

Über Strahlencurven und Wellenflächen in einem Medium mit veränderlicher Fortpflanzungs- geschwindigkeit

mit Rücksicht auf die Erdbebenerscheinungen.

Von Emil Kohl in Wien.

In der vorliegenden Untersuchung soll eine Frage näher studiert werden, welche besonders für die Erdbeben-theorie von Interesse ist, nämlich, welche Form in einem Medium von veränderlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit die Strahlen und Wellenflächen besitzen. Nach der Ansicht von Mallet kann die Erdrinde als homogen betrachtet werden, wonach die Stoßstrahlen gerade Linien, die Wellenflächen Kugeln darstellen, auch die meisten neueren Forscher wie Dutton, Ewings, Seebach u. a. entwickeln die theoretischen Resultate fast allgemein auf Grundlage derselben Voraussetzung; nach dieser Annahme müsste die Geschwindigkeit des Bebens an der Erdoberfläche bis zu einem Maximalwerte zunehmen. Bezeichnen nämlich die concentrischen Kreise in Fig. 1 um das Centrum 0 die Meridiane solcher Wellenflächen, welche um je einen in dem Zeitelemente Δt von der Welle zurückgelegten Weg $c\Delta t$ von einander abstehen, ist ferner H die Oberfläche der Erde, welche in erster Näherung als eben betrachtet werden kann, so stellen die Secantenabschnitte $v = a_0 a_1, a_1 a_2, a_2 a_3, \dots$ die scheinbare Geschwindigkeit v des Bebens an der Erde dar. Diese Abschnitte sind durch die Formel

$$v = \frac{c}{\sin \alpha}$$

gegeben, wobei α den Einfallswinkel des Stoßstrahles an der Oberfläche H bezeichnet. Diese Formel stellt das Hopkins'sche Gesetz dar, nach welchem stets

$$v > c$$

ist, sich für unendlich weite Punkte aber der wahren Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Centrum asymptotisch nähert. Man hat bei Erdbeben den Hodographen construiert, indem man die Entfernungen als Abscissen, die Zeiten als Ordinaten aufträgt und

so eine stetige Curve erhält, deren Tangenten die Oberflächen-geschwindigkeit des Bebens angeben. Nach der Annahme von Mallet sollte sie eine Hyperbel sein, jedoch zeigte sich, dass sie in den meisten Fällen einen Wendepunkt besitzt; hieraus ist zu schließen, dass die Geschwindigkeit im Innern nicht constant sein kann, sondern nach einem vermuthlich sehr complicierten Gesetz sich ändert. Diese erweiterte Auffassung hat wohl zuerst Dr. A. Schmidt ausgesprochen, der in einer Abhandlung über „Cyclische Refraction“¹⁾ zunächst den Fall der Lichtbrechung in Luftschichten von veränderlicher optischer Dichte behandelte, und zwar auf Grundlage geometrischer Betrachtungen. In späteren Arbeiten²⁾ übertrug er die gefundenen Ergebnisse durch Betrachtungen allgemeiner Art auch auf die Stoßstrahlen bei Erdbeben, hauptsächlich für den Fall einer mit der Tiefe proportional zunehmenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit.³⁾ In der hier vorgelegten Arbeit sollen die Ergebnisse insofern erweitert werden, als zunächst noch eine zweite Annahme über die Geschwindigkeitsänderung mit der Tiefe zugrunde gelegt wird, welche für die Art gewisser Erdbeben typisch zu sein scheint, und dann die Schmidt'sche Annahme noch auf den Fall ausgedehnt wird, wo nicht eine punktförmige, sondern eine lineare Quelle vorhanden ist, ein Fall, der einer sogenannten Dislocationslinie entspricht.

Behufs Festlegung der in Frage kommenden Aufgabe ist folgendes vor auszuschicken: Wird in einem Punkte des Mediums eine Wellenbewegung erregt, so pflanzt sich dieselbe nach allen Seiten hin fort und zwar, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Function der Tiefe ist, nicht mehr in geraden sondern in krummen Linien. Man kann sich nun die durch eine Ebene begrenzte Erdkruste durch parallel mit der Oberfläche gelegte Ebenen in unendlich dünne Schichten solcher Art zerlegt denken, dass innerhalb derselben die Fortpflanzungsgeschwindigkeit als constant betrachtet werden kann. An der Grenze jeder Schicht tritt eine Brechung des aus der vorhergehenden kommenden Stoßstrahles ein, welche nach dem Huyghens'schen Principe sich rechnerisch verfolgen lässt; auf diese Weise entsteht eine Stoßstrahlencurve. Zur Zeit t wird nun die vom Centrum ausgehende Bewegung auf dem gesammten Continuum der Stoßstrahlen bis zu einer Fläche fortgeschritten sein, welche als Wellenfläche zu bezeichnen ist. Voraussetzung ist aber stets, dass das Huyghens'sche Princip auch auf beliebig dünne Schichten angewendet werden darf.

¹⁾ Jahresbericht des Stuttgarter Real-Gymnasiums; 1878.

²⁾ Wellenbewegung und Erdbeben; Jahreshefte des Ver. für Vaterländische Naturkunde in Württemberg, 24. Jahrg. Stuttgart 1888, Seite 249. — Untersuchungen über zwei neuere Erdbeben, das schweizerische vom 7. Januar 1889 und das nordamerikanische vom 31. August 1886. Seite 200.

³⁾ Eine Zusammenfassung der einschlägigen Literatur findet sich bei Otto Wiener. Darstellung gekrümmter Lichtstrahlen und Verwertung derselben zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung, Wiedemann, Annalen, B. 49, 1893.

Nach diesen Bemerkungen sollen zunächst zwei Sätze allgemeiner Natur vorausgeschickt werden.

