BIBLIOTECA

DEL

CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

PUBBLICAZIONI INVIATE DAGLI AUTORI (*)

M. L. Albeggiani (Palermo). Sviluppo d' un determinante ad elementi polinomi, due note. *Giornale di Battaglini*, vol. X, XIII.

Dimostrazione d'una formola d'analisi di F. Lucas, *ibid.*, vol. XIII.

Geometria dello spazio in coordinate tetraedriche secondo i concetti delle *Vorles. über Geom. di A. Clebsch*, Palermo, 1877.

Intorno ai concetti ed ai metodi fondamentali della Geometria analitica. Prolusione, Palermo, 1878.

G. Battaglini (Roma). Sopra alcune proprietà delle superficie di secondo grado, 1857.

Sulla dipendenza scambievole delle figure. *R. Acc. del'e scienze fisiche e matematiche di Napoli.*

Sulla partizione dei numeri, *ibid.*

Sopra alcune proprietà delle linee di 2° grado, *ibid.* 1862.

Sulle superficie di 2° grado, *ibid.* 1862.

Nota sopra alcune quistioni di Geometria, *ibid.* 1862.

Nota di geometria, *ibid.* 1862.

Sulle forme geometriche, *ibid.* 1862.

Nota sui determinanti, *ibid.* 1862.

Sopra una questione di massimi e minimi, *ibid.* 1863.

Sulle serie di curve d' indice qualunque, *ibid.* 1863.

Sulla dipendenza equianarmonica, *ibid.* 1863.

Sulla dipendenza di primo ordine, *ibid.* 1863.

Sulle involuzioni dei diversi ordini, *ibid.* 1863.

Sulla dipendenza duplo-anarmonica, *ibid.* 1863.

(*) Nelle sedute del Circolo si è dato annunzio delle pubblicazioni contenute in questo Elenco, a misura che sono state ricevute.

G. Battaglini (Roma). Teoria elementare delle forme geometriche. *Giorn. di Battaglini,* t. 1, 1863.

Sulle divisioni omografiche immaginarie. *R. Acc. di Napoli,* 1864.

Sulle forme binarie di 1° e di 2° grado, *ibid.* 1864.

Sulle forme binarie di 3° grado, *ibid.* 1864.

Sulle forme binarie cubiche, *ibid.* 1864.

Sulle forme binarie di 4° grado, *ibid.* 1864.

Sulle forme binarie biquadratiche, *ibid.* 1864.

Sulle forme binarie biquadratiche in involuzione, *ibid.* 1864.

Sulle forme binarie miste di 3° e 4° grado, *ibid.* 1864.

Sopra una curva di 3ª classe e di 4° ordine, *ibid.* 1865.

Sulle forme geometriche di 2ª specie, *ibid.* 1865.

Sulle forme geometriche di 2ª specie, *ibid.* 1865. Nota 2ª.

Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di 2ª specie, *ibid.* 1865.

Sulle forme binarie dei primi quattro gradi appartenenti ad una forma ternaria quadratica, *ibid.* 1865.

Intorno ai sistemi di rette di primo ordine, *ibid.* 1866.

Intorno ai sistemi di rette di secondo grado, *ibid.* 1866.

Sulle forme binarie dei primi quattro gradi, appartenenti ad una forma ternaria quadratica. Nota seconda, *ibid.* 1866.

— — Nota terza, *ibid.* 1866.

Osservazione intorno ad una formola relativa all' elettrometro bifiliare, *ibid,* 1866.

Intorno ai momenti geometrici di 1° grado. Nota prima, *ibid.* 1866.

Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky, *ibid.* 1867.

Sulle forme binarie di grado qualunque, *ibid.* 1867.

Sulle forme ternarie quadratiche. Memoria prima, *ibid.* 1867.

— — Memoria seconda, *ibid.* 1867.

Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque, *ibid.* 1868.

Sulle forme ternarie di grado qualunque, *ibid.* 1868.

Sulla composizione delle forze, *ibid.* 1869.

Sulla teorica dei momenti, *ibid.* 1869.

Sulle serie di sistemi di forze, *ibid.* 1869.

Sulle dinami in involuzione, *ibid.* 1869.

Sul movimento geometrico infinitesimo d'un sistema rigido, *ibid.* 1870.

Sul movimento geometrico finito d'un sistema rigido, *ibid.* 1870.

Sulla teorica dei momenti d' inerzia, *ibid.* 1871.

Sul movimento di un sistema di forma invariabile, *ibid.* 1871.

Nota intorno alla Conica rispetto alla quale due Coniche date sono polari reciproche tra di loro. *R. Accademia dei Lincei,* 1872.

Nota intorno alla Quadrica rispetto alla quale due Quadriche date sono polari reciproche tra di loro, *ibid.* 1872.

Nota sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle Coniche, *ibid.* 1873.

G. Battaglini (Roma). Nota sui circoli nella Geometria non-euclidea. *R Accademia dei Lincei,* 1873.

Sulla geometria proiettiva. *R. Acc. di Napoli,* 1873.

— Memoria seconda, *ibid.* 1874.

Nota sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche. *R. Acc. dei Lincei*, 1874.

Nota intorno ad una superficie di 8° ordine, *ibid.* 1875.

Sulla quintica binaria, *ibid.* 1875.

Sulla Geometria proiettiva. Memoria terza. *R. Acc. di Napoli*, 1875.

Sull'Affinità circolare non-euclidea, *ibid.* 1876.

Sul movimento per una linea di 2° ordine, *ibid.* 1877.

Sui complessi di secondo grado. *R. Acc. dei Lincei*, 1878.

Sulle cubiche ternarie sizigetiche, 1879. Estratto dal volume *Collectanea Mathematica in memoriam D. Chelini,* Milano 1881.

Sui connessi ternarî di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione semplice. *R. Acc. di Napoli,* 1879.

Sull'equazione differenziale ellittica. *R. Acc. dei Lincei,* 1879.

Sui connessi ternarî di 1° ordine e di 1ª classe. *R. Acc. di Napoli*, 1880.

Sulle forme ternarie bilineari. *R. Acc. dei Lincei*, 1880.

Sulle forme quaternarie bilineari, *ibid.* 1881.

Sopra una quistione di Geometria proiettiva. *R. Istituto d' incoraggiamento alle scienze naturali economiche e tecnologiche in Napoli,* 1882.

Collezione dei primi diciotto volumi del « Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane », 1863-80, Napoli, B. Pellerano Editore.

E. Bertini (Pavia). Libro quinto d'Euclide. Roma, 1874.

Sui complessi di 2° grado. *Giorn. di Batt.*, vol. XVII.

Sui sistemi lineari. *R. Istituto Lombardo,* 12 gennajo 1882.

Costruzioni geometriche della trasformazione univoca di 3° ordine, *ibid.* 23 febbrajo 1882.

Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie di 3° ordine. *Annali di Matematica,* serie 2ª, t. XII.

L. Bianchi (Pisa). Sulle superficie applicabili. Pisa, 1878.

Ricerche sulle superficie a curvatura costante. Pisa, 1879.

Ueber die Normalformen dritter und funfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung. *Math. Annalen*, Band XVII.

Sui sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali. *Giornale di Batt.* vol. XXII.

Sopra una proprietà caratteristica delle superficie ad area minima, *ibid.* XXII.

Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten. *R. Acc. dei Lincei, Rendiconti*, vol I, 15 febbrajo 1885.

— nota seconda, *ibid.* 15 marzo 1885.

Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali, che contengono un sistema di elicoidi aventi a comune l' asse ed il passo. *Annali di Matematica*, serie 2ª, t. XIII, 1885.

F. de Boer (Leiden). Extension du théorème de Rolle. *Archives Néerlandaises*, t. XIX, novembre 1883.

F. Caldarera (Palermo). Sulla determinazione delle latitudini ed azimuti degli oggetti terrestri, e l'equazione di un orologio che va a tempo siderio. *Atti Acc. Gioenia di Catania*, 1854.

Sulla Trigonometria. *Giorn. della R. Specola di Palermo*, 1856.

Sopra una proposizione contenuta nella teoria delle funzioni ellittiche di Legendre. *Giorn. della società di scienze naturali ed economiche in Palermo*, 1865.

Sul teorema di Legendre per la risoluzione dei triangoli sferici pochissimo curvi, *ibid.* 1865.

Dei determinanti a matrice magica, *ibid.* 1866.

Sulla formola comunemente adoperata pel calcolo degli archi di meridiano, Palermo 1866.

Su talune proprietà dei determinanti, in ispecie di quelli a matrici composte con le serie dei numeri figurati. *Giorn. di Batt.*, vol. IX.

Sullo sviluppo delle funzioni a variabili piccolissime, *ibid.* XII.

Lezioni di Meccanica razionale per l' anno sc. 1879-80. Parte litografata: Cinematica—Studio delle forze.

Introduzione allo studio della Geometria superiore, vol. I, Palermo, 1880.

A. Capelli (Palermo). Sopra l' isomorfismo dei gruppi di sostituzioni. *Giorn. di Batt.*, vol. XVI.

Sopra un punto della teoria delle forme binarie, *ibid.* XVI.

Sopra la corrispondenza (2, 2) ossia la forma $f(x^2\ y^2)$ ed i suoi invarianti e covarianti relativi a due trasformazioni lineari indipendenti delle variabili, *ibid.* XVII.

Sopra le forme algebriche ternarie a più serie di variabili, *ibid.* XVIII.

Sopra gli invarianti delle forme algebriche binarie. *Giorn. di Scienze Naturali ed Economiche*, vol. XV, 1880. Palermo.

Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche. *R. Acc. dei Lincei.* Memorie, vol. XII, 5 marzo 1882.

Sul numero dei covarianti di grado dato per forme di qualsivoglia specie. *Giorn. di Batt.*, vol. XX.

Estensione della formola pel numero dei covarianti al caso delle trasformazioni lineari indipendenti. *R. Acc. dei Lincei, Memorie*, vol. XV, 4 marzo 1883.

Alcune formole numeriche in relazione alla teoria delle operazioni di polare. *Giorn di Batt.*, vol. XXI.

Sopra la composizione dei gruppi di sostituzione. *R. Acc. dei Lincei, Memorie*, vol. XIX, 2 marzo 1884.

E. Caporali (Napoli). Sulla superficie del quinto ordine dotata d'una curva doppia del quinto ordine. 6 luglio 1875. *Ann. di Matematica*, serie 2ª, t. VII.

Teoremi sulle curve del terzo ordine—Teoremi sui fasci di curve del terzo ordine. *R. Acc. dei Lincei*, 17 giugno 1877. *Transunti.*

E. Caporali (Napoli). Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer, *R. Acc. dei Lincei*, 2 giugno 1878, Memorie della Classe di scienze fis. mat. e natur. vol. II.

Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado, *ibid.*, *ibid.*

Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane, luglio 1879. Estratto dal volume *Collectanea Mathematica in memoriam Chelini*. Milano, 1881.

Sulle trasformazioni univoche piane involutorie. *R. Acc. delle Scienze Fis. e Matem. di Napoli*, settembre 1879. *Rendiconti.*

Sopra alcuni sistemi di rette, *ibid.*, 11 ottobre 1879. *Rendiconti.*

Sull'esaedro completo, *ibid.*, 5 febbrajo 1881. *Rendiconti.*

Teoremi sulle superficie del 3° ordine, *ibid.*, 7 maggio 1881. *Rendiconti.*

Sulle tangenti condotte ad una curva algebrica piana da un suo punto multiplo, *ibid.*, 11 giugno 1881. *Rendiconti.*

Sopra una certa curva del 4° ordine, *ibid.*, 9 dicembre 1882. *Rendiconti.*

Sul sistema di due forme binarie cubiche, *ibid.* 10 marzo 1883. *Rendiconti.*

Relazione sul concorso pel Premio accademico dell'anno 1882, *ibid.*, dicembre 1883. *Rendiconti.*

F. Casorati (Pavia). Intorno ad alcuni punti della teoria dei minimi quadrati. Roma, 1858.

Teorica delle funzioni di variabili complesse. Volume primo. Pavia, 1868.

Sopra la determinazione delle alterazioni nei valori di somme e prodotti infiniti dovute ad alterazioni nell'ordine di addizione o moltiplicazione dei termini o fattori. *Rendiconti R. Ist. Lomb.*, serie 2ª. vol. I, 1868.

Un teorema fondamentale nella teorica delle discontinuità delle funzioni, *ibid.*

Le relazioni fondamentali tra i moduli di periodicità degli integrali abeliani di 1ª specie. *Ann. di Mat.*, serie 2ª. t. III, 1869.

Alcune formole fondamentali per lo studio delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e 2° grado tra due variabili ad integrale generale algebrica. *R. Istit. Lomb.*, 1874.

Sulla regola seguita da Bessel e dal sig. Generale Baeyer durante la misura del grado nella Prussia orientale, etc. *Atti della R. Acc. dei Lincei*, serie 2ª, t. II, 1875.

Sui determinanti di funzione. Milano, 1875.

Le proprietà cardinali degli strumenti ottici anche imperfettamente centrati.

In memoria di Jacopo Steiner. Traduzione dal tedesco. *Ann. di Mat.* serie 2ª, t. VII, 1875.

Nuova teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali di 1° ordine e 2° grado tra due variabili. *Atti R. Acc. dei Lincei*, serie 2ª t. III. 1876.

Sulle coordinate dei punti e delle rette nel piano, dei punti e dei piani nello spazio. *R. Ist. Lomb.*, 1877.

Sulle condizioni alle quali deve soddisfare una primitiva affinchè il grado della corrispondente equazione differenziale, rispetto alle variabili, riesca minore del normale, *R. Ist. Lomb.*, 1877.

F. Casorati (Pavia). Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 1° grado per mezzo di funzioni lineari, *ibid.*, 1878.

Nuova e migliore forma delle equazioni degli asintoti di una linea piana algebrica, *ibid.*, 1879.

Nota concernente la teoria delle soluzioni singolari delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 2° grado. *R. Acc. dei Lincei*, 1879.

Il calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilità complessa, *ibid.*, 1880.

Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéaires en sous-groupes. *Comptes Rendus*, 24, 31 janvier 1881.

Una formola fondamentale concernente i discriminanti delle equazioni differenziali e delle loro primitive complete. Dal volume *Collectanea Mathematica in mem. Chelini*, Milano, 1881.

Nota di matematica pura. *R. Acc. dei Lincei*, 1881.

Generalizzazione di alcuni teoremi dei signori Hermite, Brioschi e Mittag-Leffler, sulle equazioni differenziali lineari del 2° ordine. *Ann di Mat.* serie 2ª, t. X 1881.

Sur un écrit très-récent de M. Stickelberger. Pavia, 1881.

Sulle equazioni differenziali lineari. *R. Acc. dei Lincei*, 1882.

Aggiunte a recenti lavori dei signori Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa. *Ann. di Mat.* serie 2ª t. X. 1882.

