehrbar, nämlich:

Satz 19. Haben die Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}$ einer Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es zwei positive Zahlen α, α' gibt, derart, daß für beliebige positive δ, δ'

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}} \left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right| (\mu\,!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} (\nu\,!)^{\frac{1}{\alpha'+\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = 0$$

ist, wobei s, s' irgend welche positive ganze Zahlen sind, so ist für beliebige positive δ, δ'

$$\lg \overline{g}(r, r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \quad \text{für} \quad r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}.$$

Nach Satz 17 folgt nämlich aus der vorausgesetzten Gleichung die Ungleichung (8) für beliebige positive ε, ε' und daraus a fortiori die behauptete Ungleichung.

§ 2. Beziehungen, welche aus der Existenz einer unteren Schranke für das Anwachsen des absoluten Betrages einer Funktion $g(x,y)$ von nicht-unendlicher Ordnung folgen.

Den sechs Sätzen des ersten Paragraphen lassen sich völlig entsprechende an die Seite stellen, indem man von denjenigen Ungleichungen ausgeht, welche das Anwachsen des absoluten Betrages der Funktion $g(x, y)$ nach unten hin beschränken.

Satz 20. Hat eine ganze Funktion von nicht-unendlicher Ordnung

$$g(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y$$

die Eigenschaft, daß für irgend ein System positiver Werte α, α', γ, γ' bei beliebigen positiven ε, ε' die Ungleichung

$\lg \overline{g}(r, r') > (\gamma - \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' - \varepsilon') r'^{\alpha'}$ für gewisse bel. große $r^2 + r'^2$

gilt, so ist

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} \geqq A^{\frac{1}{ss'}},$$

wenn s, s' irgendwelche positive ganze und c, c' irgendwelche positive Zahlen sind, für welche

$$c(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c'(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}}$$

ist, und A den gemeinsamen Wert dieser beiden Ausdrücke bezeichnet.

Wäre nämlich dieser obere Limes $< A^{\frac{1}{ss'}}$, so wäre er auch noch $\leqq A_1^{\frac{1}{ss'}}$, wenn

$$A_1 = c\left(\alpha(\gamma - \eta)\right)^{\frac{s}{\alpha}} = c'\left(\alpha'(\gamma' - \eta')\right)^{\frac{s'}{\alpha'}}$$

ist, wo η, η' passende positive Zahlen sind; damit wäre nach Satz 15 für alle positiven ε, ε':

$$\lg \overline{g}(r, r') < (\gamma - \eta + \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' - \eta' + \varepsilon') r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}.$$

Wählt man

$$\varepsilon \leqq \frac{\eta}{2}, \quad \varepsilon' \leqq \frac{\eta'}{2},$$

so wird

$$\gamma - \eta + \varepsilon \leqq \gamma - \frac{\eta}{2}, \quad \gamma' - \eta' + \varepsilon' \leqq \gamma' - \frac{\eta'}{2},$$

also

$$\lg \overline{g}(r, r') < \left(\gamma - \frac{\eta}{2}\right) r^{\alpha} + \left(\gamma' - \frac{\eta'}{2}\right) r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'},$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Umgekehrt: Satz 21. Haben die Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}$ einer Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es positive Zahlen α, α', γ, γ', c, c' und positive ganze Zahlen s, s' gibt, welche den Relationen genügen:

$$c(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c'(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}} (= A),$$

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} \geqq A^{\frac{1}{ss'}},$$

so ist bei beliebigen positiven ε, ε'

$\lg \bar{g}(r, r') > (\gamma - \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' - \varepsilon') r'^{\alpha'}$ für gewisse bel. große $r^2 + r'^2$.

Wäre nämlich für ein Wertepaar ε, ε'

$$\lg \bar{g}(r, r') \leqq (\gamma - \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' - \varepsilon') r'^{\alpha'} \text{ für alle } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'},$$

so träfe dies für zwei Werte

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon, \quad \varepsilon_1' \leqq \varepsilon'$$

um so mehr zu. Zwei solche Werte ε_1, ε_1' sollen nun so gewählt werden, daß

$$c\left(\alpha(\gamma - \varepsilon_1)\right)^{\frac{s}{\alpha}} = c'\left(\alpha'(\gamma' - \varepsilon_1')\right)^{\frac{s'}{\alpha'}} = A_1$$

ist. Da dann um so mehr die Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r, r') < \left(\gamma - \frac{\varepsilon_1}{2}\right) r^{\alpha} + \left(\gamma' - \frac{\varepsilon_1'}{2}\right) r'^{\alpha'}$$

besteht, die sich in der Form

$$\lg \bar{g}(r, r') < \left((\gamma - \varepsilon_1) + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) r^{\alpha} + \left((\gamma' - \varepsilon_1') + \frac{\varepsilon_1'}{2}\right) r'^{\alpha'}$$

schreiben läßt, so folgt nach Satz 14:

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left|a_{\mu}^{(\nu)}\right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} \leqq A_1^{\frac{1}{s s'}}.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung, da $A_1 < A$ ist.

Satz 22. Hat die ganze Funktion von nicht-unendlicher Ordnung $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es zu einem Paare positiver Zahlen α, α' keine zwei Zahlen C, C' gibt, so daß

$$\lg \bar{g}(r, r') < C r^{\alpha} + C' r'^{\alpha'} \text{ für alle } r^2 + r'^2 > R^2$$

ist, so ist

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left|a_{\mu}^{(\nu)}\right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} = \infty,$$

wobei s, s' beliebige ganze positive Zahlen sind.

Wäre nämlich dieser obere Limes nicht größer als eine endliche Zahl $A^{\frac{1}{s s'}}$, so könnte man zwei positive Zahlen γ, γ' so bestimmen, daß

$$(\alpha \gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = (\alpha' \gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}} = A$$

wäre; dann würde nach Satz 15 folgen:

$$\lg \overline{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' + \varepsilon') r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'},$$

gegen die Voraussetzung.

Satz 23. Haben die Koeffizienten $a_{\mu}^{(\nu)}$ einer Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es zwei positive Zahlen α, α' gibt, so daß für irgendwelche positive ganze Zahlen s, s' die Gleichung

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left| a_{\mu}^{(\nu)} \right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} = \infty$$

besteht, so gibt es keine zwei endlichen Zahlen C, C', so daß man hätte:

$$\lg \overline{g}(r, r') < C r^{\alpha} + C' r'^{\alpha'} \text{ für alle } r^2 + r'^2 > R^2.$$

Gäbe es nämlich zwei solche Zahlen C, C', so gäbe es auch zwei Zahlen γ, γ', welche der Gleichung

$$(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = (\alpha' \gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}} \; (= A)$$

genügten und für die bei beliebigen positiven ε, ε' die Ungleichung bestünde:

$$\lg \overline{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' + \varepsilon') r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}.$$

Damit wäre nach Satz 14 im Widerspruch mit der Voraussetzung:

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left| a_{\mu}^{(\nu)} \right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} \leqq A^{\frac{1}{s s'}}.$$

Satz 24. Hat die ganze Funktion von nicht-unendlicher Ordnung $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß für ein Paar positiver Werte α, α' und beliebige positive δ, δ' die Ungleichung

$$\lg \overline{g}(r, r') > r^{\alpha - \delta} + r'^{\alpha' - \delta'} \text{ für gewisse bel. große } r^2 + r'^2$$

gilt, so ist für beliebige positive δ, δ' und ganze positive s, s':

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left| a_{\mu}^{(\nu)} \right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha - \delta}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha' - \delta'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} = \infty.$$

Wäre nämlich dieser obere Limes nicht größer als eine endliche Zahl $A^{\frac{1}{s s'}}$, so könnte man zwei Zahlen γ, γ' so bestimmen, daß

$$\left((\alpha - \delta)\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha - \delta}} = \left((\alpha' - \delta')\gamma'\right)^{\frac{1}{\alpha' - \delta'}} = A$$

wäre; daraus ergäbe sich nach Satz 15 die Ungleichung:

$$\lg \overline{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon) r^{\alpha - \delta} + (\gamma' + \varepsilon') r'^{\alpha' + \delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}.$$

Anderseits liefert die Voraussetzung, die für alle Werte δ, δ', also auch etwa für $\frac{\delta}{2}$, $\frac{\delta'}{2}$ gilt, das widersprechende Resultat:

$$\lg \overline{g}(r, r') > r^{\alpha - \frac{\delta}{2}} + r'^{\alpha' - \frac{\delta'}{2}} \text{ für gewisse bel. große } r^2 + r'^2.$$

Satz 25. Haben die Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}$ einer Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es zwei positive Zahlen α, α' gibt, derart, daß für beliebige positive δ, δ'

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left| a_\mu^{(\nu)} \right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha - \delta}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha' - \delta'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} = \infty$$

st, wobei s, s' irgendwelche positive ganze Zahlen sind, so ist für beliebige positive δ, δ':

$$\lg \overline{g}(r, r') > r^{\alpha - \delta} + r'^{\alpha' - \delta'} \text{ für gewisse bel. große } r^2 + r'^2.$$

Nach Satz 23 gibt es nämlich in dem vorausgesetzten Falle keine zwei Zahlen C, C', so daß man hätte:

$$\lg \overline{g}(r, r') < C r^{\alpha - \delta} + C' r'^{\alpha' - \delta'} \text{ für alle } r^2 + r'^2 > R^2;$$

damit kann auch die folgende Relation nicht bestehen:

$$\lg \overline{g}(r, r') \leqq r^{\alpha - \delta} + r'^{\alpha' - \delta'} \text{ für alle } r^2 + r'^2 > R^2,$$

d. h. für gewisse beliebig große Werte von $r^2 + r'^2$ erhält man immer wieder:

$$\lg \overline{g}(r, r') > r^{\alpha - \delta} + r'^{\alpha' - \delta'}.$$

§ 3. Beziehungen zwischen den Ordnungspaaren bezw. den Ordnungspaaren und dem zugehörigen Typus einer ganzen Funktion $g(x, y)$ von endlicher Ordnung und dem infinitären Verhalten ihrer Koeffizienten.

Indem man die Sätze des vorigen Paragraphen paarweise zusammenfaßt, ergeben sich unmittelbar die in den folgenden Sätzen ausgesprochenen umkehrbaren Beziehungen zwischen dem infinitären Verhalten der Koeffizienten einer ganzen Funktion $g(x, y)$ von endlicher Ordnung und einerseits ihren Ordnungspaaren im allgemeinen, anderseits ihren Ordnungspaaren und dem zugehörigen Typus.

Aus den Sätzen 18 und 24, deren Voraussetzungen zusammengenommen das Wertepaar α, α' gerade als Ordnungspaar der Funktion $g(x, y)$ charakterisieren, bezw. aus den Umkehrungen dieser Sätze (19 u. 25) folgt:

Satz 26. Ist α, α' Ordnungspaar der ganzen Funktion endlicher [1]) Ordnung $g(x, y)$, so ist für irgendwelche positive δ, δ' und positive ganze s, s':

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}}\left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right|(\mu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}}(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'-\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}=\infty,$$

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}\left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right|(\mu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}}(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'+\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}=0$$

und umgekehrt.

Ebenso folgt aus den Sätzen 14 und 20, bezw. aus deren Umkehrungen (Satz 15 und 21):

Satz 27. Ist α, α' Ordnungspaar der ganzen Funktion endlicher Ordnung $g(x, y)$, und ist die Funktion vom Normaltypus in bezug auf dieses Ordnungspaar und γ, γ' ein zugehöriges Typuspaar, so ist

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}}\left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right|(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}c^{\frac{\mu}{s}}c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}=A^{\frac{1}{ss'}},$$

wenn c, c' irgendwelche positive und s, s' irgendwelche positive ganze Zahlen sind, für welche gilt:

$$c(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}}=c'(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}}=A,$$

und umgekehrt.

Aus den Sätzen 16 und 24, deren Voraussetzungen den eigentlichen [2]) Minimaltypus der Funktion $g(x, y)$ in bezug auf α, α' als Ordnungspaar charakterisieren, bezw. aus den Umkehrungen dieser Sätze (17 und 25) folgt:

Satz 28. Ist α, α' Ordnungspaar der ganzen Funktion endlicher Ordnung $g(x, y)$, und ist die Funktion in bezug auf dieses Ordnungspaar vom eigentlichen Minimaltypus, so ist:

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}\left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right|(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}=0,$$

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}}\left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right|(\mu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}}(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'-\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}=\infty$$

und umgekehrt.