Es werde die Schnittgerade der Oberfläche mit der Ebene des Stoßstrahles zur X -Achse, die Lothrechte durch das Centrum O zur Y -Achse gewählt. Dann ist, wie sich aus Fig. 2 sofort ergibt, die Gleichung der Stoßstrahlcurve unter Benützung der Huyghen'schen Principes

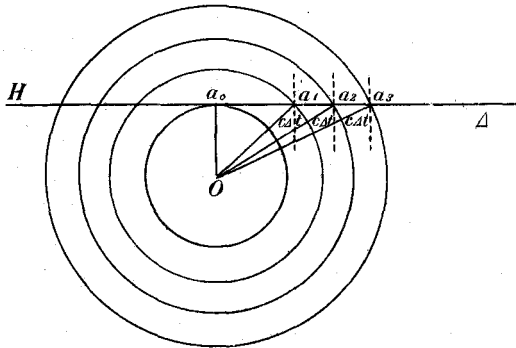
$$\frac{\sin \alpha}{c} = \frac{\sin \alpha_0}{c_0},$$

gegeben durch

$$(1) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{c_0^2}{c^2 \sin^2 \alpha_0},$$

worin die Geschwindigkeit c eine Function der Tiefe y , c_0 und α_0

Fig. 1.



die entsprechenden Werte im Centrum bedeuten und

$$\frac{dy}{dx} = \cotg \alpha$$

ist. Hieraus folgt

$$(2) \quad x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{c_0^2}{c^2 \sin^2 \alpha_0} - 1}}.$$

Die Wellenfläche ist dadurch bestimmt, dass die Zeit berechnet wird, welche die Bewegung auf einer Stoßstrahlcurve braucht, um zum Punkte (x, y) zu gelangen. Wird diese Zeit einer Constanten gleich gesetzt und nun aus diesem Integral und der Gleichung der Stoßstrahlcurve der Parameter α_0 eliminiert, so erhält man die Gleichung der Wellenfläche.

Man kommt so hierfür

$$(3) \quad t = \int_0^y \frac{ds}{c} = \int_0^y \frac{dy}{c \cos \alpha} = \int_0^y \frac{dy}{c \sqrt{1 - \frac{c^2 \sin^2 \alpha_0}{c_0^2}}}.$$

Um nun die scheinbare Geschwindigkeit v auf einer mit der X -Achse parallelen Geraden zu erhalten, hat man zu bilden

$$v = \left[\frac{x(\alpha_0 + \Delta \alpha_0) - x(\alpha_0)}{t(\alpha_0 + \Delta \alpha_0) - t(\alpha_0)} \right] y = \text{const.}$$

Aus obigen Integralen (2) und (3) ergibt sich

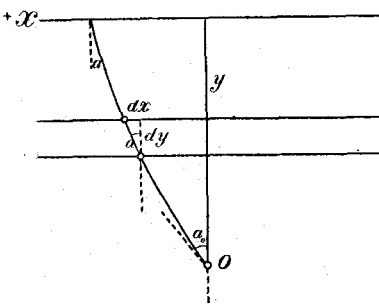
$$v = \frac{c_0}{\sin \alpha_0},$$

also allgemein nach dem Huyghen'schen Princip

$$(3') \quad v = \frac{c_0}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \alpha}.$$

Dieser Satz stellt das Hopkins'sche Gesetz in seiner allgemeinsten Form dar.

Fig. 2.



Hieraus ergibt sich eine wichtige Beziehung zwischen den Stoßstrahlencurven und den Wellenflächen. Denkt man sich zwei unendlich nahe Stoßstrahlencurven und zwei ebenfalls unendlich nahe Wellenflächenmeridiane so schneidend, dass ihre Diagonale in eine zur X -Achse parallele Gerade fällt (Fig. 3) so entsteht ein Parallelogramm, dessen Diagonale v und dessen eine Seite c in der oben bewiesenen Beziehung

$$v \sin \alpha = c,$$

resp.

$$v \cos \beta = c \quad (\beta = 90^\circ - \alpha)$$

stehen. Hieraus folgt, dass dieses Parallelogramm ein Rechteck sein muss, dass also die Stoßstrahlencurven und die Wellenflächenmeridiane ein orthogonales System bilden. Bedenkt man, dass innerhalb einer solchen Schichte das Medium als homogen und isotrop anzunehmen ist, dass also die Schwingungen longitudinalen Charakters im Strahl, jene transversalen Charakters senkrecht dazu erfolgen, so kann man sagen, dass die longitudinalen Schwingungen überall normal auf der Wellenfläche, die transversalen aber in der Tangentialebene derselben vor sich gehen, was eine weitere wesentliche Eigenschaft derselben bildet.

Die nächste Aufgabe ist, nun die Function für die Zunahme der Geschwindigkeit c mit der Tiefe näher zu betrachten.

Die Geschwindigkeit c ist bekanntlich durch die Gleichung gegeben

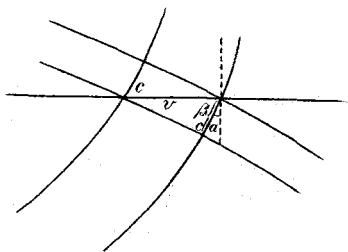
$$c = \sqrt{\frac{m E}{\rho}},$$

wobei ε den Elasticitätscoefficient, ρ die Dichte und m eine mit dem Verhältnisse zwischen Längen- und Seitendilation beim freien Zuge zusammenhängende Constante bedeutet. Mit steigender Tiefe y muss nun offenbar der Elasticitätscoefficient wachsen, da sonst die Dichte außerordentlich große Werte annehmen müsste, was mit den Ergebnissen betreffs der Maße des Erdkörpers im Widerspruch stände. Was die Form dieser Function anbelangt, so lassen sich, da keine Erfahrungsdaten vorliegen, auch keine sicheren Annahmen machen. Nun hat aber E die Eigenschaft, unter Annahme desselben Aggregatzustandes stetig mit der Tiefe zuzunehmen und an keinem Punkte derselben Null oder unendlich zu werden; eine solche Function wird mathematisch durch eine Exponentialfunction oder eine aus solchen gebildete Reihe von Exponentialfunctionen definiert, welche nirgends im Endlichen verschwindet oder unendlich groß wird; im letzteren Falle ist jedenfalls ein Glied der Reihe das vorwiegende und kann als Hauptglied, als Repräsentant der Functionsart selbst, allein betrachtet werden. Das bedeutende Ansteigen des Wertes von E für große Tiefen nach einer Exponentiellen würde auch erklären, dass selbst bei den gewaltigen Drucken im Erdinnern eine verhältnismäßig geringe mittlere Dichte möglich erscheint. Was die Dichte betrifft, so nimmt dieselbe wegen des stetig wachsenden Druckes ebenfalls zu, aber langsamer, und wird in sehr großen Tiefen nahezu constant; hiezu kommt noch, dass die Wärmezunahme in wachsender Tiefe im Sinne einer Abnahme der Dichte wirkt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c stellt sich also als Wurzel aus dem Quotienten zweier Potenzreihen, nach y dar, kann also selbst als Potenzreihe von y entwickelt werden. Es werden sich nun zwei extreme Fälle ergeben: für kleine Werte von y wird man sich bloß auf das erste Glied von y beschränken und c in der Form