La periodicità multipla nelle funzioni di una sola variabile. *R. Ist. Lomb.* 1883.

Sopra alcuni discriminanti, *ibid.*, 1885.

F. Chizzoni (Roma). Sulle superficie e sulle linee che si ottengono come luogo o come inviluppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti di due curve omografiche piane. *R. Acc. dei Lincei, Memorie*, vol. III, 5 gennajo 1879.

Sopra le involuzioni nel piano, *ibid.* XIX, 3 giugno 1883.

L. Cremona (Roma). Sulle trasformazioni razionali nello spazio. *Annali di Matematica*, serie 2ª, t. V.

R. De Paolis (Pisa). La trasformazione piana doppia di terzo ordine primo genere e la sua applicazione alle curve del quarto ordine. *R. Acc. dei Lincei, Memorie*, vol. II, 5 maggio 1878.

Ricerche sulle superficie del 3° ordine, due Memorie, *ibid.* X, 1881.

Sulla espressione di una forma binaria di grado n con una somma di potenze n^e, *ibid.* XII, 5 marzo 1882.

E. Fergola (Napoli). Sopra talune proprietà delle soluzioni intere e positive dell'equazione $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n$. *Rendiconti della R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli*, ottobre 1863.

E. Fergola (Napoli). Sopra una proposizione elementare di Calcolo integrale. *Rendiconti della R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli*, ottobre 1864.

Sulla posizione dell'asse di rotazione della terra rispetto all'asse di figura. *Annali di Matematica*, serie 2ª, t. VI, 1874.

Dimensioni della terra e ricerca della posizione del suo asse di figura rispetto a quello di rotazione. *Rendiconti della R. Acc. di Napoli*, dicembre 1875.

Di alcune equazioni relative alla teoria delle funzioni ellittiche e teoremi di Geometria che vi si connettono. *Memorie della Società italiana delle Scienze*, vol. IV, 20 maggio 1882.

Sulla latitudine del R. Osservatorio di Capodimonte. *Atti della R. Acc. delle Scienze di Napoli*, vol. I, serie 2ª, 1° dicembre 1883.

G. Frattini (Roma). Intorno ad un teorema di Lagrange. *R. Acc. dei Lincei. Rendiconti*, 1° febbrajo 1885.

Un teorema relativo al gruppo della trasformazione modulare di grado p. Due note, *ibid.* 1 e 15 febbrajo 1885.

Intorno alla generazione dei gruppi di operazione, *ibid.* 12 aprile 1885.

P. Gambera (Palermo). Della velocità e della energia delle molecole dei fluidi aeriformi. Palermo, 1884.

M. Gebbia (Palermo). Sulla stabilità virtuale dell'equilibrio d'un punto materiale isolato. *Giorn. di Batt.* XVI.

Le travature reticolari a membri sovrabbondanti. *Atti del Collegio degli Ingegneri ed Arch. di Palermo*, 1881.

Determinazione grafica degli sforzi interni nelle travature reticolari con aste sovrabbondanti. *R. Acc. dei Lincei, Memorie*, vol. IX, 6 marzo 1881.

Sugli sforzi interni dei sistemi articolati, *ibid.* XIII, 2 aprile 1882.

P. Gordan (Erlangen). Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. *Mathematische Annalen, Band* XII, 1877.

Binare Formen mit verschwindenden Covarianten, *ibid.* XII, 1877.

Ueber das volle Formensystem der ternaren biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$, *ibid.* XVII, 1880.

Gordan-Clebsch. Ueber cubische ternäre Formen, *ibid.* VI, 1873.

G. B. Guccia (Palermo). Sur une classe de surfaces représentables point par point sur un plan. *Association française pour l'avancement des Sciences. Congrès de Reims*, 1880.

G. Halphen (Paris). Sur certaines perspectives gauches des courbes planes algébriques. *Comptes Rendus*, 15 mars 1875.

Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre. *Acta Mathematica*, III.

Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Appendice au Traité des courbes planes de G. Salmon. Paris, Gauthier-Villars, 1883.

T. A. Hirst (London). Ueber conjugirte Diameter im dreiaxigen Ellipsoid. *Inaugural-Dissertation*. Marburg, 1852.

T. A. Hirst (London). On two new methods of defining Curves of the second order, together with new properties of the same deducible therefrom. By Professor Steiner. Translated by Dr. T. A. Hirst. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, nov. 1853.

On equally attracting bodies. *From the Philosophical Magazine* for sept. and oct. 1858.

M. Poinsot on the Percussion of Bodies, *ibid.*

Note sur les corps qui exercent des attractions égales sur un point matériel. *Comptes Rendus,* XLVII, 9 août, 1858.

Sur la courbure d'une série de surfaces et de lignes. *Annali di Matematica,* t. II, 1859.

On derived Surfaces. *Quarterly Journal*, july 1859.

On ripples, and their relation to the velocities of currents. *Philosophical Magazine* for january and march 1861.

On the Volumes of Pedal Surfaces. *Proceedings of the Royal Society,* 1862.

On the Volumes of Pedal Surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 153, 1862.

Sur les volumes des surfaces podaires. *Crelle's Journal,* Band. 62.

Sur les volumes des surfaces podaires. *Annali di Matematica,* t. V, 1863.

On normals to conics, a new treatment of the subject. By Prof. Cremona. Communicated by T. A. Hirst. *The Oxford, Cambridge, and Dublin Messenger of Mathematics,* No. 10, 1865.

Sull' inversione quadrica delle curve piane. *Annali di Matematica,* t, VII, 1865.

Discorso pronunziato dall' Autore in occasione del conferimento della medaglia Copley a M. Chasles. *Proceedings of the Royal Society* No. 79, 1865.

Sur la transformation quadrique. *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2ᵉ série, t. VI, 1866.

On the degenerate Forms of Conics. *Proceedings of the London Mathem. Society,* vol. II, 1869.

On the Correlation of two Planes. Due memorie, *ibid.* vol. V, 1874; vol. VIII, 1877.

On the Correlation of two Planes. Due memorie. *Annali di Matematica*, serie 2ª, t. VI, VIII.

On Correlation in Space. *Proceed. London Mathem. Society,* vol. VI, 1874.

Geometrical Contributions to the « Educational Times ». London, 1875.

Sur la Corrélation de deux plans. *R. Acc. dei Lincei, Transunti,* Serie 3ª, vol. I, 4 marzo 1877.

Extracted from the Sixth General Report of the *Association for the Improvement of Geometrical Teaching,* january 1878.

Note on the Complexes generated by two Correlative Planes. *Proceed. of the London Mathem. Society,* vol. X, 1879.

On the Complexes generated by two Correlative Planes. *Collectanea Mathematica in memoriam Chelini, Mediolani,* 1881.

T. A. Hirst (London). On quadric Transformation. *Quarterly Journal,* N. 68, 1881.

« The Biograph and Review », september 1881.

On Cremonian Congruences. *Proceed. of the London Mathem. Society*, volume XIV, 1883.

E. de Jonquières (Paris). De la représentation des nombres par des formes quadratiques binaires. Application à l'analyse indeterminée. *Assoc. franç. pour l'avanç. des Sciences, Congrès de Paris,* 1878.

Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques. *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences,* 26 février 1883.

Sur la composition des périodes des fractions continues périodiques, *ibid.* 12 mars 1883.

Addition aux Communications précédentes sur les fractions continues périodiques, *ibid.* 26 mars 1883.

Loi des périodes. Trois Communications, *ibid.* 9, 16, 23 avril 1883.

Sur les fractions continues périodiques dont les numerateurs diffèrent de l'unité. *ibid.* 30 avril 1883.

Étude des identités qui se présentent entre les reduites appartenant, respectivement, aux deux modes de fractions continues périodiques—Cinq Communications, *ibid.* 7, 14, 21, 28 mai, 4 juin 1883.

Sur le dernier théorème de Fermat. *Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei,* t. 37, 20 gennaro 1884.

Commentaire arithmétique sur une formule de Gauss. *Comptes Rendus,* 2 juin 1884.

Sur la règle de Newton (démontrée par M. Sylvester), pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations numériques, *ibid.* 14, 21, 28 juillet 1884.

Sur les équations algébriques, *ibid.* 15, 22 septembre 1884.

Mémoire sur les figures isographiques et sur un mode uniforme de génération des courbes à double courbure d'un ordre quelconque au moyen de deux faisceaux correspondants de droites. *Giornale di Battaglini*, vol. XXIII, 1885.

Il Vice-Ammiraglio de Jonquières ha inoltre inviato la sua fotografia colla dedica al Circolo.

C. Jordan (Paris). Recherches sur les polyèdres. *Journal de Crelle*, t. 66, 1866.

Recherches sur les polyèdres. Second mémoire, *ibid.* t. 68, 1868.

Mémoire sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants. *Annali di Matematica,* 1868.

Commentaire sur Galois. *Mathematische Annalen,* t. I, 1869.

Sur les équations de la division des fonctions abéliennes, *ibid.* t. I, 1869.

Théorèmes sur les équations algébriques. *Journal de Liouville*, 2e série, t. XIV, 1869.

Sur l'équation aux 27 droites des surfaces du 3ème ordre, *ibid.* 1869.

Sur les assemblages de lignes. *Journal de Crelle,* t. 70, 1869.

C. Jordan (Paris). Sur une équation du 16ème degré. *Journal de Crelle,* t. 70, 1869.

Sur une nouvelle combinaison des 27 droites d'une surface du 3ème ordre. *Comptes Rendus,* t. 70, 1870.

Théorème sur les fonctions doublement périodiques, *ibid.* 1870.

Théorèmes sur les groupes primitifs. *Journ. de Liouville,* 2e série, t. XVI, 1871.

Sur la résolution des équations les unes par les autres. *Comptes Rendus,* 1871.

Sur les sommes de Gauss à plusieurs variables, *ibid.* 1871.

Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels, *ibid.* 1872.

Recherches sur les substitutions. *Journ. de Liouville,* 2e série, t. XVII, 1872.

Sur la forme canonique des congruences du second degré et le nombre de leurs solutions, *ibid.*

Mémoire sur la réduction et la transformation des systèmes quadratiques, *ibid.* t. XIX, 1874.

Sur la limite du degré des groupes primitifs qui contiennent une substitution donnée. *Journal de Crelle,* t. 79, 1874.

Sur la stabilité de l'équilibre d'un solide pesant posé sur un appui courbe. *Journal de Liouville,* 3e série, t. I, 1875.

Mémoire sur les covariants des formes binaires, *ibid.* 3e serie, t. II, 1876.

Mémoire sur les caractéristiques des fonctions Θ. *Journal de l' École Polytechnique,* 1879.

Sur les covariants des formes binaires, deuxième mémoire. *Journ. de Liouville,* 3e série, t. V, 1879.

Sur la réduction des substitutions linéaires. *Journ. de l'École Polytechnique,* 1880.

Mémoire sur l'équivalence des formes, *ibid.* 1880.

Sur la théorie arithmétique des formes quadratiques, *ibid,* 1882.

G. Jung (Milano). Sopra alcuni teoremi di Gauss intorno alla teorica della ripartizione del circolo. *Assoc. delle conferenze di Matematiche,* 24 giugno 1867.

Jung-Armenante. Sulle trasformazioni birazionali o univoche (eindeutigen) e sulle curve normale e subnormale del genere *p. Giornale di Battaglini,* volume VII, 1869.

— Relazione sulle lezioni complementali date nel R. Istituto Tecnico superiore di Milano dai prof.i Brioschi, Cremona e Casorati, *ibid.*

G. Jung (Milano). Intorno ai momenti d' inerzia di una sezione piana e ai diversi modi di rappresentarli graficamente; in particolare dell'ellisse centrale, della sua curva pedale e del circolo d' inerzia. *Rendiconti dell' Istituto Lombardo,* 29 luglio 1875

Rappresentazioni grafiche dei momenti resistenti di una sezione piana, *ibid.* 6 luglio 1876.

Complemento alla nota precedente, *ibid.* 8 agosto 1876.

On a new Construction for the Central Nucleus of a Plane Section. *British Association for the Advanc. of Science,* 1876.

Résumé of Researches upon the Graphical Representation of the Moments of Resistance of Plane Figures, *ibid.* 1876.

G. Jung (Milano). Théorème général sur les fonctions symétriques d'un nombre quelconque de variables. *Comptes Rendus des séances de l' Acad. des Sciences* 24 avril 1876.

Construction de la chainette par points, et division d'un arc de cette courbe en *n* parties proportionnelles à des ségments donnés. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. IV, avril 1876.

Intorno alla dimostrazione di un teorema fondamentale della teoria de' poli e polari nella « Geometria Projettiva » del Prof. L. Cremona. *Giornale di Battaglini*, vol. XIV, 1876.

Jung-Bertini-Saviotti. « Lezioni di Statica Grafica per Antonio Favaro ». Cenno critico. *Politecnico*, vol. XXVI.

G. Jung (Milano). Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité. *Bulletin de la Société Math. de France*, t. VII, 1878.

Elementi di Geometria Descrittiva del Dr. R. Sturm, traduzione dal tedesco. Hoepli, Milano, 1878.

Sul problema inverso dei momenti d' inerzia di una sezione piana. Soluzione grafica generale - Due note. *Politecnico*, anno XXIV, Milano.

Soluzione geomeccanica di alcuni problemi d' interpolazione. *Rendiconti dell' Istit. Lombardo*, 15 aprile 1880.

Compensazione degli *errori proporzionali* per un dato sistema di osservazioni dirette, *ibid.* 29 aprile 1880.

Intorno al principio della media aritmetica. *Politecnico*, vol. XXIX, 5 dicembre 1880.

Sui momenti *obliqui* di un sistema di punti e sull' « imaginäres bild » di Hesse. *Collectanea Mathem. in mem. Chelini*, aprile 1881.

Alcuni teoremi sulle forme degeneri dell'ellissoide del Culmann. *Rendiconti dell' Istit. Lombardo*, 23 febbrajo 1882.

Sul Pseudofoco del paraboloide e sul centro magnetico, *ibid.* 15 giugno 1882.

Alcuni teoremi baricentrici, *ibid.* 6 luglio 1882.

Osservazioni ed aggiunte alla nota precedente. *ibid.* 14 dicembre 1882.

Sui sistemi privi di baricentro, *ibid.* 31 maggio 1883.

Nuovi teoremi a complemento della regola di Guldin e proprietà della spirale $r = a \dfrac{\operatorname{sen} \Theta}{\Theta}$. *R. Acc. dei Lincei, Transunti*, vol. VII, 1883.

Sull'equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni. *Annali di Matematica*, serie 2ª, t. XII, Milano 1884.

Sopra una classe di configurazioni d' indice 3. *Rendiconti dell' Istituto Lombardo*, 12 febbrajo 1885.

Di alcune proprietà geometriche, statiche e cinematiche dei poligoni articolati, *ibid.* 12 marzo 1885.

F. Klein (Leipzig). Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe. *Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, 14 november 1884.