---

[1]) Diese Voraussetzung ist hier notwendig; sie vertritt die frühere, daß α, α' positive Zahlen sind (Null ausgeschlossen).

[2]) Im Falle des uneigentlichen Minimaltypus ergibt sich keine derartige Relation, was von vornherein daraus hervorgeht, daß die Gleichung

$$c(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}}=c'(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}}$$

für endliche Zahlen nicht erfüllt sein kann, wenn von den Zahlen γ, γ' die eine verschwindet, die andere dagegen nicht. Diese scheinbare Ausnahme entspricht in diesem Zusammenhange dem Umstande, daß z. B. im Falle $\gamma=0$, $\gamma'\neq 0$ die angeführte Gleichung durch $s=\infty$, $s'\neq\infty$ befriedigt wird, was einer Anordnung der in Frage kommenden Doppelfolge in die Reihe der Kolonnen entspricht.

Aus den Sätzen 18 und 22, deren Voraussetzungen den Maximaltypus der Funktion $g(x, y)$ in bezug auf α, α' als Ordnungspaar charakterisieren, bezw. aus den Umkehrungen dieser Sätze (19 und 23) folgt schließlich:

Satz 29. Ist α, α' Ordnungspaar der ganzen Funktion endlicher Ordnung $g(x, y)$, und ist die Funktion in bezug auf dieses Ordnungspaar vom Maximaltypus, so ist:

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}\left[\left|a_{\mu}^{(\nu)}\right|(\mu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}}(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'+\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}=0,$$

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}}\left[\left|a_{\mu}^{(\nu)}\right|(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}=\infty$$

und umgekehrt.

III. Abschnitt.

Beziehungen zwischen dem Verhalten gewisser spezieller ganzer transzendenter Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen im Unendlichen und der Art ihres Verschwindens.

§ 1. Allgemeine Produktdarstellung ganzer Funktionen $g(x,y)$; daraus entspringende Einteilung dieser Funktionen.

Die Art des Verschwindens einer ganzen Funktion kommt in ihrer Darstellung durch ein endliches oder unendliches Produkt unmittelbar zum Ausdruck.

Bei der allgemeinen von Herrn H. Hahn[1]) angegebenen Produktdarstellung ganzer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen erscheinen als Faktoren gewisse „Primfunktionen", nämlich ganze Funktionen von x, y, die höchstens für solche Wertepaare x, y verschwinden, wie sie durch eine einzige, nur einfach zu rechnende[2]) analytische Funktion $y = f(x)$ (die endlich- oder unendlichvieldeutig sein kann) geliefert werden. Diese Primfunktionen von zwei Veränderlichen können dann von zweierlei Art sein:

1. Von der Form $g_n(x, y) . e^{\gamma(x,y)}$, wobei g_n eine irreduzible ganze rationale Funktion ist (speziell auch eine Konstante oder nur von x oder y allein abhängig, dann notwendig linear), γ eine ganze rationale oder transzendente Funktion (speziell auch eine Konstante oder nur von x oder y allein abhängig);

2. von der Form $g(x, y) . e^{\gamma(x,y)}$, wobei g eine ganze transzendente Funktion ist, γ wieder von der vorigen Art.

---

[1]) H. Hahn, Über Funktionen zweier komplexer Veränderlicher, Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 16 (1905).

[2]) D. h. die Primfunktion darf die durch $y = f(x)$ gelieferten Wertepaare x, y nur als einfache Nullstellen haben.

Herr H. Hahn hat nun den Satz bewiesen:

Jede ganze Funktion von zwei Veränderlichen läßt sich darstellen als endliches oder unendliches Produkt von Primfunktionen.

Diese Darstellung führt zur Unterscheidung folgender fünf Grundtypen von ganzen Funktionen zweier Veränderlicher:

1. Produkte von endlich vielen Primfunktionen der ersten Form;
2. Produkte von unendlich vielen Primfunktionen der ersten Form, bei welchen der Grad der irreduziblen ganzen rationalen Funktion unter einer endlichen Schranke bleibt;
3. Produkte von unendlich vielen Primfunktionen der ersten Form, bei welchen der Grad der irreduziblen ganzen rationalen Funktion ins Unendliche wächst;
4. Produkte von endlich vielen Primfunktionen der zweiten Form;
5. Produkte von unendlich vielen Primfunktionen der zweiten Form.

Alle weiteren ganzen Funktionen zweier Veränderlichen können als Produkte von je zweien dieser Grundtypen angesehen werden, und zwar sind die möglichen Kombinationen: Typus 1 mit 4, 1 mit 5, 2 mit 4, 2 mit 5, 3 mit 4, 3 mit 5.

Der erste der angeführten Grundtypen stellt die ganzen rationalen Funktionen mit einem Exponentialfaktor vor; auf diesen einfachsten Typus wird hier nicht weiter eingegangen. Nur der zweite Grundtypus soll im folgenden näher untersucht werden. Die zu ihm gehörigen Funktionen werden kurz als „Funktionen der zweiten Art" bezeichnet.

§ 2. Eine spezielle Produktdarstellung der ganzen Funktionen zweiter Art.

Zur Untersuchung der ganzen Funktionen zweiter Art ist eine spezielle Form der Hahnschen Produktdarstellung zweckmäßig, die der Weierstraßschen Produktdarstellung ganzer Funktionen einer Veränderlichen völlig analog ist. Diese ist im wesentlichen in dem folgenden Satze von O. Biermann[1]) enthalten:

Wenn $g_\varkappa(x, y)$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$ unendlich viele ganze rationale Funktionen sind, die im Nullpunkt einen Wert $a_{00}^{(\varkappa)} \neq 0$ haben und die Eigenschaft besitzen, daß in jedem im Endlichen gelegenen Kreisgebiet nur endlich viele von ihnen Nullstellen haben, so ist eine ganze Funktion, deren Nullstellen mit denen der Funktionen $g_\varkappa(x, y)$ zusammenfallen, in der Form darstellbar:

$$G(x, y) = \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left\{ \frac{g_\varkappa(x, y)}{a_{00}^{(\varkappa)}} \cdot e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{g_\varkappa(x,y) - a_{00}^{(\varkappa)}}{-a_{00}^{(\varkappa)}} \right)^\lambda} \right\};$$

---

1) O. Biermann, Beitrag zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen, Wiener Sitzungsberichte, Bd. 89 (1884).

$p_\varkappa$ ist dabei von der Art zu wählen, daß $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left| \frac{g_\varkappa(x,y) - a_{00}^{(\varkappa)}}{-a_{00}^{(\varkappa)}} \right|^{p_\varkappa + 1}$ für alle Wertsysteme x, y konvergiert, was stets möglich ist, da unter allen Umständen die Wahl $p_\varkappa = \varkappa - 1$ genügt.

Die eben ausgesprochene Eigenschaft der Funktionen $g_\varkappa(x,y)$, in jedem endlichen Kreisgebiet nur in endlicher Anzahl zu verschwinden, ist, wie Herr H. Hahn beim Beweise seines oben zitierten Satzes zeigt, eine notwendige und hinreichende Eigenschaft der Primfunktionen ganzer Funktionen von zwei Veränderlichen. Im folgenden wird nun wieder die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgesucht, daß unendlich viele ganze rationale Funktionen. deren Grad unter einer endlichen Schranke bleibt, diese Eigenschaft haben, also Primfunktionen für eine Funktion zweiter Art sind. Zu diesem Zweck werden die beiden Hilfssätze vorausgeschickt:

Hilfssatz 1. Jede von den unendlich vielen ganzen rationalen Funktionen

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots + a_{n-1}^{(\varkappa)} x^{n-1} + a_n^{(\varkappa)} x^n \, (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

hat wenigstens eine Nullstelle, deren absoluter Betrag unter einer (von $\varkappa$ unabhängigen) endlichen Schranke liegt, wenn

$$|a_0^{(\varkappa)}| < G, \quad |a_n^{(\varkappa)}| > g$$

ist, wo G und g positive Zahlen sind, während die Koeffizienten $a_1^{(\varkappa)}, \ldots a_{n-1}^{(\varkappa)}$ ganz beliebig sind, auch den Wert Null haben oder ins Unendliche wachsen oder gegen Null konvergieren können, wenn $\varkappa$ ins Unendliche wächst.

Sind nämlich $x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}, \ldots x_n^{(\varkappa)}$ die Nullstellen von

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots a_n^{(\varkappa)} x^n,$$

so ist

$$|x_1^{(\varkappa)} . x_2^{(\varkappa)} \ldots x_n^{(\varkappa)}| = \frac{|a_0^{(\varkappa)}|}{|a_n^{(\varkappa)}|} < \frac{G}{g};$$

daraus folgt, daß der absolute Betrag mindestens einer der Nullstellen kleiner als $\frac{G}{g}$ sein muß.

Hilfssatz 2. Jede von den unendlich vielen ganzen rationalen Funktionen

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots + a_m^{(\varkappa)} x^m + \cdots + a_{n-1}^{(\varkappa)} x^{n-1} + a_n^{(\varkappa)} x^n \; (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

hat wenigstens eine Nullstelle, deren absoluter Betrag unter einer (von $\varkappa$ unabhängigen) endlichen Schranke liegt, wenn

$$|a_0^{(\varkappa)}| < G, \quad |a_m^{(\varkappa)}| > g,$$

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{m+1}^{(\varkappa)} = 0, \quad \lim_{\varkappa=\infty} a_{m+2}^{(\varkappa)} = 0, \ldots \lim_{\varkappa=\infty} a_n^{(\varkappa)} = 0$$

ist, wo $m = 1, 2, \ldots n$ sein kann [1]).

Nach dem 1. Hilfssatz hat nämlich jede der Funktionen

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots + a_m^{(\varkappa)} x^m$$

mindestens eine Nullstelle, deren absoluter Betrag unter einer endlichen Schranke Γ bleibt. Man faßt nun diese Funktionen als Funktionen n^{ten} Grades auf, indem man sie in der Form

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots + a_m^{(\varkappa)} x^m + 0 . x^{m+1} + \cdots + 0 . x^n$$

denkt. Da die Wurzeln einer algebraischen Gleichung stetige Funktionen der Koeffizienten sind, so ändern sich die Nullstellen dieser Funktionen beliebig wenig, die absoluten Beträge der oben hervorgehobenen Nullstellen bleiben also jedenfalls etwa kleiner als 2Γ, wenn man die Koeffizienten hinreichend wenig ändert, demnach auch wenn man die Funktionen

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots + a_m^{(\varkappa)} x^m + a_{m+1}^{(\varkappa)} x^{m+1} + \cdots + a_n^{(\varkappa)} x^n$$

an die Stelle der obigen setzt, falls die Funktionen nur von einem so großen $\varkappa$ an, etwa für $\varkappa \geqq K$, betrachtet werden, daß die Koeffizienten $a_{m+1}^{(\varkappa)}, \ldots a_n^{(\varkappa)}$ entsprechend wenig von Null sich unterscheiden. Die endlich vielen Funktionen für $\varkappa < K$ haben aber jedenfalls je eine Nullstelle unter einer endlichen Schranke Γ'; ist also Γ'' die größere der beiden Zahlen 2Γ und Γ', so haben alle Funktionen der vorausgesetzten Art mindestens je eine Nullstelle, deren absoluter Betrag kleiner als Γ'' ist.

$g_\varkappa(x, y)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ seien nun unendlich viele ganze rationale Funktionen, deren Grad unter einer endlichen Schranke bleibt. Jede dieser Funktionen kann in der Form angenommen werden:

$$g_\varkappa(x,y) = a_{00}^{(\varkappa)} + a_{10}^{(\varkappa)} x + a_{01}^{(\varkappa)} y + \cdots$$
$$+ a_{s0}^{(\varkappa)} x^s + \cdots + a_{s-\lambda,\lambda}^{(\varkappa)} x^{s-\lambda} y^\lambda + \cdots + a_{0s}^{(\varkappa)} y^s.$$

Sollen nun diese Funktionen die Eigenschaft haben, daß in jedem Kreisgebiet um den Nullpunkt nur endlich viele von ihnen Nullstellen besitzen, so können nur endlich viele Koeffizienten $a_{00}^{(\varkappa)}$ den

---

[1]) Für $m = n$ ergibt sich Hilfssatz 1, der also nur ein spezieller Fall des zweiten ist.