$$c = c_0 (1 + ay)$$

schreiben können; bei sehr großen Werten von y hingegen ist die Dichte nahezu constant, der Elasticitätscoefficient wächst den obigen

Fig. 3.



Auseinandersetzungen gemäß nach den Dimensionen einer Exponentiellen, es ist also

$$c = c_0 e^{ay}.$$

Wie weit die Tiefe reicht, bei welcher diese beiden extremen Fälle in erster Näherung als geltend betrachtet werden können, das hängt von der Beschaffenheit des Mediums ab und kann nach den gegenwärtigen Erfahrungen auch nicht annähernd bestimmt werden.

Es sollen diese beiden Grenzfälle nun näher studiert werden, da sich aus ihnen in allgemeinen Zügen das Bild auch für eine mittlere Zone entwerfen lässt, wo bereits höhere Glieder von y als das erste berücksichtigt werden müssen.

1. Die Schmidt'sche Annahme für ein punktförmiges Centrum.

Die Gleichung der Stoßcurven erhält man nach (2), da $c = c_0 (1 + ay)$ ist, in der Form

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\sin \alpha_0 (1 - ay)}.$$

Es soll nun zur Vereinfachung das Coordinatensystem so gelegt werden, dass der 0-Punkt ins Centrum fällt, die Lothrechte nach aufwärts als positive Y -Achse, die Horizontale nach links als positive X -Achse gewählt wird. Da dann nach aufwärts die Fortpflanzungsgeschwindigkeit abnimmt, ist

$$c = c_0 (1 - ay),$$

wobei c_0 den Centrumswert bezeichnet, ferner

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\sin \alpha_0 (1 - ay)};$$

als Lösung erhält man hieraus nach einigen einfachen Substitutionen die Gleichung der Stoßstrahlcurven in der Gestalt:

$$(4) \quad \left(x \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha_0}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(\frac{1}{a \sin \alpha_0}\right)^2.$$

Die Stoßstrahlcurven bilden also ein Doppelsystem von Kreisen, deren Mittelpunkte in jener Horizontalen liegen, für welche $c = 0$ werden würde. In der Folge sollen, um die Gleichungswerte eindeutig zu definieren, Polarcoordinaten eingeführt werden, deren Pol im Centrum liegt und deren Polaxe die in demselben errichtete Lothrechte bildet. Es wird (4) wenn man zunächst bloß das Zeichen $+$ berücksichtigt,

$$(4') \quad \rho = \frac{2}{a \sin \alpha_0} \sin (\alpha_0 - \varphi).$$

Es sollen weiters die Wellenflächen abgeleitet werden.

Die Zeit, welche die Bewegung braucht, um vom Centrum zu einem beliebigen Punkte des Stoßstrahles zu gelangen, ist nach (3)

$$(5) \quad t = \int_0^{\alpha_0} \frac{ds}{c} = \int_0^{\alpha_0} \frac{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}}{c_0 (1 - a\rho \cos \varphi)} d\varphi.$$

Setzt man hierin den Wert für $\frac{d\rho}{d\varphi}$ ein und berücksichtigt (5), so erhält man

$$t = \frac{2}{a \sin \alpha_0} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\varphi'}{c_0 (1 - a\rho \cos \varphi)} = \frac{2}{a c_0} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\varphi}{\sin (2\varphi + \alpha_0)},$$

also

$$(6) \quad t = \frac{1}{c a_0} \log \frac{t g \frac{2\varphi + \alpha_0}{2}}{t g \frac{\alpha_0}{2}} = \frac{1}{2 a c_0} \log \frac{[1 - \cos (2\varphi + \alpha_0)] [1 + \cos \alpha_0]}{[1 + \cos (2\varphi + \alpha_0)] [1 - \cos \alpha_0]},$$

$$(6') \quad t = \frac{1}{2 a c_0} \log \frac{(1 - \cos 2\varphi \cos \alpha_0 + \sin 2\varphi \sin \alpha_0) (1 + \cos \alpha_0)}{(1 + \cos 2\varphi \cos \alpha_0 - \sin 2\varphi \sin \alpha_0) (1 - \cos \alpha_0)}.$$

Um die Gleichung der Wellenflächenmeridiane zu entwickeln, eliminiere man aus (4') und (6') den Winkel α_0 . Aus (4') folgt

$$\sin \alpha_0 = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{a\rho}{2}\right)^2 - a\rho \cos \varphi}},$$

$$\cos \alpha_0 = \frac{\cos \varphi - \frac{a\rho}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a\rho}{2}\right)^2 - a\rho \cos \varphi}}.$$