G. Maisano (Palermo). Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica e degl'invarianti, covarianti e controvarianti di sesto grado. *Giorn. di Batt.* vol. XIX.

G. Maisano (Palermo). Sulla forma binaria di quinto ordine. *R. Acc. dei Lincei, Memorie*, vol. XIV, 7 gennajo 1883.

Sopra due classi di forme binarie, *ibid.* XV, 18 marzo 1883.

La sestica binaria, *ibid.* XIX, 3 febbrajo 1884.

A. Mannheim (Paris). Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique. *Comptes Rendus*, mai 1870.

Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite que l'on déplace en l'assujetissant à certaines conditions, *ibid.*, juin 1870.

Construction de l' axe de courbure de la surface développable enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions, *ibid.* juin 1870.

Généralisation du théorème de Meusnier, *ibid.* février 1872.

Détermination de la liaison géométrique qui existe entre les éléments de la courbure des deux nappes de la surface des centres de courbure principaux d'une surface donnée, *ibid.* février 1872.

Recherches géométriques sur le contact du 3e ordre de deux surfaces, *ibid.* mars 1872.

Construction directe du rayon de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface qu'on projette orthogonalement sur un plan, *ibid.* avril 1874.

Détermination des relations analytiques qui existent entre les éléments de courbure des deux nappes de la développée d' une surface, *ibid.* décembre 1874.

Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions. *Journ. de Math.* 3e série, t. I, 1875.

Solutions géométriques de quelques problèmes, relatifs à la théorie des surfaces, et qui dépendent des infiniment petits du 3ème ordre, *Comptes Rendus*, mars 1875.

Solutions géométriques de nouveaux problèmes relatifs à la théorie des surfaces et qui dependent des infiniment petits du 3ème ordre, *ibid.*, mars 1875.

Note à l'occasion de la Communication faite par M. Ribaucour dans la séance du 15 mars 1875, *ibid.*, 22 mars 1875.

Nouvelles propriétés géométriques de la surface de l'onde, qui s'interpretent en Optique, *ibid.*, 7 février 1876.

Démonstration géométrique d'une relation due a M. Laguerre, *ibid.*, 6 mars 1876.

Construction pour un point de la courbe d' intersection de deux surfaces du centre de la sphère osculatrice de la courbe, *ibid.*, 27 novembre 1876.

Sur le paraboloïde des huit droites, *ibid.*. 2 avril 1877.

Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre, *ibid.*, 30 avril 1877.

A. Mannheim (Paris). Sur le déplacement infiniment petit d'un dièdre de grandeur invariable; deux notes, *Comptes Rendus*, 11 juin, 23 juillet 1877.

Sur les plans tangents singuliers de la surface de l'onde et sur les sections faites dans cette surface par des plans parallèles à ces plans tangents. *Assoc. franç. pour l'avanc. des Sciences, Congrès du Havre*, 24 août 1877.

Sur la surface de l'onde, *ibid.*, 25 août 1877.

Sur les normales de la surface de l'onde, *ibid.*, 27 août 1877.

Nouveau mode de représentation plane de classes de surfaces réglées; trois notes. *Comptes Rendus*, 29 octobre, 5, 19 novembre 1877.

Sur les surfaces réglées. *Journ. de Math.* 3[e] série, t. IV, février 1878.

De l'emploi de la courbe représentative de la surface des normales principales d'une courbe gauche pour la démonstration de propriétés relatives à cette courbe. *Comptes Rendus*, 20 mai 1878.

Sur la surface de l'onde. *Ass. franç. pour l'av. des Sciences, Congrès de Paris*, 24 août 1878.

Transformation par polaires réciproques d'un pinceau de normales et extensions, *ibid.*, 27 août 1878.

Construction de la normale à la surface trajectoire d'un point d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions, *ibid.*, 28 août 1878.

Construction des centres de courbure principaux de la surface de vis à filet triangulaire, *ibid.*, 29 août 1878.

Construire les axes d'une ellipse, étant donnés deux diamètres conjugués. *Nouvelles Annales de Math.*, 2[e] série, t. XVII, 1878.

Détermination géométrique des ombilics de la surface de l'onde. *C. R.*, 5 mai 1879.

Constructions planes des éléments de courbure de la surface de l'onde. *Extrait du volume in memoriam D. Chelini*, juillet 1879.

La surface de l'onde considérée comme surface limite. *C. R.*, 26 avril 1880.

Nouvelle génération de la surface de l'onde et constructions diverses, *ibid.*, 7 juin 1880.

Notice sur les travaux géométriques de A. Mannheim. Paris, 1881.

Sur la détermination, en un point d'une suface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. *Journ. de Math.*, 3[e] série, t. VIII, mai 1882.

U. Masoni (Napoli). Sopra alcune curve del quarto ordine dotate di punti d'ondulazione. *R. Acc. di Napoli*, 4 febbrajo 1882.

Sui connessi conici ed in' particolare sui sistemi di rette del 2° ordine, *ibid.*, aprile 1883.

Sull'urto dei corpi e sul movimento d'un corpo pesante fra due mezzi resistenti, *ibid.*, marzo 1884.

Sulle derivate d'ordine qualunque della funzione potenziale quando l'attrazione è proporzionale all' inverso della n^{ma} potenza della distanza, *ibid.*, 14 giugno 1884.

U. Masoni (Napoli). Sulle forze impulsive che hanno la medesima azione sopra uno stesso punto di un sistema rigido, *R. Acc. di Napoli,* luglio 1884.

G. Mittag-Leffler (Stockholm). Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. *Acta Mathematica,* IV.

M. Noether (Erlangen). Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln. *Götting. Nachrichten,* 1869.

Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. *Math. Annalen,* Band II, 1870.

Ueber Flachen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen, *ibid.*, III, 1871.

Sulle curve multiple di superficie algebriche. *Annali di Matematica*, serie 2ª, t. V, 1871.

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde. *Math. Annalen,* Band VII, 1873.

Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Zus. mit Brill, *ibid.,* VII, 1874.

Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. Zweiter Aufsatz, *ibid.,* VIII, 1875.

Otto Hesse. *Zeitschrift fur Math. und Physik von Schlömilch,* 20 Jahrgang 1875.

Ueber die algebraischen Formen mit identisch verschwindender Hesse'scher Determinante. *Sitzungsb. physik. medic. Societät zu Erlangen*, 1876.

Zur Eliminationstheorie. *Math. Ann.,* XI, 1877.

Zur Theorie der Thetafunctionen von vier Argumenten, *ibid.,* XIV, 1879.

Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten, *ibid.*, XVI, 1880.

Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen, *ibid.,* XVII. 1880.

Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen. *Journal für Mathematik,* Bd. XCII, 1881.

Note über die algebraischen Curven, welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich zulassen. *Math. Ann* , XX, 1882.

Nachtrag zur « Note uber die algeb. Curven mit einer Schaar eindeutiger Transformationen in sich. », *ibid.*, XXI, 1883.

A. Pepoli (Palermo). Sopra un problema delle trasformazioni Cremoniane. *Atti del Collegio degli Ingegneri ed Arch. di Palermo,* 1884.

G. Pittaluga (Palermo). Degli assi elastici. *Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino,* XIV, 6 aprile 1879.

P. H. Schoute (Groningen). Homographie et son application à la théorie des surfaces du second ordre. *Archives Néerlandaises,* t. VI, 1871.

Over eene bijzondere ruimtekromme van den zevenden graad.

De la projection sur une surface. *Assoc. franç pour l' avanc. des Sciences* , *Congrès de Montpellier*, 1879.

Sur les courbes tracées sur une surface du second ordre, *ibid.*

Sur la transformation conjuguée, *ibid.*

Schoute-Dewulf. Déterminer une courbe unicursale de 4ème ordre ayant des points doubles en A_1 et A_2, et passant par les sept points 1', 2', 3, 4, 5, 6 et 7, *ibid.*

P. H. Schoute (Groningen). Sur une transformation géométrique et sur la généralisation d'un problème de la théorie des enveloppes dites «Courbes de sureté ». *Congrès de Reims,* 1880.

De la transformation conjuguée dans l'espace, *ibid.*

De Kegelsneden in de projectivische meetkunde. Groningen, 1881.

Deux cas particuliers de la transformation birationnelle. *Bulletin de Darboux,* 2e série, t. VI, 1882.

Die Steinerschen Polygone. *Journal de Crelle,* 95, 1883.

Nachtrag zur Abhandlung « Die Steinerschen Polygone », *ibid.*

Application de la transformation par droites symetriques à un problème de Steiner. *Bulletin de Darboux,* 2e serie, t. VII, 1883.

Sur deux transformations géométriques uniformes. *Congrès de Rouen,* 1883.

Nachtrag zur Abhandlung « Die Steinerschen Polygone, *Crelle,* 95.

Notiz über die Lemniscate, *Sitzb. der Wiener Akad. der Wissensch.,* 1883.

Einige Bemerkungen über das Problem der Glanzpunkte, *ibid.*

Over een bijzondere kromme van den vierden graad met drie dubbelpunten. *K. Akad. van Wetensch.,* Amsterdam, 1884.

Quelques théorèmes géométriques. *Congrès de Blois,* 1884.

Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes. *Archives Néerlandaises,* t. XX.

Scuola di applicazione per gl'Ingegneri di Roma. Catalogo della Biblioteca. Supplementi · 1°, 2°, 3°.

G. Torelli (Napoli). Sulle funzioni simmetriche complete e semplici. *Giorn. di Batt.* vol. V, 1867.

Di alcuni integrali formati dagl' integrali ellittici e di qualche loro applicazione, *ibid.* XI, 1873.

Moltiplicazione grafica delle rette e trasformazione grafica delle figure piane, etc. Napoli, 1875.

Sei lezioni di geometria descrittiva. Napoli 1877.

Sopra alcune proprietà numeriche. *Giorn. di Batt.,* XVI, 1878.

Versione dal tedesco di una nota di G. Fiedler: Sulla riforma dell' insegnamento geometrico, seguita da tre lettere inedite dell' autore, *ibid.* XVI, 1878.

Commemorazione di G. Bellavitis. *Atti dell'Acc. Pontaniana.*

Sui determinanti circolanti. *R. Acc. di Napoli,* aprile 1882.

Commemorazione di N. Trudi. *Atti dell'Acc. Pontaniana,* vol. XVI.

Tre lezioni di geometria elementare. Napoli 1884.

Un problema sulle espressioni differenziali, *Annali di Matem.*, serie 2^a, t. XIII, 1884.

Collezione di sedici memorie e note di diversi Autori.

C. Stephanos (Athènes). Mémoire sur la théorie des formes binaires et sur l'élimination. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris*, Juillet 1884.

V. Volterra (Pisa). Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale. Pisa 1883.

Sulle figure elettrochimiche di A. Guébhard. *Atti della R. Acc. di Torino*, vol. XXIII, 11 febbraro 1883.

Sopra un problema di elettrostatica. *R. Acc. dei Lincei*, *Transunti*, 15 giugno 1884.

SEDUTA DEL 5 APRILE 1885

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

Comunicazioni:

A. Capelli osserva che il teorema enunciato nella nota del sig. Hermite: *Sur les fonctions holomorphes* (*) non deve considerarsi come nuovo, ma che solo si dà di esso una nuova dimostrazione. Esso può ricavarsi, con dimostrazione semplice, dal teorema, richiamato dallo stesso Hermite, che una funzione olomorfa il cui modulo resta finito per ogni valore della variabile è una costante. Un teorema analogo, più generale, di cui questo è conseguenza, fu dimostrato da Schwarz nella Memoria: *Ueber die Integration der Differentialgleichung* $\Delta^2 u = o$ (Borchardt's Journal, Bd. 74), cioè, che una funzione u la quale nell' interno di un cerchio di raggio R, grande quanto si vuole, soddisfa all'equazione $\Delta^2 u = o$ ed è monodroma finita e continua insieme alle sue prime derivate, ed ha le seconde derivate finite, e la quale inoltre sia tale che il suo valore per quanto cresca R resta inferiore in valore assoluto ad una grandezza finita g (indipendente da R), è una costante. Lo stesso Autore conclude che analogamente si può dimostrare che, essendo $u(r, \varphi)$ l'espressione di u in coordinate polari, se $\frac{u(r, \varphi)}{r^n}$ resta finita in tutto il piano, oltre a soddisfare alle solite condizioni, allora $u(r, \varphi)$, considerata come funzione di x e di y, è un polinomio intero di grado n in x ed in y.

Questi teoremi si estendono immediatamente ad un numero qualunque di variabili.

(*) *Journal de Jordan*, I_4, 1885. Vedi « Rivista bibliografica » seduta 22 marzo 1885 (p. 28).

SEDUTA DEL 19 APRILE 1885

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

Comunicazioni:

P. Gambera ritorna sulla coerenza dei corpi e sulle formole

$$\frac{k}{k'} = \frac{c\,d\,\delta'}{c'd'\delta},\quad \frac{P\,c\,t}{P'c't'} = \frac{P\,k\,d'\delta\,t}{P'k'd\delta't'} = \frac{k\,\frac{P}{d}\,\delta t}{k'\,\frac{P'}{d'}\,\delta't'} = \frac{k\,v\,\delta\,t}{k'v'\delta't'}$$

mostrando la relazione fra la coerenza e la dilatabilità termica dei corpi e le calorie di riscaldamento necessarie per produrre un certo aumento di temperatura.

SEDUTA DEL 10 MAGGIO 1885

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

Comunicazioni:

G. Maisano comunica alcune sue ricerche sul gruppo di punti situati sull' Hessiana di una curva di ordine n, le cui tangenti toccano la Cayleyana; trova che siffatto gruppo costituisce la completa intersezione dell' Hessiana colla curva dell'ordine $8n - 18$:

$$V \equiv (abH)(abH')\, a_x^{n-2}\, b_x^{n-2}\, H_x^{3n-7}\, H'^{3n-7}_x = 0 \qquad (1)$$

ove $a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots = 0$ rappresenta simbolicamente la curva fondamentale e $H_x^{3n-6} = H_x'^{3n-6} = \ldots = 0$ la sua Hessiana.

Pel caso particolare che la curva fondamentale sia del 4° ordine, perviene alla curva del 14° ordine:

$$2H_\theta\, H'_\theta\, H_x^5\, H_x'^5\, \Theta^4 - 5\Theta_x^4\, H_\theta^2\, H_x^4\, H_x'^6 = 0 \qquad (2)$$

ove è posto

$$\Theta_x^4 u_\theta^2 = (abu)^2 a_x^2 b_x^2.$$

La curva (2) che taglia sull'Hessiana i 6.14 punti, le cui tangenti toccano la Cayleyana, è la stessa curva che sega la curva fondamentale $f = 0$ nei punti di contatto delle sue tangenti doppie, come risulta dal calcolo delle stesso Autore, fondato sopra i risultati ottenuti nella di lui Memoria *Sui sistemi completi dei primi cinque gradi*, etc. pubblicata nel *Giornale di Battaglini,* vol. XIX.