Wert Null haben, da in diesem Falle stets der Nullpunkt Nullstelle ist. Die Funktionen $g_\varkappa(x, y)$ mit verschwindendem $a_{00}^{(\varkappa)}$ sollen als Funktionen $\overline{\gamma_\varkappa}$ von den anderen getrennt werden; diese können dann in der Form geschrieben werden:

$$g_\varkappa(x, y) = 1 - \gamma_\varkappa(x, y),$$

wobei

$$\gamma_\varkappa(x, y) = a_{10}^{(\varkappa)} x + a_{01}^{(\varkappa)} y + \cdots + a_{s0}^{(\varkappa)} x^s + \cdots + a_{s-\lambda,\lambda}^{(\varkappa)} x^{s-\lambda} y^\lambda + \cdots + a_{0s}^{(\varkappa)} y^s.$$

Nunmehr läßt sich die gesuchte Bedingung in dem Satze aussprechen:

Satz 30. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in jedem endlichen Kreisgebiet nur endlich viele von den Funktionen $1 - \gamma_\varkappa(x, y)$ Nullstellen haben, ist:

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{\mu\nu}^{(\varkappa)} = 0 \text{ für } \begin{cases} \mu = 0, 1, \ldots s \\ \nu = 0, 1, \ldots s \ (\mu, \nu = 0, 0 \text{ ausgeschl.}). \end{cases}$$

Um die Bedingung als hinreichend zu erweisen, wird gezeigt, daß für alle Punkte x, y eines beliebig vorgelegten Kreisgebietes um den Nullpunkt mit den Radien R, R'

$$|\gamma_\varkappa(x, y)| < 1$$

bleibt von einem hinreichend großen $\varkappa$ ab.

Die Anzahl der Glieder in $\gamma_\varkappa(x, y)$ ist

$$\frac{s.(s+3)}{2} = q;$$

man wählt nun K so groß, daß für $\varkappa \geqq K$ gilt:

$$|a_{\mu\nu}^{(\varkappa)}| < \frac{1}{q R^\mu R'^\nu} \text{ für } \begin{cases} \mu = 0, 1, \ldots s \\ \nu = 0, 1, \ldots s \ (\mu, \nu = 0, 0 \text{ ausg.}). \end{cases}$$

Dann ist für $|x| \leqq R$, $|y| \leqq R'$:

$$|\gamma_\varkappa(x, y)| \leqq |a_{10}^{(\varkappa)} x| + |a_{01}^{(\varkappa)} y| + \cdots + |a_{s0}^{(\varkappa)} x^s| + \cdots + |a_{0s}^{(\varkappa)} y^s|$$

$$< \frac{R}{qR} + \frac{R'}{qR'} + \cdots + \frac{R^s}{qR^s} + \cdots + \frac{R'^s}{qR'^s} = 1.$$

Als notwendig wird die Bedingung erwiesen, indem sukzessive gezeigt wird, daß, wenn ein $\lim\limits_{\varkappa=\infty} a_{\mu\nu}^{(\varkappa)}$ nicht existierte oder von Null verschieden wäre, $1 - \gamma_\varkappa(x, y)$ für unendlich viele $\varkappa$ in einem für alle diese $\varkappa$ festen endlichen Kreisgebiet verschwinden müßte.

Setzt man

$$y = x^{s-1},$$

so geht $1 - \gamma_\varkappa(x, y)$ in der Weise in eine ganze rationale Funktion von x über, daß die Glieder der ursprünglichen Funktion lauter Glieder mit verschiedenen Potenzen von x in der neuen Funktion liefern; man erhält, nach Potenzen von x geordnet:

$$\mathfrak{g}_\varkappa(x) = 1 - a_{10}^{(\varkappa)} x - a_{20}^{(\varkappa)} x^2 - \cdots - a_{s0}^{(\varkappa)} x^s - a_{01}^{(\varkappa)} x^{s+1} - \cdots$$
$$- a_{0,s-1}^{(\varkappa)} x^{s^2-1} - a_{1,s-1}^{(\varkappa)} x^{s^2} - a_{0s}^{(\varkappa)} x^{s^2+s}.$$

Ist x_0 eine Nullstelle dieser Funktion, so ist $x = x_0$, $y = x_0^{s+1}$ eine Nullstelle der Funktion $1 - \gamma_\varkappa(x, y)$. Da mit $|x_0|$ auch $|x_0|^{s+1}$ unter einer endlichen Schranke bleibt, genügt es, zu zeigen, daß unendlich viele Funktionen $\mathfrak{g}_\varkappa(x)$ Nullstellen hätten, deren absolute Beträge unter einer endlichen Schranke blieben, falls irgend einer der Grenzwerte $\lim\limits_{\varkappa=\infty} a_{\mu\nu}^{(\varkappa)}$ nicht existierte oder von Null verschieden wäre. Dies gelingt mittels der vorausgeschickten Hilfssätze. Wäre nämlich nicht

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{0s}^{(\varkappa)} = 0,$$

so wäre

$$|a_{0s}^{(\varkappa)}| > g > 0 \text{ für unendlich viele } \varkappa.$$

Die diesen Werten $\varkappa$ entsprechenden Funktionen $\mathfrak{g}_\varkappa(x)$ hätten dann nach dem ersten Hilfssatz mindestens je eine Nullstelle, deren absoluter Betrag unter einer endlichen Schranke läge. Es muß also sein

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{0s}^{(\varkappa)} = 0.$$

Wäre nun nicht

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{1,s-1}^{(\varkappa)} = 0,$$

sondern

$$|a_{1,s-1}^{(\varkappa)}| > g > 0 \text{ für unendlich viele } \varkappa,$$

so hätten die diesen Werten $\varkappa$ entsprechenden Funktionen $\mathfrak{g}_\varkappa(x)$ nach dem zweiten Hilfssatz mindestens je eine Nullstelle, deren absoluter

Betrag unter einer endlichen Schranke läge; es muß also sein

$$\lim_{\varkappa=\infty} a^{(\varkappa)}_{1,s-1} = 0.$$

Fährt man so fort, so erweisen sich sukzessive alle angegebenen Bedingungen als notwendig.

Nach dem oben angeführten Biermannschen Satze stellt das folgende unendliche Produkt eine ganze Funktion dar, deren Nullstellen zusammenfallen mit den Nullstellen der ganzen rationalen Funktionen $1-\gamma_\varkappa(x,y)$:

$$G(x,y)=\prod_{\varkappa=1}^{\infty}\left\{[1-\gamma_\varkappa(x,y)]\,.\,e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{p_\varkappa}\frac{1}{\lambda}(\gamma_\varkappa(x,y))^\lambda}\right\};$$

die allgemeine Form der ganzen Funktionen zweiter Art erhält man hieraus durch Hinzunahme von endlich vielen im Nullpunkt verschwindenden ganzen rationalen Funktionen sowie eines Exponentialfaktors. Dieses Resultat faßt der folgende Satz zusammen:

Satz 31. Jede ganze Funktion zweiter Art hat die Form:

$$G(x,y)=e^{g(x,y)}\prod_{\varkappa=1}^{k}\bar{\gamma}_\varkappa(x,y)\prod_{\varkappa=1}^{\infty}\left\{[1-\gamma_\varkappa(x,y)]\,e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{p_\varkappa}\frac{1}{\lambda}(\gamma_\varkappa(x,y))^\lambda}\right\};$$

dabei ist $g(x,y)$ eine ganze rationale oder transzendente Funktion,

$$\bar{\gamma}_\varkappa(x,y)=c^{(\varkappa)}_{10}x+c^{(\varkappa)}_{01}y+\cdots+c^{(\varkappa)}_{r0}x^r+\cdots+c^{(\varkappa)}_{0r}y^r,$$

$$\gamma_\varkappa(x,y)=a^{(\varkappa)}_{10}x+a^{(\varkappa)}_{01}y+\cdots+a^{(\varkappa)}_{s0}x^s+\cdots+a^{(\varkappa)}_{0s}y^s,$$

und zwar haben die Koeffizienten $a^{(\varkappa)}_{\mu\nu}$ notwendig die Eigenschaft:

$$\lim_{\varkappa=\infty} a^{(\varkappa)}_{\mu\nu}=0 \text{ für } \begin{cases}\mu=0,1,\ldots s\\ \nu=0,1,\ldots s \;\; (\mu,\nu=0,0 \text{ ausg.});\end{cases}$$

$p_\varkappa$ ist von der Art, daß $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty}|\gamma_\varkappa(x,y)|^{p_\varkappa+1}$ für alle x, y konvergiert.

Fehlt der äußere Exponentialfaktor, so werden die Funktionen „primitiv“ genannt; reicht ein endliches $p_\varkappa=p$ zur Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty}|\gamma_\varkappa(x,y)|^{p_\varkappa+1}$ hin, so werden die Funktionen als solche „von endlichem Range“ bezeichnet.

§ 3. Ganze Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen.

Ein Versuch, die allgemeinen Funktionen zweiter Art im Anschluß an die entsprechenden Untersuchungen im Gebiete der Funktionen einer Veränderlichen weiter zu betrachten, führt auf erhebliche Schwierigkeiten; diese sind, wie sich im folgenden zeigen wird, nicht so sehr durch das Hinzutreten einer zweiten Veränderlichen an sich bedingt, als durch die Existenz nicht-linearer irreduzibler Polynome von zwei Veränderlichen. Es wird daher von hier ab der spezielle Fall der Funktionen zweiter Art weiter behandelt, bei welchem diese Schwierigkeiten nicht vorhanden sind: diejenigen ganzen Funktionen zweiter Art, bei welchen die rationalen Faktoren die Primfunktionen linear sind. Sie werden als „ganze Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen" bezeichnet. Nach Satz 31 ist ihre allgemeine Form, wenn $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, $d_\varkappa$ statt $a_{10}^{(\varkappa)}$, $a_{01}^{(\varkappa)}$, $c_{10}^{(\varkappa)}$, $c_{01}^{(\varkappa)}$ geschrieben wird:

$$G(x,y)=e^{g(x,y)}\prod_{\varkappa=1}^{k}(c_\varkappa x+d_\varkappa y)\prod_{\varkappa=1}^{\infty}\left\{[1-(a_\varkappa x+b_\varkappa y)]e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{p_\varkappa}\frac{1}{\lambda}(a_\varkappa x+b_\varkappa y)^\lambda}\right\}; \quad (1$$

dabei ist

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_\varkappa=0,\quad \lim_{\varkappa=\infty} b_\varkappa=0;$$

$p_\varkappa$ ist so zu wählen, daß $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty}|a_\varkappa x+b_\varkappa y|^{p_\varkappa+1}$ für alle x, y konvergiert.

Funktionen dieser Art, die von endlichem Range sind, werden genauer als solche „vom mittleren [1]) Range p" bezeichnet, wenn $p_\varkappa=p$ die kleinste Zahl ist, für welche die eben angeführte Summe konvergiert.

In diesem Falle läßt sich die Bedingung der Konvergenz von $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty}|a_\varkappa x+b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y durch eine gleichwertige ersetzen:

Satz 32. Die Konvergenz von $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty}|a_\varkappa x+b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y ist gleichwertig mit der gleichzeitigen Konvergenz von $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty}|a_\varkappa|^{p+1}$ und $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty}|b_\varkappa|^{p+1}$.

---

[1]) Diese Bezeichnung wird sich später (§ 8) rechtfertigen.

Aus der Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y ergibt sich nämlich diejenige von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p+1}$, indem man für x, y speziell 1, 0 bezw. 0, 1 setzt[1]).

Umgekehrt folgt aus der Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p+1}$ diejenige von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x|^{p+1}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y und hieraus, wie leicht zu sehen[2]), diejenige von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} (|a_\varkappa x| + |b_\varkappa y|)^{p+1}$ und umsomehr von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y.

Für später mag hier noch bemerkt werden, daß auch die Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} (|a_\varkappa x| + |b_\varkappa y|)^{p+1}$ für alle x, y, sowie die Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} (|a_\varkappa| + |b_\varkappa|)^{p+1}$ mit der Konvergenz von $\sum_{=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y äquivalent ist.