Führt man in Gleichung (6') diese Werte ein, so erhält man

$$\frac{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{a\rho}{2}\right)^2 - a\rho \cos \varphi} - \left(\cos \varphi - \frac{a\rho}{2} \right) \cos 2\varphi + \sin 2\varphi \sin \varphi \right]}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{a\rho}{2}\right)^2 - a\rho \cos \varphi} + \left(\cos \varphi - \frac{a\rho}{2} \right) \cos 2\varphi - \sin 2\varphi \sin \varphi \right]} \cdot \frac{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{a\rho}{2}\right)^2 - a\rho \cos \varphi} - \frac{a\rho}{2} + \cos \varphi \right]}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{a\rho}{2}\right)^2 - a\rho \cos \varphi} + \frac{a\rho}{2} - \cos \varphi \right]} = e^{2 a c_0 t},$$

oder, wenn man $\cos 2\varphi$ und $\sin 2\varphi$ in die einfachen Winkel verwandelt und ausmultipliziert, schließlich

$$\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{a\rho}{2}\right)^2 - a\rho \cos \varphi - \frac{a\rho}{2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a\rho}{2}\right)^2 - a\rho \cos \varphi + \frac{a\rho}{2}}} = \pm e^{a c_0 t}, \text{ resp.}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{a\rho}{2}\right)^2 - a\rho \cos \varphi [1 \mp e^{a c_0 t}]} = \frac{a\rho}{2} [1 \pm e^{a c_0 t}].$$

Quadriert man und zieht die mit $(1 - a\rho \cos \varphi)$ multiplicierten Glieder zusammen, so ergibt sich nach einigen Vereinfachungen

$$(1 - a\rho \cos \varphi) (1 \mp e^{a c_0 t})^2 = \pm (a\rho)^2 e^{a c_0 t}.$$

Für $t=0$ muss $\rho=0$ werden, daher ist bloß das erste Zeichen zu wählen, so dass die Gleichung der Wellenfläche lautet:

$$(7) \quad (1 - a\rho \cos \varphi) (1 - e^{a c_0 t})^2 = (a\rho)^2 e^{a c_0 t}.$$

Führt man wieder rechtwinklige Coordinaten ein, so ergibt sich für die Wellenfläche

$$(7') \quad \left[y + \frac{1}{2a} (e^{a c_0 t} + e^{-a c_0 t} - 2) \right]^2 + x^2 + z^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{2a} (e^{a c_0 t} - e^{-a c_0 t}) \right]^2,$$

wenn man statt des Meridianschnittes die ganze Fläche betrachtet. Die Meridiane bilden also ebenfalls Kreise, deren Mittelpunkte in der Lothrechten durch das Centrum liegen.

Die Folgerungen aus diesen Resultaten wurden bereits von Dr. A. Schmidt gezogen; da sie jedoch für spätere Betrachtungen wichtig erscheinen, sollen sie hier in Kürze citiert werden. Zunächst ist ersichtlich, dass die Stoßstrahlen theils direct theils durch totale Reflexion in tieferen Schichten in Kreisbögen zur Oberfläche gelangen. Die Einfallswinkel, unter denen sie dort auftreten, sind wegen der Krümmung der Strahlen viel kleiner, als bei geradliniger Fortpflanzung, die Strahlen fallen also steiler, als im letzteren Falle ein. Die Oberflächengeschwindigkeit ist nach dem allgemeinen Hopkin'schen Gesetze

$$v = \frac{c_0}{\sin \alpha_0},$$

wobei jetzt α_0 von 0° bis 180° variiert. v hat daher ein Maximum für $\alpha = 90^\circ$, also für jenen Strahl, der in einer von der Horizontalen um unendlich wenig differierenden Richtung vom Centrum aus-

geht. Wo dieser Strahl die Oberfläche trifft, besitzt der Hodograph einen Wendepunkt, da dort $\frac{dv}{da_0} = 0$ ist. Die Oberflächengeschwindigkeit im Wendepunkte

$$v_{90^\circ} = \frac{c_0}{\sin 90^\circ} = c_0$$

stellt gleichzeitig die wahre Geschwindigkeit im Centrum dar. Dieser letztere Satz als Folgerung aus den Hopkins'schen Gesetze (3') gilt übrigens allgemein für alle Fälle, daher jeder Hodograph die Größe c_0 liefert, wie auch immer die Function c beschaffen sein mag. Bezüglich der weiteren Ausführungen sei auf die Originalarbeiten des genannten Forschers verwiesen.

2. Wellenfläche im Falle einer Dislocationslinie unter der Schmidt'schen Annahme.

Die Isochronen auf der Erdoberfläche haben im vorigen Falle die Form von Kreisen; anders gestaltet sich die Sache, wenn die Bewegung gleichzeitig auf einer ganzen Linie beginnt, die hier der Einfachheit wegen als Gerade vorausgesetzt werden soll.

Hiebei ist freilich zu bemerken, dass Dr. A. Schmidt es als wahrscheinlich hinstellt, dass der Impuls auf der Dislocationslinie sich von einem bestimmten Punkte aus längs derselben mit einer der Geschwindigkeit des Bebens, also der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elastischen Störungen, nahezu gleichen Schnelligkeit fortpflanzt. Die Rechnung würde sich in diesem Falle dadurch sehr complicieren, dass außer dieser Geschwindigkeit noch die Lage des ersten Impulses auf der Dislocationsgeraden in Betracht käme. Es soll aus diesem Grunde hier zunächst nur der eben angeführte einfachste Fall näher behandelt werden.

Die Dislocationslinie sei G , ihre Gleichung, bezogen auf ein durch ihren tiefsten Punkt als Centrum gelegtes Achsensystem

$$\eta = b\xi.$$

Die Aufgabe besteht also darin, die Enveloppe aller Wellenflächen, deren Erregungspunkte auf G liegen, aufzusuchen. Die Gleichung einer Wellenfläche lautet nach (7')

$$\left[y + \frac{1}{2a} (e^{act} + e^{-act} - 2) \right]^2 + x^2 + z^2 = \frac{1}{4a^2} (e^{act} - e^{-act})^2.$$