Proposta di quesiti:

G. B. Guccia legge il seguente problema comunicatogli, con lettera privata, dal Prof. P. H. Schoute, dell'Università di Groninga:

On donne une surface quadrique S *à centre* C *et un plan* P *perpendiculaire à un des axes* AA' *de la surface au point milieu* B *de* CA'. *Si d'un point quelconque de l'espace representé par* M_{2n} *on parvient au point* M_{2n+1} *correspondant, en cherchant sur le droite* CM_{2n} *le point conjugué à* M_{2n} *par rapport à* S, *et d'un point quelconque* M_{2n+1} *au point* M_{2n+2} *correspondant, en prenant le point symétrique de* M_{2n+1} *par rapport à* P, *on demande à démontrer que* $M_{m+6} \equiv M_m$ *pour chaque point* M_m *de l'espace et de chercher le lieu des points pour lesquels* $M_{m+2} \equiv M_m$, *pour lesquels* $M_{2n+3} \equiv M_{2n}$ *ou pour lesquels* $M_{2n+4} \equiv M_{2n+1}$.

SEDUTA DEL 17 MAGGIO 1885

PRESIDENZA P. GAMBERA

Comunicazioni:

F. Cavallaro espone alcuni suoi studi sopra una corrispondenza birazionale d'ordine n fra due spazi a tre dimensioni, da lui ottenuta con particolare procedimento di ripetizione di una stessa trasformazione quadratica.

G. B. Guccia aggiunge brevi osservazioni.

A. Capelli si occupa della soluzione del problema del Professor Schoute, letto nella seduta precedente dal Dr. Guccia.

Ne segue discussione a cui prendono parte i soci Pepoli e Guccia; in seguito alla quale il socio Capelli si riserba di ritornare sull'argomento.

SEDUTA DEL 31 MAGGIO 1885

PRESIDENZA G. MAISANO

Comunicazioni:

A. Capelli ritorna sulla soluzione del problema del Professore Schoute (vedi seduta precedente) e lo formula nei termini seguenti:

Se si indica con Ω *la trasformazione piana per cui da un punto* P *si passa al punto* P', *coniugato di* P *rispetto ad una conica fissa* C, *sopra la retta che congiunge* P *col centro della conica, e con* Ω' *la trasformazione dello stesso piano per cui da un punto* P *si passa ad un punto* P', *simmetrico di* P *rispetto ad una retta parallela ad uno dei due assi della conica e passante pel punto di mezzo dell'altro semi-asse; se ad un punto* M_1 *qualsivoglia si applicano successivamente le 6 trasformazioni* Ω, Ω', Ω, Ω', Ω, Ω', *si dedurranno da* M_1 *altri 6 punti* M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, *successivamente, l'ultimo dei quali* M_7 *coincide sempre col punto di partenza* M_1.

Per venire alla soluzione del detto problema comincia dallo esporre alcune considerazioni generali sopra i problemi geometrici che ammettono un numero infinito di soluzioni.

Osserva in particolare che in Geometria si possono enunciare alcuni problemi per modo che essi non ammettono alcuna soluzione, ovvero ne ammettono un numero infinito: nel mentre che questi stessi problemi espressi algebricamente darebbero luogo in generale ad un numero finito k di soluzioni. Ciò invero accade perchè il problema geometrico è di natura tale da ammettere *sempre k* soluzioni *improprie*, le quali esauriscono le k soluzioni date dall'Algebra, quindi se esse sono tali da ammettere almeno ancora una soluzione propria, il corrispondente problema algebrico ammetterebbe così $k + 1$ soluzioni, cioè almeno una più del grado dell'equazione risultante a cui esso conduce. Tale equazione sarà dunque soddisfatta identicamente ed il problema algebrico avrà quindi infinite soluzioni. Così p. e. il teorema che « se esiste un poligono di n lati inscritto in una conica e circoscritto ad una altra data, ne esistono infiniti » è una conseguenza immediata di questo principio.

Considera separatamente i casi di problemi posti in un campo di numeri o di punti semplicemente infinito, ovvero in un campo di numeri o di punti doppiamente infinito, quale p. e. il piano. In quest'ultimo caso mentre si può asserire, che, ammettendo il problema *sempre k* soluzioni *improprie* ed almeno una soluzione propria, ammetterà *infinite* soluzioni, non si potrà d'altra parte dire, senz'altro, che esso ammette un numero doppiamente infinito di soluzioni; cioè che *ogni punto del piano* soddisferà alle condizioni imposte dal problema. A tale oggetto occorrono altri criteri, uno dei quali dimostra potere essere il seguente:

Siano

$$f_m(x, y) = 0\,, \qquad \varphi_n(x, y) = 0$$

le due equazioni in x, y risp. di grado m ed n ($m \geq n$) che servono a determinare le coordinate x, y dei k punti del piano soddisfacenti alle condizioni del problema. Allora se le condizioni del problema sono verificate da $(m + 1)^2$ punti del piano che siano l'intersezione completa di un fascio di $m + 1$ rette distinte con un fascio di altre $m + 1$ rette distinte, esse saranno verificate certamente da tutti i punti del piano.

Ove poi il problema conduca ad una corrispondenza o trasformazione piana (P_m, P'_n) che ad ogni punto $P(x, y)$ fa corrispondere uno o più punti $P'(x', y')$ e reciprocamente, e possa condursi alla determinazione dei punti-uniti, allora, se la trasformazione è tale da permettere di accertare facilmente l'esistenza di curve i cui punti sono tutti uniti, basterà dimostrare l'esistenza di una o più curve siffatte il cui ordine complessivo *superi n'*, essendo n' l'ordine della curva che corrisponde ad una retta della 1ª figura, per potere asserire che tutti i punti del piano sono uniti. (*Continua*, vedi seduta seguente).

G. B. Guccia. *Formole analitiche per la trasformazione Cremoniana* :

$$(n \text{ dispari}) \qquad \alpha_1 = 3\,, \qquad \alpha_2 = n - 2\,, \qquad \alpha_{n-3} = 1\,. \ (^*).$$

Sia $n = 2\mu + 1$. La rete omaloidica è formata da curve d'ordine $2\mu + 1$, le quali hanno un punto $(2\mu - 1)$-plo, $2\mu - 1$ punti doppi e tre punti semplici fondamentali. Posto per brevità :

$$U = x_3 u_{\mu-1} + u_\mu\,, \qquad V = x_3 v_{\mu-2} + v_{\mu-1}\,,$$

dove u_μ, $u_{\mu-1}$, $v_{\mu-1}$, $v_{\mu-2}$ indicano polinomi omogenei, rispettivamente dei gradi μ, $\mu - 1$, $\mu - 1$, $\mu - 2$, nelle variabili x_1, x_2; si hanno per l'attuale trasformazione le formole seguenti :

$$\rho y_1 = (U + \alpha x_1 V)[U(x_1 + x_2) + x_1 x_2 V]$$

$$\rho y_2 = (U + \beta x_1 V)[U(x_1 + x_2) + x_1 x_2 V]$$

$$\rho y_3 = x_2 (U + \alpha x_1 V)(U + \beta x_1 V).$$

Infatti le curve del piano (x) corrispondenti alle rette

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$$

del piano (y) sono dell'ordine $2\mu + 1$, e passano:

1° con $2\mu - 1$ rami pel punto

$$x_1 = x_2 = 0;$$

2° con due rami pel punto di ulteriore intersezione delle linee

$$x_1 = 0, \qquad U = 0,$$

(*) Cremona, *Bulletin de Darboux*, V₁, p. 224.

e parimenti con due rami per ognuno dei

$$\mu(\mu - 1) - (\mu - 1)(\mu - 2) = 2(\mu - 1)$$

punti di ulteriore intersezione delle curve

$$U = 0, \qquad V = 0;$$

3° con un ramo per ognuno dei punti di ulteriore intersezione delle linee:

$$x_2 = 0, \qquad U = 0;$$

$$U + \alpha x_1 V = 0, \qquad U(x_1 + x_2) + x_1 x_2 V = 0;$$

$$U + \beta x_1 V = 0, \qquad U(x_1 + x_2) + x_1 x_2 V = 0.$$

Formole analitiche per la trasformazione Cremoniana:

$$\alpha_1 = \frac{2n - 8}{3}, \quad \alpha_{\frac{n-1}{3}} = 3, \quad \alpha_{\frac{n+2}{3}} = 2, \quad \alpha_{\frac{2(n-1)}{3}} = 1. \ (^*)$$

Sia $n = 3\mu + 1$. La rete omaloidica è formata da curve d'ordine $3\mu + 1$, le quali hanno: un punto 2μ-plo, due punti $(\mu + 1)$-pli, tre punti μ-pli e $2(\mu - 1)$ punti semplici fondamentali. Poniamo:

$$U = s_3 u_{\mu-1} + u_\mu, \qquad V = s_3 v_{\mu-2} + v_{\mu-1},$$

dove u_μ, $u_{\mu-1}$, $v_{\mu-1}$, $v_{\mu-2}$ sono polinomî omogenei, rispettivamente dei gradi μ, $\mu - 1$, $\mu - 1$, $\mu - 2$, nelle s_1, s_2, mentre

$$s_1 \equiv t_1(t_2 + t_3)$$

$$s_2 \equiv t_2(t_3 + t_1)$$

$$s_3 \equiv t_3(t_1 + t_2)$$

(*) Cremona, *Bulletin de Darboux*, V_1, p. 227.

dove

$$t_2 + t_3 \equiv x_1 x_3$$

$$t_3 + t_1 \equiv x_2 x_1$$

$$t_3 \equiv a x_2 x_3 + b x_3 x_1 + c x_1 x_2 .$$

Se ora scriviamo l'equazione

$$\lambda_1 U + (\lambda_2 s_1 + \lambda_3 s_2) V = 0$$

ed eseguiamo in essa le precedenti sostituzioni, è facile riconoscere che dal primo membro si staccherà il fattore $x_3^{\mu-1}$. Dico che il fattore residuale posto uguale a zero, della forma

$$\lambda_1 K + \lambda_2 L + \lambda_3 M = 0,$$

rappresenterà l'equazione della rete omaloidica data.

Infatti ognuna di queste curve è dell'ordine $3\mu + 1$, e passa:

1° con 2μ rami pel punto

$$x_1 = x_2 = 0 ;$$

2° con $\mu + 1$ rami pei due punti

$$x_2 = x_3 = 0 , \qquad x_3 = x_1 = 0 ;$$

3° con μ rami per ognuno dei tre punti in cui le coniche

$$t_1 = 0 , \qquad t_2 = 0 , \qquad t_3 = 0$$

s'incontrano ulteriormente due a due;

4° con un ramo per ciascuno dei

$$(3\mu + 1)(3\mu - 2) - 2\mu(2\mu - 2) - 2\mu(\mu + 1) - 3\mu(\mu - 1) \\ = 2(\mu - 1)$$

punti di ulteriore intersezione delle curve residuali

$$U' = 0 , \qquad V' = 0.$$

Si hanno così le formole di trasformazione:

$$y_1 : y_2 : y_3 = K : L : M.$$

SEDUTA DEL 14 GIUGNO 1885

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

Ammissione di nuovi soci: Dr. Andrea Cantone.

Comunicazioni:

A. Capelli applica l'ultimo dei metodi generali da lui esposti nella seduta precedente, alla dimostrazione del teorema del sig. Schoute (p. 48). Mantenendo le stesse notazioni, dimostra che *la trasformazione univoca* Θ, *risultante dalle sei trasformazioni*

$$\Omega, \Omega', \Omega, \Omega', \Omega, \Omega',$$

applicate successivamente, è una trasformazione identica.

Evidentemente la trasformazione Θ dovrà essere una trasformazione univoca (Cremoniana) al massimo dell'ottavo ordine, poichè essa consta di tre trasformazioni di 2° ordine e di tre di 1° ordine.

Pertanto, per dimostrare che la trasformazione Θ è identica, cioè che tutti i punti del piano sono punti uniti, basterà dimostrare l'esistenza di un complesso di curve i cui punti siano tutti uniti, ed il cui ordine complessivo sia superiore ad 8, cioè almeno eguale a 9.

Il prof. Capelli raggiunge tale intento dimostrando con considerazioni geometriche semplicissime l'esistenza di quattro rette speciali e di tre curve speciali del second' ordine (una delle quali è la conica stessa del teorema) i cui punti sono tutti uniti.

G. Maisano. *Sui covarianti indipendenti di 6° grado nei coefficienti della forma biquadratica ternaria.* (*).

Premette i seguenti teoremi :

I. Dato un gruppo equianarmonico di 4 elementi rappresentanti una forma binaria biquadratica, il gruppo Steineriano coincide col gruppo dato.

II. Le quattro tangenti che da un punto P della curva di 4° ordine $f = 0$ si possono condurre allo inviluppo

$$(abu)^4 = u_\alpha^4 = u_\beta^4 = u_\gamma^4 = \ldots = 0,$$

sono le quattro tangenti che dal punto P si possono condurre alla cubica polare di P rispetto ad $f = 0$.

III. Si hanno sulla curva $f = 0$ 16 punti, intersezioni della curva $f = 0$ colla curva

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd)\, a_x\, b_x\, c_x\, d_x = 0,$$

le cui cubiche polari rispetto alla stessa curva $f = 0$ sono equianarmoniche; e 24 punti, intersezioni della curva $f = 0$ colla curva

$$T = (abc)(def)^2(abd)(ace)(bcf)\, a_x\, b_x\, c_x\, d_x\, e_x\, f_x = 0,$$

le cui cubiche polari rispetto ad $f = 0$ sono armoniche.

IV. Le quattro tangenti che da un punto del piano si possono condurre alla curva

$$(abu)^4 = u_\alpha^4 = u_\beta^4 = u_\gamma^4 = \ldots = 0$$

(*) Cfr. G. Maisano: *Sistemi completi dei primi cinque gradi*, etc. (Giornale di Battaglini, vol. XIX).

formano un gruppo equianarmonico od armonico se il punto giace, rispettivamente, sulla curva

$$(\alpha\beta x)^4 = 0,$$

ovvero sulla curva

$$(\alpha\beta x)^2(\alpha\gamma x)^2(\beta\gamma x)^2 = 0. —$$

Da questi teoremi segue che la curva S deve appartenere al fascio

$$\varkappa A f + \lambda(\alpha\beta x)^4 = 0,$$

ove $A = (abc)^4$ è l'invariante di 3° grado della forma fondamentale; ed infatti nella citata Memoria trovasi :

$$S = \frac{1}{4}(\alpha\beta x)^4 - \frac{1}{3} A f;$$

e che la curva T deve appartenere al fascio

$$\varkappa.(\alpha\beta x)^2(\alpha\gamma x)^2(\beta\gamma x)^2 + \lambda.Cf = 0\,,$$

in cui C è un covariante di 2° ordine e di 5° grado e quindi della forma

$$\mu C_1 + \nu C_2\,,$$

indicando con C_1 e C_2 i due covarianti di 2° ordine e di 5° grado della forma biquadratica. Si trova iafatti

$$(\alpha\beta x)^2(\alpha\gamma x)^2(\beta\gamma x)^2 + 8T = \frac{2}{25} f[63(\alpha\beta x)^2 a_\alpha^2 a_\beta^2 - 20 a_p^2 a_x^2],$$

servendosi della notazione : $(abu)^2 a_\alpha^2 b_\alpha^2 = u_p^2$.