§ 4. Beziehungen zwischen ganzen Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen, die von endlicher Ordnung, und solchen, die von endlichem Range sind.

Für die nun gewonnenen speziellen Funktionen läßt sich der folgende Satz beweisen:

Satz 33. Eine ganze Funktion mit wesentlich linearen Primfunktionen ist von endlichem Range, wenn sie von endlicher Ordnung ist.

---

[1]) Dies gilt auch für mit $\varkappa$ ins Unendliche wachsende $p_\varkappa$.

[2]) Durch vollständige Induktion ergibt sich nämlich der folgende Satz:

Sind u_ν, v_ν, $\ldots t_\nu$ und s positive Zahlen, so folgt aus der gleichzeitigen Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^s$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu^s, \ldots \sum_{\nu=1}^{\infty} t_\nu^s$ diejenige von $\sum_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu + v_\nu + \cdots + t_\nu)^s$ und umgekehrt.

Die Funktionen der zu betrachtenden Art sind von der Form, wie sie Gleichung (1) in § 3 angibt. Setzt man daselbst $y = 0$, so wird

$$G(x, o) = e^{g(x,o)} x^k \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k} c_\varkappa \prod_{\varkappa=1}^{\infty} (1 - a_\varkappa x) e^{\sum_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda}(a_\varkappa x)^\lambda} \text{ [1]},$$

also eine ganze Funktion von x in der Weierstraßschen Produktform, da die Zahlen $a_\varkappa$ gegen Null konvergieren und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p_\varkappa+1}$ konvergiert (vergl. die erste Fußnote zu Satz 32). Da aber $G(x, o)$ mit $G(x, y)$ von endlicher Ordnung ist,[2] ist es nach einem Satze über ganze Funktionen einer Veränderlichen auch von endlichem Range, d. h. es konvergiert $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p_\varkappa+1}$ für ein endliches $p_\varkappa = p_1$.

Ebenso ergibt sich aus der Betrachtung der Funktion $G(o, y)$ die Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p_\varkappa+1}$ für ein endliches $p_\varkappa = p_2$.

Ist p die größere der beiden Zahlen p_1, p_2, so konvergieren die Reihen $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p+1}$ gleichzeitig und damit nach Satz 32 die Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y, d. h. $G(x, y)$ ist von endlichem Range.

---

[1] Sind unter den Zahlen $c_\varkappa$ solche mit dem Werte Null vorhanden, so erhält man dasselbe Resultat durch Herausnahme der betreffenden Faktoren, die durchaus unwesentlich sind. Der Satz könnte ja etwas umfassender so formuliert werden: Eine ganze Funktion mit wesentlich linearen Primfunktionen ist von endlichem Range, wenn das letzte Produkt ihrer Darstellung von endlicher Ordnung ist.

[2] $$\operatorname*{Max}_{|x|=r} |G(x, o)| \equiv \operatorname*{Max}_{\substack{|x|=r \\ |y|=o}} |G(x, y)| < \operatorname*{Max}_{\substack{|x|=r \\ |y|=r' \neq o}} |G(x, y)|$$

$$< e^{r^a + r'^b} \text{ im Falle der Endlichkeit der Ordnung von } G(x, y),$$

$$< e^{r^A} \text{ für } A > a \text{ und hinreichend große } r.$$

Eingehende Untersuchungen über die Ordnung einer ganzen Funktion einer Veränderlichen, die aus einer ganzen Funktion zweier Veränderlichen hervorgeht, indem man einer Veränderlichen einen konstanten Wert erteilt, finden sich bei J. Sire, Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini, Rendiconti del circolo mat. di Palermo, t. 31 (1911).

Während der eben bewiesene Satz für primitive und nichtprimitive ganze Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen gilt, werden von jetzt ab nur primitive Funktionen dieser Art betrachtet.

Zur Auffindung weiterer Beziehungen zwischen Rang und Ordnung dienen die beiden folgenden Hilfssätze [1]), welche die Abschätzung des absoluten Betrages einer Primfunktion bezw. eines endlichen Produktes von Primfunktionen gestatten:

Hilfssatz 1. Ist

$$E_p(u) = (1-u)\, e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{p} \frac{1}{\lambda} u^\lambda} \qquad (p \geqq 1),$$

so hat man für jedes von Null verschiedene u und für $0 \leqq \alpha \leqq 1$:

$$|E_p(u)| < e^{c_{p,\alpha} |u|^{p+\alpha}},$$

wo $c_{p,\alpha}$ eine lediglich von p und α abhängige positive Zahl bedeutet.

Hilfssatz 2. Ist

$$E_p(a_\varkappa x + b_\varkappa y) = \begin{cases} 1-(a_\varkappa x + b_\varkappa y) & \text{für } p = 0 \\ [1-(a_\varkappa x + b_\varkappa y)]\, e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{p} \frac{1}{\lambda}(a_\varkappa x + b_\varkappa y)^\lambda} & \text{für } p \geqq 1, \end{cases}$$

so hat man, wenn δ, δ', ε, ε' irgendwelche positive Zahlen sind (Null ausgeschlossen):

$$\left| \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{m} E_p(a_\varkappa x + b_\varkappa y) \right| > e^{\varepsilon |x|^{p+\delta} + \varepsilon' |y|^{p+\delta'}}$$

$$\text{für } |x|^2 + |y|^2 > R^2.$$

Beweis für den Fall $p = 0$: Nach Satz 4 ist für $n > k$:

$$\left| \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \right| < |x|^n + |y|^n \quad \text{für } |x|^2 + |y|^2 > R_n^2.$$

Anderseits kann zu allen positiven Zahlen ε, ε', δ, δ' und n eine Zahl R' so bestimmt werden, daß man für $|x|^2 + |y|^2 > R'^2$ hat:

$$|x|^n + |y|^n < e^{\frac{\varepsilon}{2}|x|^\delta + \frac{\varepsilon'}{2}|y|^{\delta'}} \; {}^{2)}.$$

---

[1]) Vergl. A. Pringsheim, a. a. O. p. 299, 300; Hilfssatz 1 ist wörtlich übernommen, daher sein Beweis nicht angeführt.

[2]) Zum Beweise unterscheidet man die Fälle $a)$ $|x| \geqq |y|$, $b)$ $|x| \leqq |y|$. Da zu allen positiven Werten ε, δ, n eine untere Schranke für $|x|$ bestimmt werden kann, von welcher ab

$$e^{\varepsilon |x|^\delta} > |x|^n$$

Ist also R'' die größere der beiden Zahlen R_n, R', so ist:

$$\left|\prod_{\varkappa=1}^{k}(c_\varkappa x + d_\varkappa y)\right| < e^{\frac{\varepsilon}{2}|x|^{\delta} + \frac{\varepsilon'}{2}|y|^{\delta'}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R''^2. \quad (1)$$

In derselben Weise findet man eine Zahl R''', so daß man hat:

$$\left|\prod_{\varkappa=1}^{m} E_p(a_\varkappa x + b_\varkappa y)\right| < e^{\frac{\varepsilon}{2}|x|^{\delta} + \frac{\varepsilon'}{2}|y|^{\delta'}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R'''^2. \quad (2)$$

Ist R die größere der beiden Zahlen R'', R''', so erhält man durch Multiplikation der Ungl. (1) und (2) die Behauptung im Falle $p = 0$.

Beweis für den Fall $p \geqq 1$: Man zerlegt:

$$\prod_{\varkappa=1}^{m} E_p(a_\varkappa x + b_\varkappa y) = P_m(x, y) \,.\, e^{g_p(x, y)},$$

wo

$$P_m(x, y) = \prod_{\varkappa=1}^{m}[1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)],$$

$$g_p(x, y) = \sum_{\varkappa=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{p}\frac{1}{\lambda}(a_\varkappa x + b_\varkappa x)^{\lambda}.$$

Nun bestimmt man ähnlich wie oben R_1 so, daß man hat:

$$\left|\prod_{\varkappa=1}^{k}(c_\varkappa x + d_\varkappa y)\right| < e^{\frac{\varepsilon}{3}|x|^{p+\delta} + \frac{\varepsilon'}{3}|y|^{p+\delta'}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2, \quad (3)$$

R_2 so, daß man hat:

$$|P_m(x, y)| < e^{\frac{\varepsilon}{3}|x|^{p+\delta} + \frac{\varepsilon'}{3}|y|^{p+\delta'}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_2^2; \quad (4)$$

---

ist, so läßt sich im Falle $a)$ P_1 so bestimmen, daß

$$e^{\varepsilon|x|^{\delta}} > 2|x|^n \geqq |x|^n + |y|^n \text{ für } |x| > P_1;$$

im Falle $b)$ läßt sich P_2 so bestimmen, daß

$$e^{\varepsilon'|y|^{\delta'}} > 2|y|^n \geqq |x|^n + |y|^n \text{ für } |y| > P_2.$$

Ist R' das $\sqrt{2}$-fache der größeren der beiden Zahlen P_1, P_2, so gilt für $|x|^2 + |y|^2 > R'^2$:

$$|x|^n + |y|^n < \begin{cases} e^{\varepsilon|x|^{\delta}} & \text{im Falle } a) \\ e^{\varepsilon'|y|^{\delta'}} & \text{im Falle } b) \end{cases} \text{ also } < e^{\varepsilon|x|^{\delta} + \varepsilon'|y|^{\delta'}} \text{ in beiden Fällen.}$$

endlich nach Satz 4, Zus. 1 R_3 so, daß man hat:

$$|g_p(x,y)| < \frac{\varepsilon}{3} |x|^{p+\delta} + \frac{\varepsilon'}{3} |y|^{p+\delta'}$$

also

$$|e^{g_p(x,y)}| \leqq e^{|g_p(x,y)|} < e^{\frac{\varepsilon}{3}|x|^{p+\delta} + \frac{\varepsilon'}{3}|y|^{p+\delta'}} \quad \text{für } |x|^2 + |y|^2 > R_3^2. \quad (5)$$

Ist R die größte der drei Zahlen R_1, R_2, R_3, so ergibt sich die Behauptung durch Multiplikation der Ungl. (3), (4), (5).

Mittels der beiden Hilfssätze ergibt sich der folgende Satz, der eine Ausdehnung eines Satzes von Poincaré[1]) auf Funktionen von zwei Veränderlichen vorstellt:

Satz 34. Ist

$$P(x,y) = \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} E_p(a_\varkappa x + b_\varkappa y),$$

wo $E_p(a_\varkappa x + b_\varkappa y)$ wieder die im letzten Hilfssatz angegebene Bedeutung hat, eine primitive ganze Funktion vom mittleren Range $p \geqq 0$, so ist bei beliebigen positiven ε, ε'

$$|P(x,y)| < e^{\varepsilon|x|^{p+1} + \varepsilon'|y|^{p+1}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R^2.$$

Der Beweis wird hier unterlassen, da später (§ 9) ein allgemeinerer Satz auf verallgemeinerter Grundlage abgeleitet werden wird.

Aus dem Satze 34 ergibt sich unmittelbar der folgende:

Satz 35. Eine primitive ganze Funktion mit wesentlich linearen Primfunktionen ist von endlicher Ordnung, wenn sie von endlichem Range ist.

§ 5. Eine Klasse von Funktionen zweiter Art, die sich auf Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen zurückführen lassen.

Auf ganze Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen lassen sich primitive ganze Funktionen zweiter Art $G(x,y)$ zurückführen von folgender Form:

$$G(x,y) = \prod_{\varkappa=1}^{k} [c_\varkappa P(x) + d_\varkappa Q(y)] \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - [a_\varkappa P(x) + b_\varkappa Q(y)\right) e^{\sum_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda}[a_\varkappa P(x) + b_\varkappa Q(y)]^\lambda} \right\},$$

wo $P(x)$ und $Q(y)$

---

[1]) H. Poincaré, Sur les fonctions entières, Bull. de la soc. math. de France, T. 11 (1883) p. 136.

Die etwas abweichende Formulierung im Texte entspricht genau derjenigen, welche A. Pringsheim a. a. O. p. 301 dem betr. Satz gegeben hat.