Sie lässt sich in eine für die vorliegende Frage bequemere Form durch Transformierung der ebenfalls veränderlichen Größen a und c bringen. Bezeichnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an der Oberfläche mit C , jene im Centrum 0 mit c_0 , endlich jene in einem beliebigen Punkte $M(\xi, \eta)$ von G mit c , so ist

$$C = c_0 (1 - a Y_0).$$

$$c = c_0 (1 - a_0 \eta),$$

$$C = c (1 - a [Y_0 - \eta]),$$

wobei Y_0 die Tiefe des Centrums unter der Erdoberfläche ist. Daraus folgt

$$ac = a_0 c_0,$$

$$a = \frac{a_0}{1 - a_0 \eta},$$

wobei sich a_0 auf das Centrum 0 bezieht. Die vom Punkte M ausgehende Wellenfläche hat also die Gleichung

$$\left[y - \eta + \frac{1 - a_0 \eta}{2a_0} (e^{a_0 c_0 t} + e^{-a_0 c_0 t} - 2) \right]^2 + \left(x - \frac{\eta}{b} \right)^2 + z^2 = \frac{(1 - a_0 \eta)^2}{4a_0^2} (e^{a_0 c_0 t} - e^{-a_0 c_0 t})^2.$$

Man differenziere nach η :

$$- \left[y - \eta + \frac{1 - a_0 \eta}{2a_0} (e^{a_0 c_0 t} + e^{-a_0 c_0 t} - 2) \right] \left[e^{a_0 c_0 t} + e^{-a_0 c_0 t} \right] - 2 \left(x - \frac{\eta}{b} \right) \frac{1}{b} = - \frac{1 - a_0 \eta}{2a_0} (e^{a_0 c_0 t} - e^{-a_0 c_0 t})^2,$$

woraus man erhält

$$2\eta \frac{1 + b^2}{b} = by(e^{a_0 c_0 t} + e^{-a_0 c_0 t}) + 2x - \frac{b}{a_0} (e^{a_0 c_0 t} + e^{-a_0 c_0 t} - 2).$$

Bezeichnet man der Kürze wegen

$$\begin{aligned} e^{a_0 c_0 t} + e^{-a_0 c_0 t} - 2 &= \overline{A}, \\ e^{a_0 c_0 t} + e^{-a_0 c_0 t} &= \overline{B}, \\ e^{a_0 c_0 t} - e^{-a_0 c_0 t} &= \overline{C}, \\ b^2 &= \overline{S}, \\ \frac{1}{1 + b^2} &= S, \end{aligned}$$

so ist

$$\eta = \frac{1}{2} S \overline{B} y + \frac{S}{b} x - \frac{1}{2a_0} S \overline{A}.$$

Substituiert man diesen Wert für η in die Gleichung der Wellenfläche, so erhält man die Enveloppe:

$$\begin{aligned} \left(y - \frac{1}{4} S \overline{B}^2 y - \frac{1}{2} \frac{S \overline{B}}{b} x + \frac{1}{4a_0} S \overline{A} \overline{B} + \frac{1}{2a_0} \overline{A} \right)^2 &= z^2 + \\ \left(x - \frac{1}{2b} S \overline{B} y - \frac{S}{b^2} x + \frac{1}{2a_0 b} S \overline{A} \right)^2 &= \left(\frac{1}{2a_0} \overline{C} - \frac{1}{4} S \overline{B} \overline{C} y - \frac{1}{2b} S \overline{C} x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4a_0} S \overline{A} \overline{S} \right)^2, \end{aligned}$$

oder nach Potenzen von y und x geordnet:

$$\begin{aligned} y^2 \left[\left(1 - \frac{1}{4} S \overline{B}^2 \right)^2 + \frac{(S \overline{B})^2}{4b^2} - \frac{1}{16} (S \overline{B} \overline{C})^2 \right] &+ \\ + x^2 \left[\frac{(S \overline{B})^2}{4b^2} + \left(1 - \frac{S}{b^2} \right)^2 - \frac{1}{4b^2} (S \overline{C})^2 \right] & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z^2 - 2yx \left[\left(1 - \frac{1}{4} S \bar{B}^2 \right) \frac{S \bar{B}}{2b} + \left(1 - \frac{S}{b^2} \right) \frac{S \bar{B}}{2b} + \frac{1}{8b} S^2 \bar{B} \bar{C}^2 \right] \\
& + 2y \left[\left(1 - \frac{1}{4} S \bar{B}^2 \right) \left(\frac{1}{4a_0} S \bar{A} \bar{B} + \frac{1}{2a_0} \bar{A} \right) - \frac{1}{4b^2 a_0} S^2 \bar{A} \bar{B} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4a_0} S \bar{B} \bar{C} \left(\frac{1}{4} S \bar{A} \bar{C} + \frac{\bar{C}}{2} \right) \right] \\
& - 2x \left[\frac{S \bar{B}}{2a_0 b} \left(\frac{1}{4} S \bar{A} \bar{B} + \frac{1}{2} \bar{A} \right) - \frac{1}{2a_0 b} S \bar{A} \left(1 - \frac{S}{b^2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2a_0 b} S \bar{C} \left(\frac{1}{4} S \bar{A} \bar{C} + \frac{\bar{C}}{2} \right) \right] \\
& + \left[\frac{1}{a_0^2} \left(\frac{S \bar{A} \bar{B}}{4} + \frac{1}{2} \bar{A} \right)^2 \frac{1}{4a_0^2 b^2} (S \bar{A})^2 - \frac{1}{a_0^2} \left(S \bar{A} \bar{C} + \frac{\bar{C}}{2} \right)^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Führt man die Rechnungen durch, so ergibt sich schließlich die Gleichung der Wellenflächenenvelope in der Form:

$$\begin{aligned}
(8) \quad y^2 \left(1 - \frac{1}{4} S \bar{B}^2 \right) + x^2 S + z^2 - 2xy \frac{S \bar{B}}{2b} + \frac{y}{2a_0} (2 \bar{A} + S \bar{A} \bar{B}) \\
+ x \frac{S \bar{A}}{a_0 b} = \frac{1}{4a_0^2} (S \bar{A}^2 + 4 \bar{A}).
\end{aligned}$$

Für $y = Y_0$ erhält man endlich die Gleichung für die Isochrone, d. i. die Schnittcurve der Wellenfläche mit der Oberfläche. Berücksichtigt man nun, dass