Si conchiude pertanto *che i covarianti indipendenti di 6° grado sono solamente due e del 6° ordine.*

G. B. Guccia espone alcune sue ricerche sulle *Trasformazioni Cremoniane nel piano* (*), dando implicitamente la soluzione del quesito da lui proposto nella seduta del 15 maggio 1884 (vedi pag. 5). Sia n l'ordine della trasformazione e ρ il numero dei punti fondamentali in ognuna delle figure. Sia inoltre, nel piano :

R il punto le di cui isologiche sono dotate d'una cuspide ;

D il punto le di cui isologiche sono dotate di due punti doppi;

I la retta luogo d'un punto le di cui isologiche toccano la retta istessa secondo un contatto di second' ordine (rispettivamente in due punti fissi i, i'), ossia : *la retta che è tangente d'inflessione (rispettivamente in due punti* i, i'*) delle curve che ad essa corrispondono nella 1ª e nella 2ª figura.*

T la retta luogo d'un punto le di cui isologiche toccano due volte la retta istessa (rispettivamente in due coppie di punti t_1, t_2 ; t'_1, t'_2), ossia : *la retta che è tangente doppia* (rispettivamente in due coppie di punti t_1, t_2 ; t'_1, t'_2) *delle curve che ad essa corrispondono nella 1ª e nella 2ª figura.*

Si hanno allora i teoremi seguenti :

I. *La trasformazione Cremoniana ammette, in generale :*

$$1^\circ \qquad 24(n-1)$$

punti R, epperò altrettante coppie di isologiche dotate di cuspide;

$$2^\circ \quad n(17n+6\rho-63)+\frac{1}{2}\rho(\rho-7)+46$$

punti D, epperò altrettante coppie di isologiche dotate di due punti doppi;

$$3^\circ \qquad 18n-3\rho-27$$

(*) Cfr. Guccia: *Sur les transformations Cremona dans le plan. (Comptes Rendus,* t. CI, p. 866).

rette I, epperò altrettante coppie di fasci (proiettivi) di isologiche, in ognuna delle quali due curve corrispondenti qualunque hanno, ciascuna, un contatto di second'ordine con una medesima retta, rispettivamente in due punti fissi;

$$4^{\circ} \qquad 4[2n(n-6)+\rho+13]$$

rette T, epperò altrettante coppie di fasci (proiettivi) di isologiche, in ognuna delle quali due curve corrispondenti qualunque hanno, ciascuna, un doppio contatto con una medesima retta, rispettivamente in due coppie di punti fissi.

II. *I punti D, R, le rette T, I sono nel tempo istesso, rispettivamente, punti doppi, cuspidi, tangenti doppie, tangenti di flesso, d'una curva,* Θ *dell'ordine* $6n+\rho-3$, *della classe* $4(n-1)$ *e del genere* $8n-\rho-10$, *così definita:*

a) luogo del punto le di cui isologiche hanno un punto doppio;

b) inviluppo della retta che tocca le curve che ad essa corrispondono nella 1.ª e nella 2.ª figura. La curva Θ *possiede inoltre un punto* $(r+1)$*-plo in ogni punto fondamentale r-plo di ciascuna delle figure, ed un punto doppio in ognuno degli* $n+2$ *punti uniti della trasformazione.*

III. *La curva* Θ *corrisponde punto a punto a ciascuna delle curve* J, J' *jacobiane delle reti (projettive) delle isologiche relative a tutti i punti del piano: Dato un punto* j *(ovvero* j'*) della curva* J *(ovvero* J'*), per esso passano infinite isologiche che ivi si toccano. La tangente comune è la retta* $\overline{jj'}$, *la quale è, nel tempo istesso, il luogo dei centri d'isologia delle coppie di isologiche che toccano, risp. in* j, *in* i', *la retta* $\overline{jj'}$. *Fra i punti di questa retta ve ne ha uno, ed uno solo,* θ, *appartenente alla curva* Θ, *le di cui isologiche hanno un punto doppio rispettivamente in* j, *in* j'. *Nel punto* Θ *la retta* $\overline{jj'}$ *tocca la curva* Θ. *Viceversa, dato un punto* θ *della curva* Θ *gli omologhi* j, j', *delle curve* J, J', *si ottengono quali punti doppi delle isologiche di* Θ.

IV. *Le tangenti alla curva* Θ *che possono condursi da un punto qualunque p del piano, sono le rette che congiungono p ai* $4(n-1)$ *punti di ulteriore intersezione della relativa isologica* $P(P')$ *colla curva* $J(J')$, *ovvero le rette che si possono condurre da p a toccare altrove la relativa isologica* $P(P')$. Etc.

SEDUTA DEL 24 GENNAJO 1886:

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

Elezione del Consiglio Direttivo per l'anno 1886:

Dietro votazione a schede segrete vengono confermati in carica tutti i membri del Consiglio Direttivo. (Vedi sedute del 20 marzo 1884 ed 11 gennaio 1885, p. 1 e 14).

Ammissione di nuovi socî: Dr. Vittorio Martinetti, Dr. Francesco Giudice, Giovanni D'Arone.

Comunicazioni:

A. Capelli rammentata la formola per lo sviluppo di una funzione di n serie di variabili n^{arie} secondo le potenze del determinante delle variabili, moltiplicate per funzioni derivabili da funzioni di un minor numero di serie di variabili (*), dimostra come una funzione di più di n serie di variabili n^{arie} si possa derivare con operazioni *invariantive*, cioè con operazioni del tipo:

$$D_{xy} \equiv y_1 \frac{d}{dx_1} + y_2 \frac{d}{dx_2} + \ldots + y_n \frac{d}{dx_n}$$

da funzioni di sole n serie di variabili.

Detto poi *numero delle funzioni di gradi dati nelle serie di variabili che soddisfano a certe proprietà*, il numero delle funzioni *linearmente indipendenti,* aventi tali gradi che possono derivarsi per mezzo di operazioni invariantive dalla funzione più generale avente tali gradi e soddi-

---

(*) Cfr. Capelli: *Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche* (Memorie Acc. Lincei, XII, 1882).

sfacente a tali proprietà, dimostra *che il numero delle funzioni di gradi dati di n serie di variabili* n^{arie} *derivabili con operazioni invariantive da funzioni di un minor numero di variabili, è uguale a quello di tutte le funzioni, degli stessi gradi, di n serie di variabili* $(n - 1)^{arie}$.

M. L. Albeggiani stabilisce nel seguente modo un passaggio nella lezione XVII del Corso del sig. Hermite, 2ª edizione autografata 1883 pag. 118.

Siano α, β quantità reali e siano $F(t, z)$, $G(t, z)$ funzioni olomorfe delle variabili t, z, come osserva l'Autore, l'equazione $G(t, z) = 0$ fa corrispondere alla serie dei valori reali di t compresi fra α e β, un numero finito o infinito di porzioni di curve o di curve intere, secondo i casi, le quali sono da riguardarsi quali *coupures* per la funzione:

$$\Phi(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(t, z)}{G(t, z)}\, dt.$$

Il sig. Hermite per mostrare ciò considera un punto M sopra una di tali curve, al quale rispondono i valori particolari $t = \theta$ $z = \zeta$, condotta poi la normale in esso punto alla curva prende su questa normale, da una parte e dall'altra della curva, due punti N, N' infinitamente vicini al punto M ed egualmente distanti da esso per modo che sia $MN = \pm \lambda$ $MN' = \mp \lambda$; trattasi perciò di mostrare, che, trovati i valori di $\Phi(z)$ in ciascuno dei punti N, N', quando si consideri in essi λ infinitamente piccolo la loro differenza è una quantità finita.

Ora dall'equazione della normale in un punto, di affisso z, appartenente alla curva ricavasi che lo affisso di un qualunque punto di essa normale è:

$$Z = z + i\lambda\, \frac{G'_t(t, z)}{G'_z(t, z)} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

ove intendonsi esclusi i casi nei quali per certi particolari valori di t e di z possa aversi $G'_t(t, z) = 0$, $G'_z(t, z) = 0$.

Posto :

$$\frac{G'_t(t, z)}{G'_z(t, z)} = p + iq$$

dopo breve discussione l'Autore trova che le coordinate del punto di affisso Z si possono scrivere :

$$X = x - \varepsilon\lambda q \qquad\qquad Y = y + \varepsilon\lambda p$$

ove λ è positivo ed ε, in valore assoluto eguale all'unità, ha il segno di p se $p \gtrless 0$ e quello di $-q$ se $p = 0$. Per avere le coordinate di un punto appartenente alla parte negativa della normale basta supporre λ negativo.

Pongasi per brevità :

$$F'_t(t, z) = P(t, z) \qquad\qquad F'_z(t, z) = Q(t, z)$$

$$G'_t(t, z) = R(t, z) \qquad\qquad G'_z(t, z) = S(t, z)$$

e si scriva semplicemente P, Q, R, S per $P(\theta, \zeta)$, $Q(\theta, \zeta)$, $R(\theta, \zeta)$ $S(\theta, \zeta)$. L'affisso del punto N situato sulla direzione positiva della normale è :

$$Z = \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{R}{S},$$

onde :

$$\Phi(N) = \int_\alpha^\beta \frac{F\left(t, \zeta + i\varepsilon\lambda \dfrac{R}{S}\right)}{G\left(t, \zeta + i\varepsilon\lambda \dfrac{R}{S}\right)} dt.$$

L'espressione analoga relativa al punto N' simmetrico di N si ottiene mutando λ in $-\lambda$, onde si ha:

$$\Phi(N') = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F\left(t, \zeta - i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)}{G\left(t, \zeta - i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)} dt,$$

e però:

$$\Phi(N) - \Phi(N')$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{F\left(t, \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)}{G\left(t, \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)} - \frac{F\left(t, \zeta - i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)}{G\left(t, \zeta - i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)} \right\} dt, \qquad (1)$$

dove nell'integrale del 2° membro bisogna supporre λ infinitamente piccolo. Ora esso integrale è la somma dei valori che prende la differenziale

$$\left\{ \frac{F\left(t, \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)}{G\left(t, \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)} - \frac{F\left(t, \zeta - i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)}{G\left(t, \zeta - i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)} \right\} dt$$

allorchè la variabile cresce per gradi eguali a dt dal limite inferiore α al limite superiore β, ma gli elementi di siffatta somma relativi ai valori di t che non sono radici dell'equazione $G(t, \zeta) = 0$, tendono a zero con λ, mentre lo stesso non può dirsi di quegli elementi che rispondono ai valori di t i quali annullano $G(t, \zeta)$ valori che, dopo le esclusioni fatte sopra, riduconsi al solo $t = \theta$. Onde nell'integrale del 2° membro della (1) bisogna supporre λ infinitamente piccolo ed è soltanto da considerare l'elemento, il quale si presenta di forma indeterminata, rispondente al valore $t = \theta$, o altrimenti è permesso sostituire identicamente $t = \theta + (t - \theta)$ in ciascuna delle funzioni

$$F\left(t, \zeta \pm i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right), \quad G\left(t, \zeta \pm i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)$$

nel 2° membro della (1) e supporre che $t - \theta$ tenda a zero con λ.

Con tali intendimenti sviluppando le funzioni:

$$F\left(\theta + (t - \theta), \zeta \pm i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right), \quad G\left(\theta + (t - \theta), \zeta \pm i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)$$

ed arrestandosi agl'infinitamente piccoli del 1° ordine, poichè $G(\theta, \zeta) \equiv 0$, si trova:

$$\frac{F\left(t, \zeta \pm i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)}{G\left(t, \zeta \pm i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)} = \frac{F(\theta, \zeta)}{(t - \theta \pm i\varepsilon\lambda)R} + \frac{(t - \theta) PS \pm i\varepsilon\lambda QR}{(t - \theta \pm i\varepsilon\lambda) RS},$$

ove i segni si corrispondono. Onde:

$$\frac{F\left(t, \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)}{G\left(t, \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)} - \frac{F\left(t, \zeta - i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)}{G\left(t, \zeta - i\varepsilon\lambda \frac{R}{S}\right)}$$

$$= -\frac{2i\varepsilon\lambda F(\theta, \zeta)}{\{(t - \theta)^2 + \lambda^2\}R} - \frac{2i\varepsilon\lambda(t - \theta)(PS - QR)}{\{(t - \theta)^2 + \lambda^2\} RS}.$$

E però:

$$\Phi(N) - \Phi(N') = -\frac{2i\varepsilon F(\theta, \zeta)}{R} \int_\alpha^\beta \frac{\lambda dt}{(t - \theta)^2 + \lambda^2}$$

$$- 2i\varepsilon\left(\frac{P}{R} - \frac{Q}{S}\right) \int_\alpha^\beta \frac{\lambda(t - \theta) dt}{(t - \theta)^2 + \lambda^2}.$$

Trattasi ora di trovare i valori dei due integrali nel 2° membro di questa espressione, supposto θ compreso fra α, β e λ convergente verso lo zero. Il primo di essi integrali è stato studiato dallo stesso signor Hermite a pag. 109 del detto corso autografato ed egli ha trovato, quando θ è compreso fra α, β :

$$\operatorname*{Lim.}_{\lambda=0} \int_\alpha^\beta \frac{\lambda dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2} = \pi.$$

Il secondo integrale, eseguendo l'integrazione, dà :

$$\int_\alpha^\beta \frac{\lambda(t-\theta)dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2} = \frac{1}{2}\lambda \log \frac{(\beta-\theta)^2+\lambda^2}{(\alpha-\theta)^2+\lambda^2},$$

onde :

$$\operatorname*{Lim.}_{\lambda=0} \int_\alpha^\beta \frac{\lambda(t-\theta)dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2} = 0,$$

e però :

$$\Phi(N) - \Phi(N') = -\frac{2ie\pi F(\theta, \zeta)}{R(\theta, \zeta)}. \text{ (*)}$$

(*) Cfr. Hermite *Cours professé a la Faculté des Sciences de Paris* (*Paris* 1883, pag. 116), ed anche : *Sur quelques points de la théorie des Fonctions* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ* XII).

Il sig. Gousart in una lettera diretta al sig. Hermite (*Acta Mathematica* I, pagina 189) dimostra, in modo più generale, il suddetto teorema applicandovi il teorema di Cauchy; per vero il fattore $\frac{F(\theta, \zeta)}{R(\theta, \zeta)}$ è il coefficiente di $\frac{1}{h}$ nello sviluppo di $\frac{F(\theta+h, \zeta)}{G(\ \ +h, \zeta)}$, cioè il residuo della funzione $\frac{F(t, \zeta)}{G(t, \zeta)}$ relativo al polo $t=\theta$.