Polynome in x bezw. y sind und $p_\varkappa$ von der Art, daß

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa P(x) + b_\varkappa Q(y)|^{p_\varkappa+1}$$

für alle x, y konvergiert.

Mit Benützung von I § 4 ergibt sich:

Satz 36. Die Funktion $G(x, y)$ ist von endlichem Range, wenn sie von endlicher Ordnung ist, und umgekehrt.

§ 6. Über allgemeine Diagonalen von Doppelreihen.

Die Untersuchungen des nächsten Paragraphen erfordern einige Betrachtungen über Diagonalen von Doppelreihen, welche unter irgendwelchen Winkeln verlaufen.

Es wird das nachfolgende Schema zu Grunde gelegt:

$$\begin{array}{l}
a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + a_3^{(0)} + \cdots\cdots a_\mu^{(0)} + \cdots \\
+ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \cdots \\
+ a_0^{(2)} + a_1^{(2)} + \cdots \\
+ a_0^{(3)} + \cdots \\
+ \cdots \\
+ \cdots \\
+ a_0^{(\nu)} + \cdots \\
+ \cdots
\end{array}$$

Unter einer Diagonale wird die Reihe von Gliedern $a_\mu^{(\nu)}$ verstanden, deren Indices μ, ν der Gleichung

$$n\mu + m\nu = l \tag{1}$$

genügen, wo n, m positive ganze Zahlen sind, die stets relativ prim angenommen werden, l eine weitere positive ganze Zahl.[1]) Die durch n, m, l (in dieser Reihenfolge) festgelegte Diagonale wird mit $d^{(n,m,l)}$ bezeichnet.

[1]) Eine Diagonale braucht nicht gerade ein Element der ersten Zeile mit einem solchen der ersten Kolonne zu verbinden; Diagonalen dieser Art haben in obiger Bezeichnung die Form $d^{(n,m,l)}$, wo l sowohl m wie n als Faktor enthält; speziell erhalten die unter 45° verlaufenden Diagonalen die Form $d^{(1,1,l)}$.

Nach Gleichung (1) haben die Glieder der Diagonale $d^{(n,m,l)}$ die Form

$$a_\mu^{(\nu)} = a_\mu^{\left(\frac{l-n\mu}{m}\right)};$$

wenn festgesetzt wird, daß dieses Zeichen stets den Wert Null bedeutet, so oft $\frac{l-n\mu}{m}$ keine ganze Zahl ist, hat man:

$$d^{(n,m,l)} = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{l}{n}\right]} a_\mu^{\left(\frac{l-n\mu}{m}\right)},$$

wo $\left[\frac{l}{n}\right]$ die größte ganze Zahl in $\frac{l}{n}$ bedeutet. Die Summe aller Glieder, welche durch $d^{(n,m,l)}$ (dessen Glieder eingeschlossen) von dem Schema abgetrennt werden, ist (nach parallelen Diagonalen geordnet):

$$\sum_{\lambda=0}^{l} d^{(n,m,l)} = \sum_{\lambda=0}^{l} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} a_\mu^{\left(\frac{\lambda-n\mu}{m}\right)}.$$

Für später ist noch die Bedeutung der Zahlen $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ in dem Schema wichtig. Denkt man sich in dieses auch Terme $a_\mu^{(\nu)}$ mit gebrochenen Indices eingeordnet, derart, daß die Werte der Indices μ, ν den senkrechten Abständen des Punktes, den der Term einnimmt, von der ersten Kolonne bezw. Zeile proportional sind, so ergibt die analytisch-geometrische Auffassung der Gleichung (1), daß $d^{(n,m,l)}$ vom Term $a_{\frac{l}{n}}^{(0)}$ zum Term $a_0^{\left(\frac{l}{m}\right)}$ läuft. Durch $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ ist also eine Diagonale ihrer Lage nach unmittelbar charakterisiert.

§ 7. Verallgemeinerung der Produktdarstellung ganzer Funktionen endlichen Ranges mit wesentlich linearen Primfunktionen.

Um bei ganzen Funktionen zweier Veränderlichen mit wesentlich linearen Primfunktionen das eigentliche Analogon zum Range, sowie das Analogon zum Grenzexponenten der ganzen Funktionen einer Veränderlichen zu gewinnen, muß die bisherige Biermannsche Produktdarstellung verallgemeinert werden.

Die Konvergenz des unendlichen Produktes [1])

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty}(1-\gamma_\varkappa)\, e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{p}\frac{1}{\lambda}\gamma_\varkappa^\lambda}$$

für alle x, y ergab sich so: Zu jedem endlichen Kreisgebiet existiert eine Zahl k, so daß $1-\gamma_\varkappa$ für $\varkappa > k$ nicht mehr verschwindet und somit in die Form gesetzt werden kann:

$$1-\gamma_\varkappa = e^{-\Gamma_\varkappa},$$

wo

$$\Gamma_\varkappa = \gamma_\varkappa + \frac{1}{2}\gamma_\varkappa^2 + \frac{1}{3}\gamma_\varkappa^3 + \cdots \tag{1}$$

ist. Der Exponent $\sum\limits_{\lambda=1}^{p}\frac{1}{\lambda}\gamma_\varkappa^\lambda$ des beigefügten Exponentialfaktors trennt von $-\Gamma_\varkappa$ so viele Glieder ab, daß Konvergenz eintritt.

Man kann nun $\Gamma_\varkappa$ in eine Doppelreihe anordnen:

$$\begin{aligned}\Gamma_\varkappa = 0 \quad & + a_\varkappa x \quad + \frac{1}{2}a_\varkappa^2 x^2 + \frac{1}{3}a_\varkappa^3 x^3 + \cdots \\ & + b_\varkappa y \quad + a_\varkappa b_\varkappa xy + a_\varkappa^2 b_\varkappa x^2 y + \cdots \\ & + \frac{1}{2}b_\varkappa^2 y^2 + a_\varkappa b_\varkappa^2 x y^2 + \cdots \\ & + \frac{1}{3}b_\varkappa^3 y^3 + \cdots \\ & + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Eine unter 45^0 verlaufende Diagonale trennt von $\Gamma_\varkappa$ die Glieder ab, welche $\sum\limits_{\lambda=1}^{p}\frac{1}{\lambda}\gamma_\varkappa^\lambda$ enthält.[2]) Es zeigt sich aber, daß auch

---

[1]) $\gamma_\varkappa$ soll dabei die bisherige Bedeutung haben:

$$\gamma_\varkappa = a_\varkappa x + b_\varkappa y.$$

[2]) Darin, daß bei Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen, also bei linearem $\gamma_\varkappa$ jedes Glied $\frac{1}{n}\gamma_\varkappa^n$ der Reihe (1) gerade die Terme einer unter 45^0 verlaufenden Diagonale der Doppelreihe (2) liefert, liegt im wesentlichen die einfache und für die gegenwärtigen Untersuchungen günstige Natur dieser speziellen Art von Funktionen. Anderseits bereitet eben schon bei Funktionen mit unendlich vielen quadratischen Primfunktionen der Umstand die Hauptschwierigkeit, daß bei der Ausbreitung der Reihe (1) in eine Doppelreihe ein Term dieser letzteren im allgemeinen aus Beiträgen mehrerer Glieder der Reihe (1) sich zusammensetzt.

durch andere Diagonalen Funktionen von $\Gamma_\varkappa$ abgetrennt werden können, welche, an Stelle von $\sum_{\lambda=1}^{p} \frac{1}{\lambda} \gamma_\varkappa^\lambda$ in das unendliche Produkt gesetzt, Konvergenz desselben herbeiführen.

Das dem Glied $a_\mu^{(\nu)}$ im Schema des vorigen Paragraphen entsprechende Glied der Doppelreihe (2) erhält die Gestalt:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu + \nu} \binom{\mu + \nu}{\nu} (a_\varkappa x)^\mu (b_\varkappa y)^\nu;$$

daher ist in der Bezeichnung des vorigen Paragraphen:

$$d^{(n, m, l)} = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{l}{n}\right]} \frac{1}{\mu + \nu} \binom{\mu + \nu}{\nu} (a_\varkappa x)^\mu (b_\varkappa y)^\nu,$$

wo

$$\nu = \frac{l - n\mu}{m}$$

ist, und alle Glieder gleich Null zu setzen sind, bei welchen ν nicht ganzzahlig ist.

Für die durch $d^{(n,m,l)}$ von der Doppelreihe abgetrennte ganze rationale Funktion $\sum_{\lambda=1}^{l} d^{(n,m,\lambda)}$ wird im folgenden die Bezeichnung $\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}$ gebraucht.

Satz 37. Ist

$$\gamma_\varkappa = a_\varkappa x + b_\varkappa y, \quad \lim_{\varkappa=\infty} a_\varkappa = 0, \quad \lim_{\varkappa=\infty} b_\varkappa = 0$$

und sind n, m, l derart bestimmte positive ganze Zahlen, daß die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}}, \quad \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}$$

konvergieren, so konvergiert das unendliche Produkt

$$P(x, y) = \prod_{\varkappa=1}^{\infty} (1 - \gamma_\varkappa)\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}}$$

unbedingt und gleichmäßig in jedem im Endlichen gelegenen Bereich.

Ein Radius R sei beliebig gewählt; dann wird die unbedingte und gleichmäßige Konvergenz des unendlichen Produktes in dem Kreisgebiet $|x| < R$, $|y| < R$ nachgewiesen.

Man bestimmt k so groß (was wegen $\lim\limits_{\varkappa=\infty} a_\varkappa = 0$, $\lim\limits_{\varkappa=\infty} b_\varkappa = 0$ möglich ist), daß für $\varkappa > k$ innerhalb des gewählten Kreisgebietes die Ungleichung erfüllt ist:

$$|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}} < \vartheta < 1. \tag{3}$$

Hieraus folgt:

$$|a_\varkappa x + b_\varkappa y| < 1\,[1]. \tag{4}$$

Demnach ist

$$\prod_{\varkappa=k+1}^{\infty} (1-\gamma_\varkappa)\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}} = \prod_{\varkappa=k+1}^{\infty} e^{-\Gamma_\varkappa + \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}} = e^{-\sum\limits_{\varkappa=k+1}^{\infty}(\Gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa^{(n,m,l)})},$$

wobei $\Gamma_\varkappa$ wieder die Bedeutung hat:

$$\Gamma_\varkappa = \gamma_\varkappa + \frac{1}{2}\gamma_\varkappa^2 + \frac{1}{3}\gamma_\varkappa^3 + \cdots$$

Da im oben angegebenen Sinne

$$\gamma_\varkappa^{(m,n,l)} = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} \frac{1}{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} (a_\varkappa x)^\mu (b_\varkappa y)^\nu$$

ist, so erhält man:

$$\Gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa^{(m,n,l)} = \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} \frac{1}{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} (a_\varkappa x)^\mu (b_\varkappa y)^\nu.$$

Durch die Substitution

$$a_\varkappa = \alpha_\varkappa^n,\ x = \xi^n,\ b_\varkappa = \beta_\varkappa^m,\ y = \eta^m \tag{5}$$

---

[1]) Ungl. (3) kann nämlich nur dadurch erfüllt sein, daß

$$|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} < \sigma, \quad |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}} < 1 - \sigma$$

ist, wo $\sigma < 1$ ist. Daher ist:

$$|a_\varkappa x| \leqq |a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}}, \text{ da } n \geqq 1,$$

$$|b_\varkappa y| \leqq |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}, \text{ da } m \geqq 1,$$

also

$$|a_\varkappa x + b_\varkappa y| \leqq |a_\varkappa x| + |b_\varkappa y| \leqq |a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}} < 1.$$

ergibt sich:

$$|\Gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}| = \left|\sum_{\lambda=l+1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} \frac{1}{\mu+\nu}\binom{\mu+\nu}{\nu}(\alpha_\varkappa\xi)^{n\mu}(\beta_\varkappa\eta)^{m\nu}\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\lambda=l+1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} \frac{1}{\mu+\nu}\binom{\mu+\nu}{\nu}|\alpha_\varkappa\xi|^{n\mu}|\beta_\varkappa\eta|^{m\nu} <$$

$$< \sum_{\lambda=l+1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} 1.\binom{n\mu+m\nu}{m\nu}|\alpha_\varkappa\xi|^{n\mu}|\beta_\varkappa\eta|^{m\nu}.^{1)}$$