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \bar{B} - 2, \\
1 - a Y_0 &= \frac{C}{c_0}
\end{aligned}$$

ist, so kann man diese Gleichung leicht in folgende transformieren:

$$(9) \quad \left[x + \frac{1}{2a_0 b} \left(\bar{B} \frac{C}{c_0} - 2 \right) \right]^2 + \frac{z^2}{S} = \frac{1}{4a_0^2 S} (B^2 - 4).$$

Die Schnittcurven sind also Ellipsen mit dem nach der Zeit variablen Mittelpunkt

$$P = -\frac{1}{2a_0 b} \left(\bar{B} \frac{C}{c_0} - 2 \right) = -\frac{1}{2a_0 b} \left[(e^{a_0 c_0 t} + e^{-a_0 c_0 t}) \frac{C}{c_0} - 2 \right],$$

wobei als Mittelpunkt des Coordinatensystems auf der Oberfläche der Schnittpunkt der Lothrechten Y durch 0 mit derselben angenommen ist, die X -Achse die Projection der Dislocationsgeraden auf ihr, und die Z -Achse eine dazu Senkrechte darstellt. Die Hauptachsen dieser Ellipse sind

$$\Xi = \frac{1}{2a_0 \sqrt{S}} \left(\frac{C}{c_0} \right) (e^{a_0 c_0 t} - e^{-a_0 c_0 t}),$$

$$Z = \frac{1}{2a_0} \left(\frac{C}{c_0} \right) (e^{a_0 c_0 t} - e^{-a_0 c_0 t}),$$

worin

$$S = \sin^2 \varnothing$$

ist und \varnothing den Neigungswinkel der Dislocationslinie G mit der Horizontalen bedeutet. Umgekehrt würde sich aus den beobachteten Werten von

$$\frac{Z}{\Xi} = \sqrt{S} = \sin \varnothing$$

dieser Winkel berechnen lassen.

Zur Bestimmung der vollständigen Isochrone müssen noch die Bogenstücke ins Auge gefasst werden, welche den Isochronenkreisen der äußersten Punkte der Dislocationslinie $(0, 0)$, $(b \eta_0, \eta_0)$ entsprechen. Die Abscissen derselben können leicht aus der Bedingung gefunden werden, dass die Tangente im Berührungspunkte jedes der beiden Kreise und der Schnittcurve der Wellenflächenenveloppe gemeinsam ist. Man erhält so

$$\left(\frac{dx}{dz} \right)_1 = - \frac{z_1}{S(x_1 + Q)} = - \frac{z_1}{x_1},$$

$$\left(\frac{dx}{dz} \right)_2 = - \frac{z_2}{S(x_2 + Q)} = - \frac{z_2}{x_2 - \frac{\eta_0}{b}}, \quad \left[Q = \frac{1}{2a_0 b} \left(\overline{B} \frac{C}{c_0} - 2 \right) \right]$$

woraus

$$x_1 = \frac{b}{2a_0} \left[\overline{B} \frac{C}{c_0} - 2 \right],$$

$$x_2 = \frac{b}{2a_0} \left[\overline{B} \frac{C}{c_0} - 2 \right] + \frac{L}{\cos \varnothing}$$

folgt, wo L die Länge der Dislocationslinie bedeutet. Hieraus ergibt sich

$$x_2 - x_1 = \frac{L}{\cos \varnothing},$$

so dass sich aus der Kenntnis der Entfernung beider Mittelpunkte der Kreise die Länge der Erschütterungsgeraden bestimmen ließe.

Die ganze Isochrone der von der Dislocationslinie mit den Endpunkten $(0, 0)$ und $(b \eta_0, \eta_0)$ ausgehenden Wellenbewegung besteht demnach aus dem zwischen den Geraden $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ liegenden Bogen der Schnittellipse, an welchen sich in den Durchschnittpunkten dieser Geraden mit ihr zwei Kreisbögen als Ab-

schlusscurven anschließen, deren Gleichungen durch die Isochronen der äußersten Punkte gegeben sind.

Daraus folgt, dass die Geschwindigkeiten der Oberflächenwelle in den einzelnen Punkten der Oberfläche verschieden sind und wesentlich von der Richtung abhängen, in welcher man sie betrachtet. Auf der epicentrischen Geraden speciell pflanzt sich die Welle nach der einen Seite mit der Geschwindigkeit $\frac{c_0}{\sin \alpha_0}$, nach der anderen mit $\frac{c_\eta}{\sin \alpha_\eta}$ fort, das Beben scheint also nach der dem tiefsten Punkte der Dislocationslinie entsprechenden Seite die größte Geschwindigkeit seiner Verbreitung zu besitzen. Hieraus folgt aber auch, dass es für jede Richtung einen eigenen Hodographen gibt und dass es nicht angeht, die nach verschiedenen Richtungen erhaltenen Zeiten der Fortpflanzung auf eine und dieselbe Achse der Entfernungen zu beziehen. Da in Wirklichkeit nun wohl stets eine ganze Linie von Erschütterungen und nicht bloß ein einzelner Punkt des Impulses vorhanden ist, so würde weiters daraus folgen, dass Hodographen, bei welchen die Zeit- und die Distanzenachsen nicht auch örtlich zusammenfallen, nicht vollkommen den thatsächlichen Verhältnissen entsprechen werden, wenn die Erschütterung gleichzeitig auf allen Punkten des Dislocationsgebietes beginnt. Directe sichere Bestätigungen über eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Richtung liegen bisher nicht vor, was wohl auch in erster Linie der großen Unsicherheit in den Zeitangaben zuzuschreiben ist. Da nach den Ausführungen von Dr. A. Schmidt¹⁾ die Dislocationslinien keinesfalls eine Länge von über 100 km besitzen, sondern in der Regel kaum den zehnten Theil betragen dürften, so ist der Einfluss auch in diesem Falle jedenfalls nicht so groß, dass er die Grenzen der Beobachtungsfehler in hohem Grade überschreiten dürfte, es wäre aber bei sehr genauen Zeitbestimmungen nicht ausgeschlossen, dass man zu wertvollen Schlüssen im Sinne der hier ausgeführten Rechnungen gelangen könnte.