SEDUTA DEL 7 FEBBRAIO 1886

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

Ammissione di nuovi soci: Prof. Temistocle Zona, Ingegnere Salvatore Rotigliano.

Elezione del Bibliotecario del Circolo: Dr. Vittorio Martinetti.

È presente alla seduta il Dr. T. A. Hirst di Londra.

G. B. Guccia: *Estensione di alcuni teoremi di Hirst sulle trasformazioni quadratiche, alle corrispondenze Cremoniane d'ordine n nel piano.*

SEDUTA DEL 21 FEBBRAJO 1886

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

Ammissione di nuovi soci: Prof. Michele Cantone.

Comunicazioni:

T. A. Hirst. F. R. S. *Sur la congruence Roccella, du troisième ordre et de la troisième classe.*

M. le Dr. Roccella, dans une Thèse intéressante *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni de' complessi corrispondenti in due o più fasci proiettivi di complessi lineari* (Piazza Armerina, 1882), a signalé l'existence d'une congruence du 3ième ordre et de la 3ième classe, dans laquelle je viens de reconnaitre un cas particulier de la congruence Cremonienne que j'ai étudiée dans mon dernier Mémoire *On Congruences of the Third Order and Class.* (*)

(*) *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. XVI, 1885.

Pour mettre en évidence cette liaison je rappelle que la congruence Roccella dont il s'agit, peut être definie comme lieu d'une droite qui s'appuie sur trois rayons correspondants de trois faisceaux projectifs $A_1(\alpha)$, $B_1(\beta)$, $X_1(\xi)$ donnés dans l'espace. Parmi les droites de la congruence (3, 3) qui forment ce lieu se trouvent les génératrices de trois cônes du second ordre, et les tangentes de trois coniques. Chacun des trois cônes a pour sommet un des trois centres A_1, B_1, X_1 et passe par les deux autres; chacune des trois coniques est située dans un des trois plans α, β, ξ et touche les deux autres. Par conséquent, pour établir l'identité de la congruence dont il s'agit avec celle que j'ai traité dans mon Mémoire, il faut et il suffit de faire voir que la première détermine entre les points de deux quelconques des trois plans, entre α et β par exemple, une correspondance de Jonquières (*isographique*) du troisième ordre qui possède deux points-unis C et D (voir art. 8 de mon Mémoire).

Pour cela j'observe que le lieu d'une droite d'une congruence (3, 3) qui rencontre une droite arbitraire donnée est, en général, une surface gauche du sixième degré, pour laquelle la droite arbitraire est triple. Dans le cas où cette droite est prise arbitrairement sur le plan α, la surface gauche se décompose, évidemment, dans les tangentes de la conique située en ce plan et dans une surface gauche, du quatrième degré, pour laquelle la droite directrice a est simple. Mais une génératrice de cette dernière surface se trouve entièrement dans le plan β; c'est la tangente, outre que $\overline{\alpha\beta}$, qu'on peut mener à la conique du plan β par le point $(a, \overline{\alpha\beta})$. En l'écartant il reste donc, pour section de la surface gauche par le plan β, une courbe du troisième ordre. C'est la courbe qui correspond projectivement à la droite arbitraire a du plan α. Elle possède évidemment en B_1 un point double, puisque deux des génératrices du cône qui a B_1 pour sommet rencontrent la droite a.

On sait que pour chaque couple de faisceaux projectifs il arrive, deux fois, que deux rayons correspondants se rencontrent. On voit aussi qu'une droite quelconque qui passe par un tel point de rencontre et s'appuie sur le rayon correspondant à ces deux-là, dans le troisième faisceau, appartient à la congruence; comme y appartient aussi chaque droite du plan des deux rayons incidents qui passe par la trace de ce rayon correspondant.

Or pour les faisceaux $A_2(\alpha)$, $B_2(\beta)$ les deux points de rencontre des rayons correspondants sout, évidemment, les points-unis C et D, de la correspondance entre α et β, et les traces, sur les plans de ces couples de rayons, des rayons qui correspondent, respectivement, à ces couples, dans le troisième faisceau, sont les points C' et D' de mon Mémoire (art. 8).

J'ajoute que, pour les faisceaux $A_2(\alpha)$, $X_2(\xi)$, les deux points de rencontre des couples de rayons correspondants, sont des points fondamentaux simples A_1', A_1'' de la correspondance entre α et β; de même, pour les faisceaux $B_2(\beta)$, $X_2(\xi)$ ce sont des points fondamentaux simples B_1''', B_1''''. Les points fondamentaux B_1', B_1'', A_1''', A_1'''', respectivement associés aux précédents, sont toujours les traces, sur le plan de deux rayons incidents, des rayons qui correspondent à ceux-ci dans le troisième faisceau.

Il me reste seulement à faire observer que ce qui caractérise la congruence Roccella, comme congruence Cremonienne, c'est que les points correspondants des droites $\overline{A_1'A_1''}$ et $\overline{B_1'''B_1''''}$ sont situés, deux à deux, sur les tangentes d'une conique, dont le plan est ξ; et ceux des coniques $(A_2 A_1''' A_1'''' C D)$ et $(B_2 B_1' B_1'' C D)$ sur les génératrices d'un cône du second ordre, dont le sommet est X_2. Ces relations dans la congruence (3, 3), plus générale, que j'ai étudiée dans mon Mémoire, n'ont pas lieu.

G. B. Guccia aggiunge nuovi risultati sull' argomento esposto nella seduta precedente.

SEDUTA DEL 21 MARZO 1886

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

Comunicazioni:

G. Maisano comunica alcune ricerche intorno a certe curve covarianti analoghe alle curve Hessiana, Steineriana, e Cayleyana di una curva fondamentale di ordine n.

Nel sistema doppiamente infinito delle k^{me} polari dei punti del piano rispetto ad una curva fondamentale $f = a_x^n = b_x^n = \ldots = 0$ ve ne ha un numero semplicemente infinito che hanno un punto doppio. Il luogo dei relativi poli è una curva dell'ordine $3k(n-k-1)^2$:

$$S_k(y) = 0 \qquad (1)$$

che si può ottenere eliminando le x fra le 3 equazioni :

$$\begin{aligned} a_y^k\, a_x^{n-k-1}\, a_1 &= 0\,, \\ a_y^k\, a_x^{n-k-1}\, a_2 &= 0\,, \qquad (2) \\ a_y^k\, a_x^{n-k-1}\, a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Il luogo dei punti doppi di queste k^{me} polari è una curva dell'ordine $3k^2(n-k-1)$:

$$\Delta_k(x) = 0 \qquad (3)$$

che si può ottenere eliminando le y fra le equazioni (2).

L'inviluppo delle rette che uniscono un polo y col punto doppio della relativa polare è una curva della classe $3k(n-k-1)(n-1)$:

$$C_k(u) = 0. \qquad (4)$$

Chiamando $S_k(y) = 0$, $\Delta_k(x) = 0$, $C_k(u) = 0$, rispettivamente, k^{ma} Steineriana, k^{ma} Hessiana, k^{ma} Cayleyana della curva $f = 0$, si hanno i seguenti teoremi :

I. *Le $(n-k)^{me}$ polari dei punti della k^{ma} Hessiana rispetto alla curva fondamentale, toccano la k^{ma} Steineriana nei punti corrispondenti.*

II. *Le k^{me} polari dei punti della k^{ma} Steineriana rispetto alla curva fondamentale, toccano (impropriamente) nei punti corrispondenti la Hessiana.*

III. *Se la curva fondamentale $f = 0$ ha un punto di ondulazione, nel qual caso si deve annullare un invariante di f, questo punto è comune alle tre curve $f = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$; reciprocamente, un punto comune a queste tre curve è un punto di ondulazione per la curva $f = 0$.*

G. B. Guccia declina la priorità di una soluzione delle equazioni di condizione per le trasformazioni Cremoniane, contenuta in una nota dell'Ammiraglio de Jonquières (*). Nel mese di ottobre 1885 gli era occorso di comunicare verbalmente all'illustre geometra francese i due risultati seguenti :

1.° *Ove sia $n = 2^m$ (m numero intero) si ha sempre la soluzione, coniugata a se stessa,*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{2^2} = \alpha_{2^3} = \ldots = \alpha_{2^{m-1}} = 3 \text{ (**)};$$

2° *In ogni trasformazione Cremoniana d'ordine* pari, *in cui gli ordini di moltiplicità dei punti fondamentali sono tutti dei numeri* pari, *si hanno necessariamente* tre *punti fondamentali semplici.*

In ordine alla prima proposizione gli corre l'obbligo dichiarare aver egli ignorato che di quella soluzione si fossero occupati con precedenza : il Dr. Hirst nella nota *On quadric Transformation* (*Quarterly Journal*, n.° 68, 1881) ed il Dr. Sturm nella Memoria *Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften* (*Math. Annalen,* XIX, october 1881).

(*) *Sur les transformations géométriques birationnelles d'ordre n* (*Comptes Rendus*, t. CI, p. 720, 19 octobre 1885). Posteriormente il sig. de Jonquières ha continuate le sue importanti ricerche sulle equazioni di Cremona, dando alla luce le note: *Modes de solution d'une question d'Analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona* (Extrait des *Comptes Rendus, t. CI*, séances des 2 et 9 novembre 1885, avec additions), *Etude sur une question d' Analyse indéterminée.* (*Giornale di Battaglini*, 1886, vol. XXIV). Cfr. inoltre : Guccia, *Sur les transformations géométriques planes birationnelles.* (*Comptes Rendus*, t. CI, séance du 26 octobre 1885).

(**) Posto $m = 3$ si ha la soluzione del Cayley (*Proceed. London Mathematical Society* III, p. 143).

SEDUTA DEL 4 APRILE 1886

PRESIDENZA F. CALDARERA

Ammissione di nuovi soci: Professore Giuseppe Taschetti.

Comunicazioni:

A. Capelli presenta al Circolo un volume manoscritto del defunto professore Gaetano Batà (*) contenente lezioni di Geometria analitica nello spazio e frammenti diversi riguardanti problemi risoluti dall'Autore. Fa notare come le lezioni di Geometria analitica nello spazio possano riguardarsi come la prosecuzione di quelle di Geometria analitica del piano, il cui manoscritto si trova conservato presso questa Biblioteca Comunale. Venendo quindi a parlare dei sopraddetti frammenti, osserva come specialmente importante il seguente teorema:

L'ellisse di area massima inscrivibile in un triangolo è quella che lo tocca nei punti di mezzo.

In proposito a ciò lo stesso socio A. Capelli fa delle osservazioni sue proprie indicando un metodo generale che può servire per la dimostrazione di questo e di alcuni altri teoremi analoghi.

F. Giudice fa conoscere un nuovo metodo *sulla determinazione delle radici reali delle equazioni a coefficienti numerici reali*, il quale riesce spesso conveniente per la risoluzione approssimata delle equazioni, specialmente quando, per essere queste di grado elevato riescirebbe molto incomodo così l'uso dell'equazione alle differenze (**), come l'applicazione del Teorema di Sturm.

(*) Gaetano Batà, nato in Palermo l'anno 1783, fu professore di matematiche sublimi in questa Università per lo spazio di sette anni. Nominato a tale ufficio nel 1834 cessava di vivere nel dicembre 1842. L'aver potuto esaminare il manoscritto presentato al Circolo si deve alla gentilezza della famiglia Jacona che ne è proprietaria.

(**) Lagrange - *Œuvres* - Tome huitième - Chapitre premier - Problème 8.

Avendosi un'equazione, che suppongo senza radici multiple, la si ponga sotto la forma:

$$(1) \qquad f(x) = \varphi(x)$$

scelta per modo che $f(x)$ e $\varphi(x)$ siano entrambe costantemente crescenti mentre x percorre l'intervallo (a, b), dove suppongo $a \geqq 0$, $b > a$. Perchè ciò sia, è necessario e sufficiente che si mantenga

$$(2) \qquad \frac{df(x)}{dx} > 0, \qquad \frac{d\varphi(x)}{dx} > 0$$

mentre x percorre il detto intervallo. Si potrà sempre ottenere questo in infiniti modi; e lo si conseguirà in ogni caso immediatamente se, dopo d'aver ridotta a zero l'equazione, si trasporteranno tutti i termini negativi nel secondo membro perchè così $f(x)$ e $\varphi(x)$ saranno polinomî con soli termini positivi.

Si formino i valori

$$f(a) \qquad f(b) \qquad \varphi(a) \qquad \varphi(b)$$

Essendo arbitrario l'ordine dei due membri della (1), potremo supporre $f(a) < \varphi(a)$.

In causa delle ipotesi (2), se una radice X della (1) cade nell'intervallo (a, b), deve cadere $f(X)$, $= \varphi(X)$, tanto nell'intervallo $[f(a), f(b)]$ quanto nell'altro $[\varphi(a), \varphi(b)]$ per cui se questi non avranno niente di comune l'equazione proposta non avrà nessuna radice nell'intervallo (a, b) considerato. Segue che se una radice cade in questo, disponendo per grandezza crescente i valori $f(a)$, $f(b)$, $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $f(X) = \varphi(X)$, avremo o l'uno o l'altro dei seguenti casi:

$$(\mathrm{I}) \qquad f(a) \quad \varphi(a) \quad f(X) = \varphi(X) \quad f(b) \quad \varphi(b)$$

$$(\mathrm{II}) \qquad f(a) \quad \varphi(a) \quad f(X) = \varphi(X) \quad \varphi(b) \quad f(b)$$

onde si riconosce (*) che la minor radice della (1) superiore ad a è limite di a_r, al crescere indefinitamente di r, purchè sia fatto

$$f(a_1) = \varphi(a) \qquad\qquad f(a_r) = \varphi(a_{r-1})$$

Si riconosce parimenti che la maggior radice della (1) inferiore a b è limite di b_s, al crescere indefinitamente di s, purchè sia fatto

nel caso (I) : $\qquad \varphi(b_1) = f(b) \qquad\qquad \varphi(b_s) = f(b_{s-1})$

e nel caso (II) : $\qquad f(b_1) = \varphi(b) \qquad\qquad f(b_s) = \varphi(b_{s-1})$

Se nessuna radice cadesse nell'intervallo (a, b), il procedimento di calcolo ora indicato ce ne avviserebbe perchè le a_r diverrebbero maggiori di b e le b_s diverrebbero minori di a.