Indem man alle zur $(n\mu+m\nu)^{\text{ten}}$, d. h., λ^{ten} Potenz fehlenden Glieder ergänzt und sodann Bedingung (3) beachtet, ergibt sich weiter:

$$|\Gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}| < \sum_{\lambda=l+1}^{\infty}(|\alpha_\varkappa\xi| + |\beta_\varkappa\eta|)^\lambda$$

$$= (|\alpha_\varkappa\xi| + |\beta_\varkappa\eta|)^{l+1}\cdot\frac{1}{1-(|\alpha_\varkappa\xi| + |\beta_\varkappa\eta|)} <$$

$$< (|\alpha_\varkappa\xi| + |\beta_\varkappa\eta|)^{l+1}\cdot\frac{1}{1-\vartheta}.$$

Folglich ist:

$$\sum_{\varkappa=k+1}^{\infty}|\Gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}| < \frac{1}{1-\vartheta}\sum_{\varkappa=k+1}^{\infty}(|\alpha_\varkappa\xi| + |\beta_\varkappa\eta|)^{l+1} <$$

$$< \frac{1}{1-\vartheta}\sum_{\varkappa=k+1}^{\infty}\left(|\alpha_\varkappa| R^{\frac{1}{n}} + |\beta_\varkappa| R^{\frac{1}{m}}\right)^{l+1}$$

Damit ist die nachzuweisende unbedingte und gleichmäßige Konvergenz auf die Konvergenz der letzten Summe zurückgeführt. Diese Summe konvergiert aber nach einem bereits angeführten Satze über Reihen (siehe zweite Fußnote zu Satz 32), da

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty}|\alpha_\varkappa|^{l+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty}|a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}}$$

---

1) Es gilt nämlich, wie leicht zu beweisen ist, für $n \geqq 1$, $m \geqq 1$:

$$\binom{\mu+\nu}{\nu} \leqq \binom{n\mu+m\nu}{m\nu}.$$

und

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |\beta_\varkappa|^{l+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}$$

als konvergent vorausgesetzt sind.

Der bewiesene Satz liefert sofort den folgenden, der die angekündigte Verallgemeinerung der Biermannschen Produktdarstellung im Falle wesentlich linearer Primfunktionen angibt:

Satz 38. Die allgemeinste ganze Funktion endlichen Ranges mit den Primfunktionen

$$1 - \gamma_\varkappa = 1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)$$

und

$$\bar{\gamma}_\varkappa = c_\varkappa x + d_\varkappa y$$

läßt sich in der Form darstellen:

$$G(x, y) = e^{g(x,y)} \prod_{\varkappa=1}^{k} \bar{\gamma}_\varkappa \prod_{\varkappa=1}^{\infty} (1 - \gamma_\varkappa) e^{\gamma_\varkappa^{(n, m, l)}};$$

dabei sind n, m, l so zu bestimmende positive ganze Zahlen, daß die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}$$

konvergieren.

§ 8. Analoga zum Range und Grenzexponenten der ganzen Funktionen einer Veränderlichen; Rangsystem und Grenzwinkel.

Von allen Wertsystemen n, m, l, welche den im letzten Satze angegebenen Bedingungen genügen, sollen diejenigen ausgewählt werden, bei welchen n, m noch beliebig (relativ prim) sind, l aber die kleinste ganze Zahl ist, für die die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}} \tag{1}$$

konvergieren. Für jedes solche Wertsystem n, m, l betrachtet man die beiden Zahlen $\frac{l}{n}, \frac{l}{m}$. Die Gesamtheit aller dieser Zahlenpaare $\frac{l}{n}, \frac{l}{m}$ wird als „Rangsystem" der ganzen Funktion bezeichnet; sie stellt das Analogon zum Range bei ganzen Funktionen einer Veränderlichen vor.

Das Rangsystem einer ganzen Funktion enthält natürlich stets das Zahlenpaar p, p, wenn p ihr mittlerer Rang ist; denn wählt man $n=1$, $m=1$, so hat die kleinste Zahl l, für welche die beiden Reihen (1) konvergieren, den Wert p, da der mittlere Rang als die kleinste ganze Zahl p definiert ist, für welche

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p+1}$$

konvergieren.

Bei ganzen Funktionen einer Veränderlichen mit den reziproken Nullstellen $a_\varkappa$ wird ausgehend vom Range p, der durch die Eigenschaft definiert ist, daß $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^p$ divergiert, $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1}$ konvergiert, unter Aufgabe des ganzzahligen Charakters der Grenzexponent ρ durch die Eigenschaft definiert, daß für jedes positive ε $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\rho-\varepsilon}$ divergiert, $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\rho+\varepsilon}$ konvergiert.

Das analoge Verfahren ist hier folgendes: Man bestimmt zu jedem von allen möglichen positiven Wertepaaren m, n, die nun nicht mehr notwendig ganzzahlig sind, eine positive Zahl s derart, daß die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{s}{n}+\varepsilon} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{s}{m}+\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ konvergieren, während von den Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{s}{n}-\varepsilon} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{s}{m}-\varepsilon}$$

wenigstens eine divergiert. Die so gefundenen Zahlen $\frac{s}{n}$, $\frac{s}{m}$ werden mit ρ bezw. ρ' bezeichnet. Die Gesamtheit aller Zahlenpaare ρ, ρ' stellt das Analogon zum Grenzexponenten der Funktionen einer Veränderlichen vor. Die dadurch definierte Funktion $\rho' = \varphi(\rho)$ hätte man der bisherigen Bezeichnungsweise folgend als Grenzexponentenfunktion, ihr geometrisches Bild als Grenzexponentenkurve zu bezeichnen. Es zeigt sich aber unmittelbar, daß diese Gebilde ausgearteter Natur sind; die Grenzexponentenkurve ist stets ein rechter Winkel mit parallel zu den Achsen verlaufenden Schenkeln. Daher wird weiterhin die kürzere Bezeichnung „Grenzwinkel" gebraucht. Der Scheitel des Grenzwinkels ist ein Punkt

ρ_0, ρ_0', dessen Koordinaten durch die Eigenschaft definiert sind, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\varrho_0-\varepsilon} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\varrho_0'-\varepsilon}$$

divergieren, dagegen die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\varrho_0+\varepsilon} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\varrho_0'+\varepsilon}$$

konvergieren [1]).

Rangsystem und Grenzwinkel stehen in folgender Beziehung, die sich am einfachsten geometrisch formulieren läßt:

Satz 39. Die Punkte, welche die Wertepaare des Rangsystems repräsentieren, $\left(\text{Punkte mit den Koordinaten } \frac{l}{n}, \frac{l}{m}\right)$ liegen, vom Anfang aus gesehen, diesseits des Grenzwinkels oder auf ihm, die Punkte, welche die Wertepaare $\frac{l+1}{n}, \frac{l+1}{m}$ repräsentieren, dagegen jenseits des Grenzwinkels oder auf ihm. [2])

Ist nämlich $\frac{l}{n} > \rho_0$, so konvergiert $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l}{n}}$, es muß also $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l}{m}}$ divergieren, da l die kleinste Zahl ist, für welche $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}$ konvergieren.

Wenn aber $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l}{m}}$ divergiert, ist $\frac{l}{m} \leqq \rho_0'$. Ebenso ergibt sich $\frac{l}{n} \leqq \rho_0$, wenn $\frac{l}{m} > \rho_0'$ ist.

Anderseits muß aber $\frac{l+1}{n} \geqq \rho_0$, $\frac{l+1}{m} \geqq \rho_0'$ sein, weil $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}$ konvergieren.

---

[1]) Das Wertepaar ρ_0, ρ_0' läßt sich natürlich von vornherein bestimmen, und daraus können alle möglichen Wertepaare ρ, ρ' gewonnen werden; die obige Darstellung ist gewählt, um die Analogie mit den Verhältnissen bei Funktionen einer Veränderlichen deutlicher hervortreten zu lassen.

[2]) Der Satz stellt das Analogon zur Beziehung $p \leqq \rho \leqq p+1$ zwischen dem Range p und dem Grenzexponenten ρ einer Funktion einer Veränderlichen vor.

§ 9. Beziehungen zwischen der Ordnungskurve einer ganzen Funktion endlichen Ranges mit wesentlich linearen Primfunktionen und dem Rangsystem bezw. Grenzwinkel dieser Funktion.

Nach den vorausgegangenen Vorbereitungen soll die Lösung der eigentlichen Aufgabe dieses Abschnittes, die schon in § 4 begonnen wurde, fortgesetzt werden. Zunächst ergibt sich in einfacher Weise die folgende Beziehung zwischen Grenzwinkel und Ordnungskurve.

Satz 40. Die Ordnungskurve einer ganzen Funktion $G(x, y)$ endlichen Ranges mit wesentlich linearen Primfunktionen kann, vom Anfang aus gesehen, nur jenseits des Grenzwinkels verlaufen oder mit ihm zusammenfallen.

Ein beliebiges Ordnungspaar der Funktion $G(x, y)$ sei α, α', der Scheitel ihres Grenzwinkels Punkt ρ_0, ρ_0'. Dann ist zu zeigen, daß

$$\alpha \geqq \rho_0, \quad \alpha' \geqq \rho_0'$$

ist. Um etwa die erste Relation abzuleiten, betrachtet man die Funktion $G(x, o)$; deren Ordnung sei $\bar{\alpha}$, ihr Grenzexponent $\bar{\rho}$. Man hat nun zunächst:

$$\alpha \geqq \bar{\alpha}; \tag{1}$$

denn aus der Ungleichung, welche α, α' als Ordnungspaar von $G(x, y)$ definiert:

$$\overline{G}(r, r') < e^{r^{\alpha+\delta}+r'^{\alpha'+\delta'}} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta, \delta'}$$

folgt:

$$\overline{G}(r, o) < e^{r^{\alpha+\delta}} \text{ für } r^2 > R^2_{\delta, \delta'} \text{ oder } r > R_{\delta, \delta'}.$$

Sodann hat man, da die Ordnung einer ganzen Funktion einer Veränderlichen nicht kleiner ist als ihr Grenzexponent:

$$\bar{\alpha} \geqq \bar{\rho}. \tag{2}$$

Endlich ist

$$\bar{\rho} = \rho_0; \tag{3}$$

denn $\bar{\rho}$ ist durch dieselbe Eigenschaft definiert wie ρ_0, nämlich dadurch, daß $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\overline{\varrho}+\varepsilon}$ konvergiert, $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\overline{\varrho}-\varepsilon}$ divergiert[1]). Aus den Relationen (1), (2), (3) folgt die erste der behaupteten Relationen. In derselben Weise ergibt sich die zweite.

---

[1]) Dies ergibt sich, in dem man die Darstellung von $G(x, o)$ betrachtet, welche aus der im Satz 38 angegebenen Darstellung von $G(x, y)$ folgt.

Hieran ließe sich möglicherweise der Nachweis schließen, daß für eine primitive ganze Funktion endlichen Ranges mit wesentlich linearen Primfunktionen der Grenzwinkel vollständig mit der Ordnungskurve zusammenfällt, falls vorausgesetzt wird, daß die Ordnungskurve ein rechter Winkel ist. Allein die Entscheidung der Frage, wann dies zutrifft, oder ob es etwa von selbst aus der vorausgesetzten wesentlich linearen Natur der Primfunktionen folgt, scheint große Schwierigkeiten zu bieten.

Es soll hier ein anderer Weg betreten werden, um — wenigstens unter gewissen Umständen — die Identität von Grenzwinkel und Ordnungskurve festzustellen. Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich nämlich zeigen, daß die dazu nötige Ergänzung des Satzes 40 gilt, nämlich daß die Ordnungskurve vom Anfang aus gesehen stets diesseits des Grenzwinkels liegt oder mit ihm zusammenfällt. Allerdings sind hiezu ziemlich umfangreiche Vorbereitungen notwendig; es müssen die Untersuchungen, wie sie in § 4 begonnen wurden, der verallgemeinerten Produktdarstellung (§ 7) angepaßt werden. Zunächst soll dies mit den beiden in § 4 angeführten Hilfssätzen geschehen.