3. Die Annahme $c = c_0 e^{ay}$.

Legt man wieder den Coordinatenmittelpunkt durch das Centrum des Bebens und wählt die Lothrechte nach aufwärts diesmal als negative Y-Achse, so ist

$$c = c_0 e^{ay}.$$

Die Gleichungen der Stoßstrahlencurven lautet

$$\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = \frac{e^{-ay}}{\sin \alpha_0},$$

oder

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\left(\frac{e^{-ay}}{\sin \alpha_0}\right)^2 - 1};$$

¹⁾ A. Schmidt. Untersuchungen über zwei neuere Erdbeben etc. I. c. pag. 206.

man erhält demnach für sie

$$(10') \quad e^{ay} \sin \alpha_0 = \sin (\alpha_0 - ax),$$

wenn zunächst bloß das Zeichen $-$ berücksichtigt wird.

Die Tangente ist

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} = -\cotg (\alpha_0 - ax).$$

Hieraus lassen sich einige Eigenschaften der Stoßstrahlcurven ableiten.

Die Curven erstrecken sich nach abwärts bis zu einem Punkte, der durch die Bedingung

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

also

$$1 = e^{2ay} \sin^2 \alpha_0$$

gegeben erscheint. Der tiefste Punkte (Scheitelpunkt) ist also

$$(y) = -\frac{1}{a} \log \sin \alpha_0,$$

$$(x) = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) \cdot \frac{1}{a}.$$

Dort tritt durch totale Reflexion eine Biegung jeder Curve nach aufwärts ein; jede Curve besteht demnach aus zwei bezüglich der Geraden

$$x = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) \frac{1}{a}$$

vollkommen symmetrischen Ästen. Diesem System entspricht ein zweites, das aus (10) durch die Wahl des Zeichens $+$ hervorgeht und aus dem vorhergehenden durch eine Drehung von 180° um die Y -Achse hervorgeht. (Fig. 4.)

Besitzen a und Y_0 (letzteres die Tiefe des Centrums) einigermaßen größere Werte, so wird

$$e^{-aY_0} \sin \alpha_0 = \sin (\alpha_0 - ax_0) = \delta,$$

worin δ einen sehr kleinen Wert bedeutet. Die Stoßcurven treffen also, da nach (11) $\cotg (\alpha_0 - ax)$ sehr groß wird, nahezu senkrecht auf die Oberfläche.

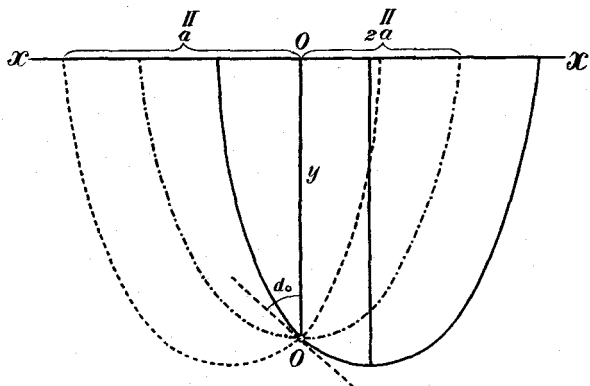
Transformiert man das Coordinatensystem, indem man das Centrum in den Scheitelpunkt

$$\begin{cases} (y) = -\frac{1}{a} \log \sin \alpha_0, \\ (x) = \left(-\frac{\pi}{2} + \alpha_0\right) \frac{1}{a} \end{cases}$$

verlegt, so erhält die Gleichung der Stoßcurven die Form

$$e^{ay'} \sin^2 \alpha_0 = \cos ax'.$$

Fig. 4.



Für die Oberfläche wird nun

$$e^{-aY'_0} \sin \alpha_0 = \cos ax'_0 = \delta,$$

falls Y'_0 und a nicht zu klein sind; daraus folgt

$$x'_0 = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{a},$$

worin δ und ε sehr kleine Werte darstellen. Alle Curven treffen die Oberfläche demnach in Punkten, welche nahezu eine constante Entfernung

$$\overline{x'_0 x''_0} = \frac{\pi}{a}$$

besitzen.

Aus diesem Ergebnisse lässt sich leicht der Radius des Kreises bestimmen, welcher von den letzten direct an die Oberfläche kommenden Stoßcurven ($\lim \alpha_0 = 90^\circ$) auf derselben gebildet werden. Da in diesem Falle der Scheitel in das Centrum des Bebens fällt, ist derselbe

$$\frac{\overline{x'_0 x''_0}}{2} = \frac{\pi}{2a}.$$

Was den auf der Oberfläche durch die äußersten total reflectierten Strahlen gebildeten Kreis betrifft, so ist derselbe, da hierfür $\lim \alpha_0 = 0^\circ$, resp. 180° wird,

$$\overline{x'_0 x''_0} = \frac{\pi}{a},$$

also doppelt so groß, als der erste.

Bemerkenswert erscheint, dass bei der Annahme

$$c = c_0 e^{\alpha y}$$

die ganze an die Oberfläche gelangende Bewegung auf einen beschränkten Raum, und zwar einen Kreis vom Radius

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{a} - \varepsilon' \right),$$

auf dieselbe übertragen wird.

Es werde nun schließlich noch die Wellenfläche bestimmt.