Indico con α la minor radice di (1) superiore ad a ed indico con β la maggior radice inferiore a b. Siccome la (1) non ha radici multiple potremo spingere il calcolo fino ad ottenere a_r e b_s abbastanza vicine ai loro limiti α e β perchè la minore radice di

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} \tag{3}$$

superiore ad a_r sia pure superiore ad α, e la maggior radice, di questa stessa equazione, inferiore a b_r sia pure inferiore a β. Calcolando in simil guisa i numeri $a_{r,1}$, $a_{r,2}$, $a_{r,3}$, ... costantemente crescenti aventi per limite la minor radice della (3) superiore ad a_r, ed i numeri $b_{s,1}$, $b_{s,2}$, $b_{s,3}$, ... costantemente decrescenti aventi per limite la maggior radice della (3) inferiore a b_s, potremo quindi spingere il calcolo fino ad ottenere un numero $A = a_{r,u}$ maggiore di α ed un numero $B = b_{s,v}$ minore di β. Pel teorema di Rolle cadrà allora la sola radice α fra a ed A, o meglio fra a_r ed A; e cadrà la sola β fra b e B, o meglio fra b_s e B. Potremo prendere per A e B il primo numero $a_{r,u}$ ed il primo $b_{s,v}$ per cui si ha :

(*) Cauchy - *Analyse Algébrique* - Note III - 2ème Théorème.

$$[f(a)-\varphi(a)]\times[f(a_{r,n})-\varphi(a_{r,n})]<0$$

$$[f(b)-\varphi(b)]\times[f(b_{s,v})-\varphi(b_{s,v})]<0$$

Così avremo separate le radici α e β. Procederemo a limitare le altre radici reali che cadono nell' intervallo (a, b) operando relativamente all' intervallo (A, B) come già s' è operato relativamente a quello.

Volendo limitare tutte le radici positive prenderemo per a e b lo zero ed un numero maggiore di tutte le radici reali della (1).

A. Cantone comunica i seguenti teoremi sulla cubica gobba:

I. *Se si projetta da un punto qualunque di una retta data r la cubica gobba Γ e si cerca della retta r il piano polare rispetto al cono di 3° ordine così generato, questo piano passa costantemente per una retta r'. Le rette r ed r' sono le trasversali alle quattro corde situate nei piani tangenti di Γ, che passano per r.*

Applicando il principio di dualità si ottiene:

Segando con un piano qualsiasi passante per una retta data r la superficie Σ, sviluppabile osculatrice della cubica gobba Γ, i poli della retta r, rispetto alle curve di 3ª classe così generate, sono situate su una retta r_1.

Le rette r ed r_1 sono le trasversali alle quattro rette direttrici passanti pei punti d'incontro di r con la superficie Σ.

II. *Se da un punto qualunque di una retta q del complesso di primo grado Ω determinato dalla curva Γ, si projetta essa curva Γ, il piano polare di q rispetto al cono di 3° ordine così generato passa costantemente per un'altra retta q' del medesimo complesso Ω, e viceversa; inoltre se con un piano qualunque passante per q seghiamo la sviluppabile osculatrice Σ, il polo di q rispetto alla curva di 3ª classe, che si viene a determinare, giace sulla retta q', e viceversa.*

In virtù di tali proprietà alle rette q e q' si può dare il nome di *rette polari coniugate rispetto alla cubica gobba* Γ.

III. *Una retta q del complesso Ω sega la superficie Σ in due punti reali e due imaginari coniugati formanti un rapporto equianarmonico.*

Se μ e ν sono i due piani tangenti reali di Γ nei punti M ed N, passanti per la retta q e seganti ancora Γ rispettivamente nei punti M'

ed N', la retta q', polare coniugata di q, è l' intersezione del piano tangente di Γ in M' e segante in M, col piano tangente in N' e segante in N.

Richiamando poi la definizione di punti congiunti e di piani congiunti relativamente ad una cubica gobba (*), dimostra il teorema :

IV. *I piani congiunti a quelli passanti per una retta q del complesso* Ω *sono i piani osculatori della cubica gobba luogo dei punti congiunti a quelli situati sulla retta q.*

Infine richiamando la trasformazione razionale ed involutoria, che si può stabilire per mezzo di una cubica gobba Γ (**), si ha, che *le superficie di 3° ordine* Π_α, *corrispondenti ai piani* α *dello spazio, oltre a passare per la curva* Γ, *risultano inscritte alla superficie* Σ, *ossia la curva del 6° ordine, base della trasformazione, si compone di due cubiche gobbe infinitamente vicine.*

Se il piano α sega la curva Γ in tre punti distinti A, B e C, allora la superficie Π_α si può ottenere dalla trasformazione del piano α per punti congiunti rispetto ad un' altra cubica gobba Δ passante pei punti A, B e C e quivi tangente alle tre rette, che sono le trasversali alle tangenti di Γ nei sudetti punti. Mediante le curve Γ e Δ si può quindi stabilire una corrispondenza involutoria di punti, tanto sul piano α, quanto sulla superficie corrispondente Π_α.

Quando il piano α è osculatore di Γ, allora esiste un numero semplicemente infinito di curve Δ, le quali possono trasformare il piano α nella superficie Π_α.

Supposto il piano α all'infinito enuncia i seguenti teoremi :

V. *Se il piano all'infinito sega una cubica gobba in tre punti distinti, esiste una superficie di 3° ordine, la quale bisega le corde non solo della curva data, ma ancora di un'altra cubica gobba, che ha in comune con la precedente, oltre i tre punti all'infinito, altri due punti e 5 piani osculatori.*

VI. *La superficie gobba di 3° grado, la quale bisega le corde di una*

(*) Cremona. Memoria sulla cubica gobba. (*Nouvelles Ann. de Math.* 2.ª série t. 1.).

(**) Reye. Lezioni sulla geometria di posizione, p. II, Lez. 14ª.

parabola gobba, bisegherà ancora le corde di un numero semplicemente infinito di parabole gobbe, ognuna delle quali è determinata da un punto preso sulla superficie.

SEDUTA DEL 18 APRILE 1886

PRESIDENZA G. ALBEGGIANI

Ammissione di nuovi soci: Professore Damiano Macaluso.

Comunicazioni:

M. Gebbia stabilisce un *metodo per formare le equazioni a derivate parziali delle superficie che ammettono una generatrice di forma costante,* fondato sulla considerazione che la generatrice, senza deformarsi, vien trasportata nel moto di un sistema invariabile. Questo metodo costituisce quindi un'applicazione della *Geometria del movimento.*

Siano ξ, η, ζ, le coordinate cartesiane di un punto rispetto a tre assi ortogonali mobili col sistema che trasporta la generatrice ed x, y, z le coordinate dello stesso punto rispetto a tre assi ortogonali fissi, a cui si vuol riferire la superficie. Si definisca la generatrice con tre equazioni

$$\xi = \varphi(\theta), \quad \eta = \psi(\theta), \quad \zeta = \chi(\theta),$$

ove θ è un parametro variabile e si considerino le note relazioni

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z = \varphi(\theta) = \varphi \\ \eta &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z = \psi(\theta) = \psi \\ \zeta &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z = \chi(\theta) = \chi \end{aligned} \right.$$

Per definire il moto della generatrice si suppongano le dodici grandezze a, b, c espresse in funzione di un altro parametro indipendente τ.

Si segnino con φ', φ'', .. ψ', ψ'', .. le derivate di φ, ψ, χ rispetto a θ e con a'_0, b'_0, c'_0, a'_1, .. a''_0, .. le derivate di a_0, b_0, .. rispetto a τ.

Le grandezze θ, τ possono sostituirsi alle x, y nella qualità di variabili indipendenti della quistione, ed esse determinano sulla superficie un sistema di coordinate curvilinee costituito dalla serie delle diverse posizioni della generatrice e da quella delle traiettorie dei diversi punti di essa.

Differenziando le (1) rispetto a θ ed a τ, si ottiene

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1\dfrac{\partial x}{\partial\theta} + a_2\dfrac{\partial y}{\partial\theta} + a_3\dfrac{\partial z}{\partial\theta} = \varphi' \\[2ex] b_1\dfrac{\partial x}{\partial\theta} + b_2\dfrac{\partial y}{\partial\theta} + b_3\dfrac{\partial z}{\partial\theta} = \psi' \\[2ex] c_1\dfrac{\partial x}{\partial\theta} + c_2\dfrac{\partial y}{\partial\theta} + c_3\dfrac{\partial z}{\partial\theta} = \chi' \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} a_1\dfrac{\partial x}{\partial\tau} + a_2\dfrac{\partial y}{\partial\tau} + a_3\dfrac{\partial z}{\partial\tau} + a'_0 + a'_1 x + a'_2 y + a'_3 z = 0 \\[2ex] b_1\dfrac{\partial x}{\partial\tau} + b_2\dfrac{\partial y}{\partial\tau} + b_3\dfrac{\partial z}{\partial\tau} + b'_0 + b'_1 x + b'_2 y + b'_3 z = 0 \\[2ex] c_1\dfrac{\partial x}{\partial\tau} + c_2\dfrac{\partial y}{\partial\tau} + c_3\dfrac{\partial z}{\partial\tau} + c'_0 + c'_1 x + c'_2 y + c'_3 z = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando i due membri delle (2) risp. per a_1, b_1, c_1, o per a_2, b_2, c_2, o per a_3, b_3, c_3, e sommando ciascuna volta; poi facendo lo stesso con le (3), si ha per note relazioni:

$$
(4) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \theta} = \Phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \Psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \mathrm{X} \\
&\frac{\partial x}{\partial \tau} = \Lambda, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = \mathrm{M}, \quad \frac{\partial z}{\partial \tau} = \mathrm{N},
\end{aligned}
\right.
$$

ove

$$
\begin{aligned}
\Phi &= a_1\varphi' + b_1\psi' + c_1\chi' & \qquad \Lambda &= \rho y - \varkappa z - \lambda \\
\Psi &= a_2\varphi' + b_2\psi' + c_3\chi' & \qquad \mathrm{M} &= \pi z - \rho x - \mu \\
\mathrm{X} &= a_3\varphi' + b_3\psi' + c_3\chi' & \qquad \mathrm{N} &= \varkappa x - \pi y - \nu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda &= a'_0 a_1 + b'_0 b_1 + c'_0 c_1 & \qquad \pi &= a_3 a'_2 + b_3 b'_2 + c_3 c'_2 \\
\mu &= a'_0 a_2 + b'_0 b_2 + c'_0 c_2 & \qquad \varkappa &= a_1 a'_3 + b_1 b'_3 + c_1 c'_3 \\
\nu &= a'_0 a_3 + b'_0 b_3 + c'_0 c_3 & \qquad \rho &= a_2 a'_1 + b_2 b'_1 + c_2 c'_1
\end{aligned}
$$

Ciò posto, il metodo consiste nello stabilire le equazioni, che servono al cambiamento delle variabili indipendenti x, y nelle altre θ, τ. Si ha dapprima

$$
\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \theta},
$$

$$
\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \tau},
$$

le quali, scrivendo come di solito p, q invece di $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ e per le relazioni (4) diventano

$$(5)\qquad \begin{cases} \Phi p + \Psi q - X = 0, \\ \Lambda p + M q - N = 0, \end{cases}$$

che sono due equazioni a derivate parziali del 1° ordine racchiudenti le funzioni generalmente arbitrarie Φ, Ψ, X, Λ, M, N.

Il significato geometrico di queste equazioni si rende manifesto osservando che Φ, Ψ, X sono proporzionali ai coseni degli angoli che la tangente alla curva forma con gli assi fissi; che $-\Lambda$, $-M$, $-N$ esprimono le componenti della velocità del punto generatore secondo gli assi fissi, e sono quindi proporzionali ai coseni degli angoli che la tangente alla traiettoria di questo punto forma coi detti assi; che infine p, q, -1 sono proporzionali ai coseni degli angoli determinati con gli assi fissi dalla normale alla superficie. Le equazioni (5) esprimono dunque che la normale alla superficie è perpendicolare : 1° alla tangente alla curva generatrice; 2° alla tangente alla traiettoria del punto generatore. Queste proprietà, stabilite *a priori*, com'è agevole, potrebbero condurre a quelle equazioni direttamente.

Da esse si possono dedurre tre altre equazioni a derivate parziali del 2° ordine che racchiuderanno insieme alle precedenti altre funzioni arbitrarie, e che saranno quelle esprimenti la trasformazione delle derivate seconde di z. Per ottenerle basta differenziare le (5) rispetto a θ ed a τ. In questa maniera si perviene apparentemente a quattro equazioni, che però si riducono effettivamente a tre in virtù delle identità

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial x}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\tau}, \quad \text{etc.,}$$

le quali si traducono nelle relazioni

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\theta} = \Psi\rho - X\varkappa, \\[2ex] \dfrac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \dfrac{\partial M}{\partial\theta} = X\pi - \Phi\rho, \\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial\tau} = \dfrac{\partial N}{\partial\theta} = \Phi\varkappa - \Psi\pi. \end{cases}$$

Le tre eguaglianze che in tal modo si ottengono sono le seguenti:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & \Phi' p + \Psi' q - X' + \Phi^2 r + 2\Phi\Psi s + \Psi^2 t = 0 \\ & \Lambda\Phi r + (\Lambda\Psi + M\Phi)s + M\Psi t + \begin{vmatrix} \Phi, & \Psi, & X \\ \pi, & \varkappa, & \rho \\ p, & q, & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ & \Lambda' p + M' q - N' + [\pi p q - \varkappa(1 + p^2) - \rho q]\Lambda \\ & + [\pi(1 + q^2) - \varkappa p q + \rho p]M + \Lambda^2 r + 2\Lambda M s + M^2 t = 0, \end{aligned}\right.$$

ove Φ', Ψ', X' indicano le derivate parziali di Φ, Ψ, X rispetto a θ, Λ', M' N' le derivate parziali di Λ, M, N r'spetto a τ : son queste le nuove funzioni arbitrarie. Poi r, s, t rappresentano, come di solito, le derivate seconde di z rispetto ad x ed y.

Così potranno formarsi successivamente quattro equazioni del terzo ordine, cinque del quarto, etc., che conterranno come funzioni generalmente arbitrarie le derivate parziali successive di Φ, Ψ, X rispetto a θ e quelle di Λ, M, N, π, $\varkappa$, ρ rispetto a τ.

Definita la natura della superficie, imponendo speciali condizioni alla generatrice, o al moto di essa o ad entrambe le cose insieme, per otteneme l'equazione a derivate parziali si elimineranno le arbitrarie fra tante equazioni dei gruppi (5), (7) e seguenti, quante ne son necessarie, tenuto conto delle condizioni sudette.

Applica brevemente il processo esposto alla ricerca delle equazioni a derivate parziali delle superficie cilindriche, coniche, di rivoluzione, etc.

Superficie cilindriche. Queste ammettono due serie di generatrici di forma costante. Una è la rettilinea, epperò Φ, Ψ X sono costanti e la prima delle (5) è già l'equazione cercata. L'altra è una curva qualunque moventesi in traslazione, onde si ha $\pi = \chi = \rho = 0$, mentre λ, μ, ν sono costanti, e la seconda delle (5) diventa

$$\lambda p + \mu q - \nu = 0,$$

cioè sotto altro riguardo si perviene allo stesso tipo d'equazione.