Hilfssatz 1. Ist

$$E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y) = [1-(a_\varkappa x + b_\varkappa y)]\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}(x,y)},$$

so hat man für $0 <$ [1] $\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\end{Bmatrix} \leqq 1$ und $|x|^2+|y|^2 > R^2$:

$$|E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y)| < e^{|a_\varkappa x|^{\frac{l+\alpha}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{l+\beta}{m}}}.$$

Es ist nämlich

$$|1-(a_\varkappa x + b_\varkappa y)| \leqq 1 + |a_\varkappa x| + |b_\varkappa y| < (1+|a_\varkappa x|)(1+|b_\varkappa y|). \quad (4)$$

Da nun allgemein für positive und hinreichend große u die Beziehung

$$1+u < e^{u^\varepsilon}$$

besteht, so ist

$$1+|a_\varkappa x| < e^{|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}}} \text{ für } |x| > R_1, \quad 1+|b_\varkappa y| < e^{|b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}} \text{ für } |y| > R_2,$$

also

$$(1+|a_\varkappa x|)(1+|b_\varkappa y|) < e^{|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}} \text{ für } |x| > R_1,\ |y| > R_2. \quad (5)$$

[1]) Darin, daß hier das Gleichheitszeichen ausgeschlossen wird, liegt eine wesentliche Beschränkung dieses Satzes gegenüber dem entsprechenden früheren. Doch reicht diese Form für die folgenden Anwendungen hin.

Ist $|y| \leqq R_2$, so gilt

$$1 + |b_\varkappa y| < 1 + |a_\varkappa x| \text{ für } |x| > R_1';$$

also ist

$$(1 + |a_\varkappa x|)(1 + |b_\varkappa y| < e^{2|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}}} \text{ für } |x| > \begin{cases} R_1 \\ R_1' \end{cases}, \ y \leqq R_2. \quad (6)$$

Ebenso ergibt sich:

$$(1 + |a_\varkappa x|)(1 + |b_\varkappa y|) < e^{2|b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}} \text{ für } |x| \leqq R_1, \ |y| > \begin{cases} R_2 \\ R_2' \end{cases}. \quad (7)$$

Aus den Relationen folgt:

$$|1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)| < e^{2\left(|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}\right)} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > \overline{R}^2,$$

wenn $\overline{R}^2$ die größte der drei Zahlen $R_1^2 + R_2^2$, $R_1'^2 + R_2^2$, $R_1^2 + R_2'^2$ ist.

Anderseits ist nach dem Beweise des Satzes 37 wenn die dortige Substitution (5) eingeführt wird:

$$|\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}| < \sum_{\lambda=1}^{l} (|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)^\lambda,$$

folglich

$$|E_{n,m,l}| < e^{2(|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|) + \sum\limits_{\lambda=1}^{l} (|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)^\lambda} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > \overline{R}^2.$$

Der Exponent der rechten Seite ist eine ganze rationale Funktion l^{ten} Grades in $|\alpha_\varkappa \xi|$ und $|\beta_\varkappa \eta|$; unter Anwendung des Satzes 4 folgt daher

$$|E_{n,m,l}'| < e^{|\alpha_\varkappa \xi|^{l+\alpha} + |\beta_\varkappa \eta|^{l+\beta}},$$

wenn

$$|\alpha_\varkappa \xi|^2 + |\beta_\varkappa \eta|^2 > P^2. \quad (8)$$

Damit aber ist die Behauptung erwiesen, da sich zeigen läßt, daß die Ungl. (8) stets erfüllt ist, wenn $|x|^2 + |y|^2 > R^2$ ist bei hinreichend großem R. Diese letzte Ungleichung bedingt nämlich, daß entweder 1. $|x|^2 \geqq \frac{R^2}{2}$ oder 2. $|y|^2 \geqq \frac{R^2}{2}$ ist.

Im Falle 1 ist

$$|\alpha_\varkappa \xi|^2 = |\alpha_\varkappa|^2 |x|^{\frac{2}{n}} \geqq |\alpha_\varkappa|^2 \left(\frac{R^2}{2}\right)^{\frac{1}{n}} > P^2 \text{ für hinreichend großes } R;$$

im Falle 2 ist ähnlich

$$|\beta_\varkappa \eta|^2 > P^2$$

und somit allgemein

$$|\alpha_\varkappa \xi|^2 + |\beta_\varkappa \eta|^2 > P^2 \text{ für hinreichend großes } R.$$

Hilfssatz 2. Ist

$$E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y) = \begin{cases} 1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y) & \text{für } l = 0 \\ [1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)]\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}(x,y)} & \text{für } l \geqq 1, \end{cases}$$

so hat man, wenn δ, δ', ε, ε' positive Zahlen sind (Null ausgeschlossen):

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{M} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y) < e^{\varepsilon |x|^{\frac{l+\delta}{n}} + \varepsilon' |y|^{\frac{l+\delta'}{m}}}$$

$$\text{für } |x|^2 + |y|^2 > R^2.$$

Für $l = 0$ gilt der Beweis, wie er im Hilfssatz 2 von § 4 für den Fall $p = 0$ geführt wurde.

Es sei also $l \geqq 1$. Man zerlegt:

$$\prod_{\varkappa=1}^{M} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y) = P_M \,.\, e^{S_M},$$

wo

$$P_M = \prod_{\varkappa=1}^{M} [1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)],$$

$$S_M = \sum_{\varkappa=1}^{M} \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}$$

ist. Nun bestimmt man wie früher (§ 4, Ungl. (3) bezw. (4)) R_1 so, daß man hat:

$$\left| \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \right| < e^{\frac{\varepsilon}{3} |x|^{\frac{l+\delta}{n}} + \frac{\varepsilon'}{3} |y|^{\frac{l+\delta'}{m}}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2 \quad (9)$$

und R_2 so, daß man hat:

$$|P_M| < e^{\frac{\varepsilon}{3} |x|^{\frac{l+\delta}{n}} + \frac{\varepsilon'}{3} |y|^{\frac{l+\delta'}{m}}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_2^2. \quad (10)$$

Endlich ist

$$|e^{S_M}| \leqq e^{\sum_{\varkappa=1}^{M} |\gamma_{\varkappa}^{(n,m,l)}|}$$

oder nach dem Beweis des Satzes 37 mit Benützung der dortigen Substitution (5)

$$|e^{S_M}| < e^{\sum_{\varkappa=1}^{M} \sum_{\lambda=1}^{l} (|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)^\lambda}.$$

Weil nun der Exponent der rechten Seite eine ganze rationale Funktion höchstens vom Grade l in $|\xi|$ und $|\eta|$ ist, folgt nach Satz 4, Zusatz 1:

$$|e^{S_M}| < e^{\frac{\varepsilon}{3}|\xi|^{l+\delta} + \frac{\varepsilon'}{3}|\eta|^{l+\delta'}} \text{ für } |\xi|^2 + |\eta|^2 > \overline{R}^2 \qquad (11)$$

oder[1]) für $|x|^2 + |y|^2 > R_3^2$ bei hinreichend großem R_3. Aus den Ungl. (9), (10), (11) folgt die Behauptung, wenn R die größte der Zahlen R_1, R_2, R_3 ist.

Mittels der beiden Hilfssätze läßt sich Satz 34 verallgemeinern:

Satz 41. Ist

$$P(x, y) = \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y),$$

wo $E_{n,m,l}$ dieselbe Bedeutung hat wie im letzten Hilfssatz, eine primitive ganze Funktion, deren Rangsystem das Wertepaar $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ enthält, so ist bei beliebigen positiven ε, ε'

$$|P_{(x,y)}| < e^{\varepsilon |x|^{\frac{l+1}{n}} + \varepsilon' |y|^{\frac{l+1}{m}}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R^2.$$

Zum Beweise zerlegt man:

$$P(x, y) = P_{k,M} \,.\, R_M,$$

wo

$$P_{k,M} = \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{M} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y),$$

$$R_M = \prod_{\varkappa=M+1}^{\infty} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y).$$

---

[1]) Vergl. den Schluß des Beweises des Hilfssatzes 1.

Nun ist nach Hilfssatz 1 für $\alpha = \beta = 1$:

$$|R_M| < e^{\sum\limits_{\varkappa=M+1}^{\infty}\left(|a_\varkappa x|^{\frac{l+1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{l+1}{m}}\right)} \quad \text{für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2$$

$$= e^{|x|^{\frac{l+1}{n}} \sum\limits_{\varkappa=M+1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}} + |y|^{\frac{l+1}{m}} \sum\limits_{\varkappa=M+1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}} \text{für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2.$$

Da $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ ein Wertepaar des Rangsystems sein soll, konvergieren die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}}, \quad \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}},$$

es kann also M so groß angenommen werden, daß man hat:

$$\sum_{\varkappa=M+1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{\varkappa=M+1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

und daher:

$$|R_M| < e^{\frac{\varepsilon}{2}|x|^{\frac{l+1}{n}} + \frac{\varepsilon}{2}|y|^{\frac{l+1}{m}}} \quad \text{für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2. \tag{12}$$

Ferner ist nach Hilfssatz 2, wenn dort $\delta = \delta' = 1$ gewählt wird:

$$|P_{k,M}| < e^{\frac{\varepsilon}{2}|x|^{\frac{l+1}{n}} + \frac{\varepsilon'}{2}|y|^{\frac{l+1}{m}}} \quad \text{für } |x|^2 + |y|^2 > R_2^2. \tag{13}$$

Aus den Ungl. (12) und (13) folgt die Behauptung, wenn R die größere der beiden Zahlen R_1, R_2 ist.

Ein genaueres Resultat ergibt sich, wenn man statt $\frac{l+1}{n}$, $\frac{l+1}{m}$ zwei passend definierte kleinere Zahlen einführt:

Satz 42. $P(x, y)$ habe dieselbe Bedeutung wie im Satze 41, $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ sei wieder ein Wertepaar des Rangsystems; existieren dann zwei Zahlen σ, τ, welche den Bedingungen genügen:

$$\frac{l}{n} < \sigma < \frac{l+1}{n}, \quad \frac{l}{m} < \tau < \frac{l+1}{m}, \tag{14}$$

$$|a_\varkappa|^\sigma \leqq \frac{1}{\varkappa}, \quad |b_\varkappa|^\tau \leqq \frac{1}{\varkappa} \text{ für } \varkappa > M, \tag{15}$$

so ist

$$|P(x,y)| < e^{C_{\sigma,\tau}(|x|^\sigma + |y|^\tau)} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R^2,$$

wo $C_{\sigma,\tau}$ eine nur von σ, τ abhängige positive Zahl ist.