Die Zeit, welche die Bewegung braucht, um vom Centrum zu einem Punkte (y, x) zu gelangen, ist

$$t = \int_0^y \frac{ds}{c} = \frac{\sin \alpha_0}{c_0} \int_0^x \frac{dx}{\sin^2 (\alpha_0 - ax)} = \frac{\sin \alpha_0}{a c_0} \cotg (\alpha_0 - ax) \Big|_0^x$$

also

$$(12) \quad t = \frac{1}{a c_0} \sin \alpha_0 [\cotg (\alpha_0 - ax) - \cotg \alpha_0] = \frac{1}{a c_0} \frac{\sin ax}{\sin (\alpha_0 - ax)}.$$

Um hieraus die Meridiane der Wellenflächen zu bestimmen, muss aus (10') und (12) α_0 eliminiert werden, wobei t als constant zu betrachten ist. Löst man (12) nach $\sin \alpha_0$ auf, so erhält man

$$\sin \alpha_0 \cos ax - \cos \alpha_0 \sin ax = \frac{\sin ax}{a c_0 t},$$

oder

$$\cos^2 \alpha_0 \sin^2 ax = \frac{\sin^2 ax}{(a c_0 t)^2} - \frac{2 \sin ax \cos ax \sin \alpha_0}{a c_0 t} + \sin^2 \alpha_0 \cos^2 ax,$$

also

$$\sin^2 \alpha_0 - 2 \sin \alpha_0 \frac{\cos ax \sin ax}{a c_0 t} = \sin^2 ax \left(1 - \frac{1}{(a c_0 t)^2} \right),$$

und hieraus

$$\sin \alpha_0 = \frac{\cos ax \sin ax}{a c_0 t} \pm \sqrt{\sin^2 ax - \frac{\sin^4 ax}{(a c_0 t)^2}}.$$

Man kann leicht nachweisen, dass hiebei bloß der positive Wurzelwert der Gleichung genügt. Da nämlich

$$\left(\frac{\sin ax}{a c_0 t} \right)^2 = \sin^2 (\alpha_0 - ax)$$

ist, so wird

$$\sin \alpha_0 = \cos ax \sin (\alpha_0 - ax) \pm \sin ax \cos (\alpha_0 - ax).$$

Wie man sieht, muss in obigem Ausdrucke das positive Zeichen gesetzt werden, damit die oben entwickelte algebraische Summe $\sin \alpha_0$ ergibt. Die Gleichung der Wellenflächenmeridiane nimmt also die Form an:

$$(13) \quad e^{ay} \left[\frac{\cos ax \sin ax}{ac_0 t} + \sqrt{\sin^2 ax - \frac{\sin^4 ax}{(ac_0 t)^2}} \right] = \frac{\sin ax}{ac_0 t},$$

oder durch $\frac{\sin ax}{ac_0 t}$ dividiert,

$$(13') \quad e^{ay} [\cos ax + \sqrt{ac_0 t - \sin^2 ax}] = 1.$$

Eine etwas einfachere Form erhält man, wenn man quadriert

$$e^{2ay} a^2 c_0^2 t^2 - e^{2ay} \sin^2 ax = 1 + e^{2ay} \cos^2 ax - 2e^{ay} \cos ax,$$

woraus sich ergibt

$$(14) \quad ac_0 t e^{ay} = + \sqrt{1 + e^{2ay} - 2e^{ay} \cos ax}.$$

Da aus den oben entwickelten Gleichungen sowohl $\sin \alpha_0$, wie auch t und y sich als eindeutige Functionen von x ergaben, wird nach der Elimination von $\sin \alpha_0$ die Gleichung zwischen y und x ebenfalls eindeutig bleiben. Hieraus folgt, dass die Gleichung (14) für alle Curvenäste desselben Systems in den vier Quadranten ohne Beschränkung gilt.

Aus den hier entwickelten Resultaten lassen sich einige bemerkenswerte Folgerungen bezüglich jener Erdbeben ziehen, deren Centrum sehr tief liegt, wo also die im Abschnitte 3 gemachten Voraussetzungen wenigstens annähernd zutreffen. Zunächst ist ersichtlich, dass sich das Beben über ein verhältnismäßig kleines Gebiet ausbreiten wird, da der Radius der totalen Verbreitung

$$\frac{\pi}{a}$$

beträgt¹⁾. Die Erschütterung muss eine sehr gewaltige sein, da die Energie des Bebens, die sich sonst über ein großes Gebiet verbreitet hätte, jetzt auf einen kleinen Raum concentrirt bleibt. Da die Oberflächengeschwindigkeit

¹⁾ Würde z. B. in einer Tiefe von 100 km die Geschwindigkeit so zunehmen, dass sie an der Oberfläche etwa 400 m, dort aber etwa 8 km betrüge, so wäre a in km ausgedrückt circa $\frac{1}{40}$, der Radius der Verbreitung circa 120 km; die Verbreitungszeit ist kleiner als 15 Secunden.

$$v = \frac{c_0}{\sin \alpha_0} > c_0$$

ist, erfolgt die Verbreitung über das betroffene Gebiet so rasch, dass die Erschütterung aller Punkte desselben fast momentan eintritt. Thatsächlich ist eine Reihe solcher Erdbeben bekannt¹⁾; viele derselben werden zu den vulkanischen Beben gerechnet, und ihre Herdtiefe wird aus geologischen Gründen als sehr gering angenommen. Vom physikalischen Standpunkte wäre eine solche Annahme bei Beben von dem beschriebenen Charakter nicht nothwendig, sondern ihr charakteristischer Verlauf würde sich auch unter der Voraussetzung einer großen Herdtiefe bei bedeutender Zunahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach dem Erdinnern erklären lassen.

Die hier geführten Untersuchungen beziehen sich nur auf die Isochronen; gerade diese sind aber aus den Erdbebenberichten mangels genauer Zeitangaben äußerst ungenau zu constatieren, da nicht nur die Zeiten allein, sondern auch die Lage der Orte, wo dieselben beobachtet werden, in Betracht käme, wenn nicht bloß ein punktförmiges, sondern ein linienförmiges Centrum vorhanden ist. Gerade diese Curven würden sich aber infolge ihrer einfacheren Form viel besser zur Bestimmung der Herdtiefe eignen als die genauer constatierbaren Isoleismen, da bei letzteren die Amplituden durch die Verbreitung der Stoßstrahlecurven, durch die Absorption von Energie infolge innerer Reibung und endlich durch stetige Reflexion an den continuierlich sich ändernden Schichten einer weit bedeutenderen Complication und Unsicherheit in den Rechnungen unterliegen, als die Zeitcurven der Verbreitung.

¹⁾ Beispiele hiefür sind die beiden Erdbeben von Ischia in den Jahren 1881 und 1883, welche in einem sehr heftigen Stöße von so geringer Ausbreitung bestanden, dass derselbe in Rom kaum mehr wahrgenommen wurde.