Superficie coniche. La generatrice è rettilinea e passa per un punto fisso (a, b, c), onde le sue equazioni nel sistema fisso sono:

$$\frac{x - a}{\Phi} = \frac{y - b}{\Psi} = \frac{z - c}{X}$$

e la prima delle (5) si può scrivere

$$(x - a)p + (y - b)q = z - c,$$

ch'è l'equazione cercata.

Superficie rigate generali. Le Φ, Ψ, X sono indipendenti da θ, onde $\Phi' = \Psi' = X' = 0$ e la prima delle (7) si riduce a

$$\Phi^2 r + 2\Phi\Psi s + \Psi^2 t = 0.$$

Differenziandola rispetto a θ, si ottiene

$$\Phi^3 u + 3\Phi^2\Psi v + 3\Phi\Psi^2 w + \Psi^3 m = 0,$$

ove u, v, w, m indicano, come di solito, le derivate terze di z. Eliminando Φ, Ψ fra queste due forme binarie, si perviene all'equazione nota delle superficie rigate.

Superficie sviluppabili. Come per le rigate generali la prima delle (7) si riduce a

$$\Phi^2 r + 2\Phi\Psi s + \Psi^2 t = 0,$$

che si può scrivere

$$(a) \qquad (\Phi r + \Psi s)\Phi + (\Phi s + \Psi t)\Psi = 0.$$

Inoltre, affinchè le generatrici consecutive s'incontrino, è necessario che il moto istantaneo della generatrice si riduca ad una rotazione semplice e che l'asse istantaneo di questa incontri la generatrice. La prima condizione richiede che sia

$$\lambda\pi + \mu\varkappa + \nu\rho = 0,$$

che, aggiungendovi un'identità, si può scrivere

$$(b) \qquad \Lambda\pi + \mathrm{M}\varkappa + \mathrm{N}\rho = 0.$$

Per esprimere la seconda condizione si osservi che le coordinate (di retta) della generatrice sono

$$\Phi, \quad \Psi, \quad \mathrm{X}, \quad y\mathrm{X} - z\Psi, \quad z\Phi - x\mathrm{X}, \quad x\Psi - y\Phi$$

e quelle dell'asse istantaneo

$$\pi, \quad \varkappa, \quad \rho, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

onde la condizione d'incontro prende la forma

$$(c) \qquad \Lambda\Phi + \mathrm{M}\Psi + \mathrm{N}\mathrm{X} = 0.$$

Eliminando Λ, M, N fra le (b), (c) e la seconda delle (5), si ottiene

$$\begin{vmatrix} \Phi, & \Psi, & \mathrm{X} \\ \pi, & \varkappa, & \rho \\ p, & q, & -1 \end{vmatrix} = 0$$

e la seconda delle (7) si potrà scrivere

$$(d) \qquad (\Lambda r + \mathrm{M} s)\Phi + (\Lambda s + \mathrm{M} t)\Psi = 0.$$

Ora dalle (a), (d) si ottiene

$$\begin{vmatrix} \Phi r + \Psi s, & \Phi s + \Psi t, \\ \Lambda r + \mathrm{M} s, & \Lambda s + \mathrm{M} t, \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi, & \Psi \\ \Lambda, & \mathrm{M} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r, & s \\ s, & t \end{vmatrix} = 0.$$

Il primo determinante di questo prodotto non può essere generalmente nullo, onde resta

$$rt - s^2 = 0,$$

ch'è la nota equazione delle sviluppabili.

Superficie di rivoluzione. L'equazione si ricava dalla seconda delle (5). Ammettendo che l'asse della superficie passi per l'origine degli assi mobili e che questa concida con l'origine dei fissi, si ha $\lambda = \mu = \nu = 0$ e la cennata equazione si riduce a

$$(\rho y - \kappa z)p + (\pi z - \rho x)q = \kappa x - \pi y,$$

ove π, κ, ρ si debbono riguardare come costanti.

Superficie canali. L'equazione a derivate parziali del prim'ordine di queste superficie, che si ricava di solito riguardandole come inviluppi di sfere, non si può dedurre col processo quì svolto, se non implicando le primitive (1), dapoichè in questo caso l'eliminazione delle a, b, c, fra queste equazioni diventa possibile, e se ne ricava una primitiva, della quale le (5) sono le derivate, e che diventa utile per l'eliminazione delle arbitrarie. Così avviene che nell'equazione finale, oltre alle derivate parziali di z entri la z stessa.

La generatrice è un circolo di raggio R, che supponghiamo tracciato nel piano $\xi\eta$ col centro all'origine degli assi mobili, onde :

$$\varphi = R\cos\theta\,,\qquad \psi = R \operatorname{sen}\theta\,,\qquad \chi = 0$$

$$\varphi' = -R \operatorname{sen}\theta\,,\quad \psi' = R\cos\theta\,,\qquad \chi' = 0,$$

per cui

$$(e)\qquad \Phi^2 + \Psi^2 + X^2 = \varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = R^2.$$

L'origine degli assi mobili rimanga sempre nel piano xy, al quale il piano $\xi\eta$ resti sempre perpendicolare. Si ha quindi

$$c_3 = 0\,;\qquad a_0 a_3 + b_0 b_3 + c_0 c_3 = 0.$$

Il movimento istantaneo è una rotazione, il cui asse è sempre parallelo all'asse z, onde

$$\nu = \pi = \varkappa = 0\,,\qquad \mathrm{N} = 0$$

e si ha

$$(f)\qquad \Lambda\Phi + \mathrm{M}\Psi = 0.$$

La seconda delle (5) diventa

$$(g)\qquad \Lambda p + \mathrm{M} q = 0$$

e dalle (f), (g) si ricava

$$\Phi q - \Psi p = 0.$$

Da questa e dalla prima delle (5) si ottiene

$$\Phi = \frac{Xp}{p^2+q^2},\qquad \Psi = \frac{Xq}{p^2+q^2}.$$

Sostituendo questi valori nella (e), risulta

$$(b) \qquad (1 + p^2 + q^2)\mathrm{X}^2 = R^2(p^2 + q^2).$$

Ora la X si può esprimere in z per mezzo delle (1). Infatti da queste si ricava

$$z = a_3(\varphi - a_0) + b_3(\psi - b_0) + c_3(\chi - c_0)$$

ovvero, per le precedenti eguaglianze,

$$z = a_3\varphi + b_3\psi$$

ed inoltre si ha

$$\mathrm{X} = a_3\varphi' + b_3\psi' = -a_3\psi + b_3\varphi.$$

Da queste si deduce, per note relazioni,

$$\mathrm{X}^2 + z^2 = R^2$$

e la (b) diventa

$$(1 + p^2 + q^2)z^2 = R^2,$$

ch'è l'equazione nota delle superficie canali.

Termina deducendo l'ordine differenziale dell'equazione a derivate parziali generale delle superficie che ammettono una generatrice di forma costante, dapoichè difficoltà insormontabili di eliminazione vietano di poterla formare.

Per brevità di linguaggio si indichino coi simboli θ, τ le equazioni (5), coi simboli θ^2, $\theta\tau$, τ^2 le equazioni (7), e così di seguito analogamente. Così queste equazioni e quelle che si potranno ottenere proseguendo il medesimo processo saranno indicate da simboli, coi quali si può formare il seguente quadro:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \theta, & & \tau, & & & \\
 & & \theta^2, & & \theta\tau, & & \tau^2, & & \\
 & \theta^3, & & \theta^2\tau, & & \theta\tau^2, & & \tau^3, & \\
\theta^4, & & \theta^3\tau, & & \theta^2\tau^2, & & \theta\tau^3, & & \tau^4, \\
\end{array}$$

. . . .

Se ben si considera il modo come queste equazioni vengono successivamente formate, si riconoscerà che l'equazione indicata dal simbolo $\theta^m\tau^n$ conterrà le arbitrarie Φ, Ψ, X e tutte le loro derivate rispetto a θ fino all'ordine m, e dippiù le arbitrarie Λ, M, N, π, $\varkappa$, ρ e tutte le loro derivate rispetto a τ fino all'ordine n, sicchè questa equazione conterrà in tutto $3m + 6n$ arbitrarie.

Intanto è facile verificare che il numero delle equazioni cresce più rapidamente del numero delle arbitrarie, e quindi sarà infine possibile di eliminare quest' ultime, ottenendo in tal guisa equazioni a derivate parziali, che rappresenteranno la condizione, intesa nel senso più largo, che una superficie ammetta una generatrice di forma costante. Evidentemente sarà possibile in più maniere di separare dalle precedenti un gruppo di tali equazioni, che permettano di eliminare tutte le arbitrarie che vi son contenute. Ma allora si presenta la quistione di cercare fra siffatti gruppi quello, o quelli, per cui l'ordine differenziale dell'equazione risultante sia il minimo possibile.

Per risolvere questa quistione osserviamo primieramente che, per separare dal precedente schema gruppi di equazioni che contengano certe arbitrarie, e queste sole, è necessario che coteste arbitrarie non siano scelte comunque, ma che siano le Φ, Ψ, X e tutte le loro derivate rispetto a θ fino ad un cert'ordine m e le Λ, M, N, π, $\varkappa$, ρ e tutte le loro derivate rispetto a τ fino ad un cert'altro ordine n, poichè precisamente in questo modo le arbitrarie compariscono nelle equazioni. Ed allora le equazioni contenenti queste sole arbitrarie sono tutte quelle rappresentate dai simboli $\theta^{\mu}\tau^{\nu}$, ove $\mu = 1, 2, \ldots m$; $\nu = 1, 2, \ldots n$. I simboli di queste equazioni formano nel quadro un parallelogrammo, che ha un vertice nel simbolo $\theta^{m}\tau^{n}$ ed il vertice opposto smussato, ed il loro numero è

$$(m + 1)(n + 1) - 1 = mn + m + n.$$

Per brevità di espressione chiamerò i gruppi di equazioni così fatti *gruppi completi*.

Ora cerchiamo fra i gruppi completi quello, nel quale il numero delle equazioni superi del meno possibile quello delle arbitrarie, mentre l'ordine differenziale sia il minimo possibile. Sia $\theta^{m}\tau^{n}$ il simbolo d'ordine più elevato del gruppo, onde l'ordine differenziale sarà

$$m + n = k.$$

Dovrà esser sodisfatta la diseguaglianza

$$mn + m + n > 3m + 6n,$$

la quale, sostituendo m con $k - n$, ci darà

$$k > n.\frac{n + 3}{n - 2}$$

Dippiù, perchè sia m positivo, è necessario che si abbia

$$k > n.$$

Abbiamo dunque per k due limiti inferiori, dei quali basta tenere il più grande, ch'è il primo dei precedenti.

Il minimo valore positivo dell' espressione $n.\frac{n + 3}{n - 2}$ si ha per

$n = 2 + \sqrt{10}$, ed aggiungendo la condizione di n intero, abbiamo $n = 6$, onde il minimo sudetto sarebbe $6 . \frac{9}{4}$, ed aggiungendo la condizione che questo minimo sia pure intero, ottenghiamo 14. Ora possiamo prendere k uguale al suo limite inferiore 14, salvo a verificare il risultato, ed abbiamo

$$k = 14, \qquad n = 6, \qquad m = 8.$$

Con queste cifre il numero delle equazioni sarà 62 e quello delle arbitrarie 60, onde il valore preso per k risponde alle condizioni richieste. Questo gruppo completo contiene dunque un'equazione di più di quante sono strettamente necessarie, e possiamo omettere quella di ordine più elevato, ch'è rappresentata dal simbolo $\theta^8\tau^6$. Il gruppo rimanente condurrà ad una equazione del 13° ordine.

Or è evidente che nessun altro gruppo potrà dar luogo ad una risultante d'ordine minore di questo, poichè, se un tal gruppo esistesse, dopo l'analisi precedente questo non potrebbe esser completo; ma se fosse incompleto, il gruppo completo contenente le stesse arbitrarie ne permetterebbe *a fortiori* l'eliminazione, e quindi o questo coinciderebbe con quello dianzi ottenuto, o non risponderebbe alla condizione di minimo.

Così resta affermato che

La condizione generale che una superficie ammetta una generatrice di forma costante è rappresentabile con un'equazione a derivate parziali del 13° ordine.

G. Maisano : *Sulle tangenti doppie e d'inflessione della curva generale del 5° ordine.*

Indicando con A, B, C i tre invarianti fondamentali della quintica binaria, le condizioni necessarie e sufficienti perchè questa ammetta due elementi doppi vengono espresse dalle due condizioni:

$$A^2 - 64B = 0, \qquad 2^8.3^2\,C + A^3 = 0. \,(*) \qquad (1)$$

(*) Cfr. G. Maisano: *Sulla forma binaria di quint'ordine.* (*Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, XIV).

Per mezzo dell' *Uebertragungsprincip* dagl'invarianti A, B, C si ottengono i tre contravarianti della quintica ternaria

$$\Phi = (\Theta\Theta' u)^2 u_\theta^4 u_{\theta'}^4,$$

$$\Psi = (\Pi\Pi' u)^2 (\Pi''\Pi''' u)^2 (\Pi\Pi'' u)(\Pi'\Pi''' u)\, u_\pi^6 u_{\pi'}^6 u_{\pi''}^6 u_{\pi'''}^6, \qquad (2)$$

$$\chi = (\Pi\Pi' u)^2 (\Pi\Theta u)(\Pi'\Theta u)\, u_\pi^6 u_{\pi'}^6 u_\theta^4,$$

ponendo simbolicamente

$$f = a_x^5, \quad (abu)^4 a_x b_x = \Theta_x^2 u_\theta^4, \quad (abu)^2 (acu)^2 (bcu)^2 a_x b_x c_x = \Pi_x^3 u_\pi^6. \quad (3)$$

Le condizioni (1) si mutano dunque nelle

$$\Phi^2 - 64\chi = 0, \qquad \Phi^3 + 2^8.3^2\, \Psi = 0 \qquad (4)$$

rappresentanti due curve rispettivamente della 20ª e della 30ª classe, la prima delle quali è l'equazione della curva fondamentale $f = 0$ in coordinate di retta.

Dai risultati ottenuti nella citata Memoria si conchiudono facilmente i seguenti :

I. *Le tangenti d'inflessione della curva generale del 5° ordine $f = 0$ sono tutte le tangenti comuni alle tre curve*

$$\Phi = 0, \qquad \Psi = 0, \qquad \chi = 0,$$

rispettivamente della classe 10ª, 20ª, 30ª.

II. *Le tangenti doppie della curva generale del 5° ordine $f = 0$ sono* *comuni alle due curve* (4), *le quali sono anche toccate dalle tangenti di inflessione della stessa curva* $f = 0$.

III. *Tutte le tangenti comuni alle curve* (4) *sono soltanto quelle ora menzionate e propriamente le tangenti doppie contate due volte e le tangenti d'inflessione contate otto volte.*