Zum Beweise zerlegt man:

$$P(x,y) = P_{k,M} \,.\, R_{M,N} \,.\, R_N,$$

wo

$$P_{k,M} = \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \,.\, \prod_{\varkappa=1}^{M} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y),$$

$$R_{M,N} = \prod_{\varkappa=M+1}^{N} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y),$$

$$R_N = \prod_{\varkappa=N+1}^{\infty} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y).$$

Nach Hilfssatz 2 (für $\varepsilon = \varepsilon'$) ist unter Benützung der Voraussetzung (14)

$$|P_{k,M}| < e^{\varepsilon(|x|^\sigma + |y|^\tau)} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2. \tag{16}$$

$R_{M,N}$ zerlegt man weiter in folgender Weise:

$$R_{M,N} = R'_{M,N} \,.\, e^{S_{M,N}},$$

wo

$$R'_{M,N} = \prod_{\varkappa=M+1}^{N} [1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)], \quad S_{M,N} = \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}.$$

Für $l = 0$ ist $S_{M,N} = 0$; für $l \geqq 1$ aber gilt nach dem Beweise des Satzes 37:

$$|S_{N,M}| < \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \sum_{\lambda=1}^{l} \left(|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}\right)^\lambda =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \left(|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}\right)^\lambda.$$

N sei so bestimmt, daß man hat:

$$N - 1 < |x|^\sigma + |y|^\tau \leqq N; \tag{17}$$

dann ist

$$|x|^\sigma \leqq N, \ |y \ \leqq N \text{ oder } |x| \leqq N^{\frac{1}{\sigma}}, \ |y| \leqq N^{\frac{1}{\tau}}; \tag{18}$$

ferner ist, da der kleinste Wert, den $\varkappa$ in der betrachteten Summe annimmt, $M+1$ ist, nach Voraussetzung (15):

$$|a_\varkappa| \leqq \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad |b_\varkappa| \leqq \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\tau}};$$

folglich wird

$$|S_{M,N}| < \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \left[\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma n}} + \left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\tau m}}\right]^\lambda = N . s_l^{(\sigma,\tau)}(N),$$

wobei

$$s_l^{(\sigma,\tau)}(N) = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \frac{\left[\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma n}} + \left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\tau m}}\right]^\lambda}{N}.$$

Nun wird gezeigt, daß $s_l^{(\sigma,\tau)}(N)$ für alle endlichen N unter einer von N unabhängigen Schranke $S_l^{(\sigma,\tau)}$ bleibt, so daß man hat:

$$|S_{M,N}| < N . S_l^{(\sigma,\tau)}. \tag{19}$$

Es sei etwa $\sigma n \leqq \tau m$, also weil $\frac{N}{\varkappa} \geqq \frac{N}{N} = 1$ ist:

$$\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma n}} \geqq \left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\tau m}}.$$

Demnach ist

$$s_l^{(\sigma,\tau)}(N) < \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \frac{\left[2\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma n}}\right]^\lambda}{N} = \sum_{\lambda=1}^{l} \left[2^\lambda N^{\frac{\lambda}{\sigma n}-1} \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{\lambda}{\sigma n}}\right];$$

da $\lambda \leqq l$, $\sigma n > l$, also $\frac{\lambda}{\sigma n} < 1$ ist, hat man [1]):

$$\sum_{\varkappa=M+1}^{N} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{\lambda}{\sigma n}} < \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\sigma n}} . N^{1-\frac{\lambda}{\sigma n}},$$

---

[1]) Es ist nämlich für $0 < \vartheta < 1$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{N} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{1-\vartheta} < \frac{1}{\vartheta} N^\vartheta;$$

eine elementare Ableitung dieser Relation gibt A. Pringsheim a. a. O. p. 304, Fußn.

folglich

$$s_l^{(\sigma,\tau)}(N) < \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{2^\lambda}{1-\frac{\lambda}{\sigma n}};$$

die rechte Seite dieser Ungleichung ist eine von N unabhängige Zahl, welche also als die gesuchte Schranke $S_l^{(\sigma,\tau)}$ betrachtet werden kann.

Weiterhin hat man:

$$|R'_{M,N}| \leqq \prod_{\varkappa=M+1}^{N} [1+|a_\varkappa x|+|b_\varkappa y|] < \prod_{\varkappa=1}^{N} \left[1+\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma}}+\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\tau}}\right];$$

bezeichnet ω die kleinere der beiden Zahlen σ, τ, so wird

$$|R'_{M,N}| < \prod_{\varkappa=1}^{N} \left[1+2\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\omega}}\right] = \prod_{\varkappa=1}^{N} \frac{\varkappa^{\frac{1}{\omega}}+2N^{\frac{1}{\omega}}}{\varkappa^{\frac{1}{\omega}}}$$

$$< \prod_{\varkappa=1}^{N} \frac{3N^{\frac{1}{\omega}}}{\varkappa^{\frac{1}{\omega}}} = \left[\frac{(3^\omega N)^N}{N!}\right]^{\frac{1}{\omega}} < e^{\frac{3^\omega N}{\omega}}.$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf Ungl. (19) bezw. (17):

$$|R_{M,N}| < e^{N\left(S_l^{(\sigma,\tau)}+\frac{3^\omega}{\omega}\right)}$$

$$< e^{(|x|^\sigma+|y|^\tau+1)\left(S_l^{(\sigma,\tau)}+\frac{3^\omega}{\omega}\right)}$$

$$< e^{(|x|^\sigma+|y|^\tau)\left(S_l^{(\sigma,\tau)}+\frac{3^\omega}{\omega}+\delta\right)} \text{ für } |x|^2+|y|^2 > R_2^2,$$

wenn R_2 so gewählt wird, daß

$$\frac{S_l^{(\sigma,\tau)}+\frac{3^\omega}{\omega}}{|x|^\sigma+|y|^\tau} < \delta$$

ist, was stets möglich ist, da mit $|x|^2+|y|^2$ auch $|x|^\sigma+|y|^\tau$ beliebig groß wird. Setzt man

$$S_l^{(\sigma,\tau)}+\frac{3^\omega}{\omega}+\delta = c_{\sigma,\tau},$$

so erhält man:

$$|R_{M,N}| < e^{c_{\sigma,\tau}(|x|^\sigma+|y|^\tau)} \text{ für } |x|^2+|y|^2 > R_2^2. \tag{20}$$

Für das Produkt R_N gilt nach Hilfssatz 1 (für $\alpha = \beta = 1$), wenn $|x|^2 + |y|^2 > R_3^2$ ist bei entsprechendem R_3:

$$
\begin{aligned}
|R_N| &< e^{\sum\limits_{\varkappa=N+1}^{\infty}\left(|a_\varkappa x|^{\frac{l+1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{l+1}{m}}\right)} \\
&= e^{|x|^{\frac{l+1}{n}} \sum\limits_{\varkappa=N+1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}} + |y|^{\frac{l+1}{m}} \sum\limits_{\varkappa=N+1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}} \\
&< e^{|x|^{\frac{l+1}{n}} \sum\limits_{\varkappa=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{l+1}{\sigma n}} + |y|^{\frac{l+1}{m}} \sum\limits_{\varkappa=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{l+1}{\tau m}}} \\
&\overset{1)}{<} e^{|x|^{\frac{l+1}{n}} \frac{1}{\left(\frac{l+1}{n\sigma}-1\right) N^{\frac{l+1}{n\sigma}-1}} + |y|^{\frac{l+1}{m}} \frac{1}{\left(\frac{l+1}{m\tau}-1\right) N^{\frac{l+1}{m\tau}-1}}} \\
&< e^{\frac{|x|^\sigma}{\frac{l+1}{n\sigma}-1}\left(\frac{|x|^\sigma}{N}\right)^{\frac{l+1}{n\sigma}-1} + \frac{|y|^\tau}{\frac{l+1}{m\tau}-1}\left(\frac{|y|^\tau}{N}\right)^{\frac{l+1}{m\tau}-1}} \\
&< e^{\frac{|x|^\sigma}{\frac{l+1}{\sigma n}-1} + \frac{|y|^\tau}{\frac{l+1}{m\tau}-1}}
\end{aligned}
$$

nach den Rel. (18), da $\frac{l+1}{n\sigma} - 1$ und $\frac{l+1}{m\tau} - 1$ nach Voraussetzung (14) positiv sind. Bezeichnet man die kleinere dieser beiden Zahlen mit $\frac{1}{c'_{\sigma,\tau}}$, so hat man:

$$
|R_N| < e^{c'_{\sigma,\tau}(|x|^\sigma + |y|^\tau)} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_3^2. \tag{21}
$$

Aus den Ungl. (16), (20), (21) folgt die Behauptung, wenn

$$
C_{\sigma,\tau} = \varepsilon + c_{\sigma,\tau} + c'_{\sigma,\tau}
$$

und R die größte der drei Zahlen R_1, R_2, R_3 ist.

Aus dem letzten Satze läßt sich folgende Beziehung zwischen der Ordnungskurve der betrachteten Funktion und dem Scheitel des Grenzwinkels gewinnen:

Satz 43. Hat eine primitive ganze Funktion mit wesentlich linearen Primfunktionen

$$
P(x,y) = \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} [1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)]\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}(x,y)}
$$

---

1)
$$
\sum_{\varkappa=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{1+\vartheta} < \frac{1}{\vartheta N^\vartheta} \text{ für } \vartheta > 0
$$

(Elementarer Beweis von A. Pringsheim a. a. O. p. 305, Fußnote).

die Eigenschaft, daß man für alle positiven δ hat:

$$\varkappa\,|a_\varkappa|^{\varrho_0+\delta} \leqq 1, \quad \varkappa\,|b_\varkappa|^{\varrho_0'+\delta} \leqq 1 \text{ für } \varkappa > K,$$ [1])

wo ρ_0, ρ_0' die Koordinaten des Scheitels des Grenzwinkels sind, so gibt es stets ein Ordnungspaar α, α' der Funktion $P(x, y)$, so daß

$$\alpha \leqq \rho_0, \quad \alpha' \leqq \rho_0'$$

ist.[2])

Nach Voraussetzung ist nämlich

$$|a_\varkappa|^{\varrho_0+\delta} \leqq \frac{1}{\varkappa}, \quad |b_\varkappa|^{\varrho_0+\delta'} \leqq \frac{1}{\varkappa} \text{ für } \varkappa > K;$$

ist nun $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ ein Wertepaar des Rangsystems, so daß

$$\rho_0 < \frac{l+1}{n}, \quad \rho_0' < \frac{l+1}{m}$$

ist und damit (Satz 39)

$$\frac{l}{n} < \rho_0 + \delta < \frac{l+1}{n}, \quad \frac{l}{m} < \rho_0' + \delta' < \frac{l+1}{m}$$

für hinreichend kleine, sonst beliebige δ, δ', so kann man $\rho_0 + \delta$ und $\rho_0' + \delta'$ als die Zahlen σ bezw. τ des letzten Satzes auffassen und erhält durch Anwendung dieses Satzes:

$$|P(x, y)| < e^{C_{\varrho_0+\delta,\,\varrho_0'+\delta'}\left(|x|^{\varrho_0+\delta}+|y|^{\varrho_0'+\delta'}\right)} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R^2;$$

zunächst gilt diese Ungleichung für hinreichend kleine, damit aber für alle positiven δ, δ'. Nach der Definition der Ordnungspaare ist damit der Satz bewiesen.

Satz 44. Für die im letzten Satz charakterisierte Klasse von Funktionen fällt die Ordnungskurve vollständig mit dem Grenzwinkel zusammen.

---

[1]) Eine dieser beiden Bedingungen ist stets erfüllt, z. B. die erste, indem man die Faktoren des unendlichen Produktes nach monoton abnehmenden $|a_\varkappa|$ geordnet denkt; denn aus der Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\varrho_0+\delta}$ und der Monotonie der Zahlen $|a_\varkappa|$ folgt:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \varkappa\,|a_\varkappa|^{\varrho_0+\delta} = 0, \text{ also } \varkappa\,|a_\varkappa|^{\varrho_0+\delta} < \varepsilon < 1 \text{ für } \varkappa > K.$$

Die andere Bedingung ist sicher erfüllt, wenn zugleich die Zahlen $|b_\varkappa|$ monoton abnehmen, sie kann aber auch noch in anderen Fällen erfüllt sein und ist es in der Tat bei den naheliegenden Funktionen.

[2]) Wenn zwei Zahlen $\frac{l+1}{n}$, $\frac{l+1}{m}$ mit ρ_0 bezw. ρ_0' zusammenfallen, folgt dieser Satz sehr einfach aus dem Satze 41.

Nach Satz 40 nämlich liegt die Ordnungskurve, vom Anfang aus betrachtet, jenseits des Grenzwinkels oder fällt mit ihm zusammen. Dies widerspricht dem letzten Satze nur dann nicht, wenn dort

$$\alpha = \rho_0, \quad \alpha' = \rho_0'$$

ist. Damit fällt ein Punkt der Ordnungskurve in den Scheitel des Grenzwinkels; als monotone Kurve muß aber dann (wegen Satz 40) die ganze Ordnungskurve mit dem Grenzwinkel zusammenfallen.

Die allgemeine Identität der Ordnungskurve mit dem Grenzwinkel im Falle primitiver Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen ist zwar sehr wahrscheinlich, bleibt aber dahingestellt.

Weit weniger wahrscheinlich ist es, daß sich für ganze Funktionen zweier Veränderlichen mit unendlich vielen Primfunktionen höheren als ersten Grades oder für solche der weiteren § 1 angegebenen Klassen auf einem ähnlichen Wege analoge Resultate gewinnen lassen, zumal sich schon einer Übertragung der Grundlagen dieser Untersuchungen außerordentliche Schwierigkeiten entgegenstellen, wie ja oben (§ 7) erwähnt wurde.

Dagegen scheinen einer Ausdehnung der geführten Untersuchungen auf ganze Funktionen von n komplexen Veränderlichen mit analogen speziellen Eigenschaften keine prinzipiellen Hindernisse im Wege zu stehen.