

## Zur Bestimmung des mittleren Halbmessers der Erde als Kugel.

Von A. Klingatsch in Leoben.

### 1.

In den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ hat Gauss<sup>1)</sup> die von ihm begründete Theorie der conformen Abbildung zur Übertragung des Rotationsellipsoides auf die Kugel angewendet. Jeder Normalbreite auf dem Ellipsoid entspricht dann ein mittlerer Krümmungshalbmesser, welcher zugleich den dieser Breite entsprechenden Kugelhalbmesser vorstellt. Hiedurch ist die Reduction sphäroidischer Breiten und Längenunterschiede auf sphärische gegeben und lässt sich auch die Berechnung der aus geodätischen Linien gebildeten sphäroidischen Dreiecke auf die Berechnung sphärischer Dreiecke zurückführen.<sup>2)</sup>

Für die Berechnung kleinerer Dreiecksnetze berechnet man in der Regel nicht für jedes Dreieck den besonderen der jeweiligen Breite entsprechenden Kugelhalbmesser  $r$ , da man dann nur einen Näherungswert von  $\frac{1}{r^2}$  auf wenige Stellen braucht, sondern man ersetzt das Rotationsellipsoid durch eine Kugel, für deren Halbmesser der Umstand berücksichtigt wird, dass die verschiedenen Werte der mittleren Radienrectoren der Oberfläche unter sich und mit den Werten des mittleren Krümmungsradius der Oberfläche bis auf Glieder von der Ordnung des Quadrates der Abplattung übereinstimmen. Ein solcher Mittelwert entspricht dann auch sehr nahe dem Radius einer Kugel gleicher Oberfläche, gleichen Inhaltes u. s. f. mit dem Ellipsoid.

Wir wollen nun den Halbmesser einer das Rotationsellipsoid näherungsweise ersetzenden concentrischen Kugel unter der Bedingung bestimmen, dass in jedem Meridianschnitt die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen Ellipsoid und Kugel ein Minimum werde.

<sup>1)</sup> C. F. Gauss Werke, Band IV, Seite 259—340.

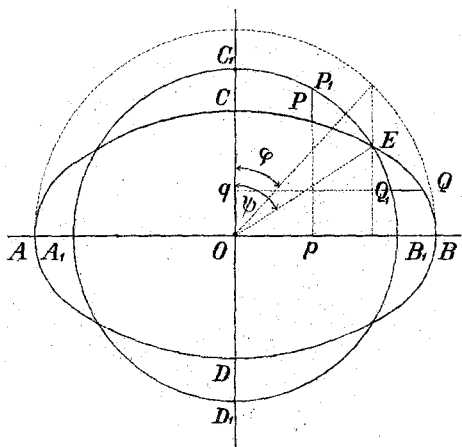
<sup>2)</sup> Gauss, a. a. O. S. 217—258; ferner Bessel, Abhandlungen, Bd. III, S. 1—15.

## 2.

Durch einen beliebigen Punkt  $P$  der Oberfläche des Ellipsoids und die Erdaxe  $CD$  werde eine Ebene gelegt, welche das Ellipsoid in einem Meridian, die Kugel nach einem größten Kreise schneidet.

In dem Theile  $CC_1E$  sollen die Abweichungen correspondierender Punkte  $PP_1$  zwischen Ellipse und Kreis parallel zur

Erdaxe, in dem Theil  $BB_1E$  hingegen parallel zur Schnittlinie  $AB$  der Meridianebene mit der Aequatorebene gemessen werden. Vermöge der Symmetrie genügt es einen Quadranten in Betracht zu ziehen.



Es sei  $O$  der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems,  $OB$  die Richtung der positiven Abscissenaxe,  $OC$  jene der positiven Ordinatenaxe; ferner seien  $\xi \eta$  die Coordinaten für die Ellipsenpunkte,  $x y$  jene für den Kreis.

Für den Ellipsenbogen  $CE$  ist für je zwei correspondierende Punkte  $x = \xi$  und für den Bogen  $BE$ ,  $y = \eta$ .

Der gestellten Aufgabe gemäß soll der Ausdruck

$$\int_C^E (y - \eta)^2 d\sigma + \int_B^E (\xi - x)^2 d\sigma$$

ein Minimum werden, wenn  $d\sigma$  ein Bogenelement der Ellipse ist; dabei erfolgt die Integration in dem ersten Integral nach  $x$ , in dem zweiten nach  $y$ .

Sind nun

$$(1) \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichungen der Ellipse und des Kreises, so nimmt mit

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

und

$$(2) \quad f(x, r) = (y - \eta)^2 \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}, \quad f_1(y, r) = (\xi - x)^2 \sqrt{\frac{b^2 + e'^2 y^2}{b^2 - y^2}}$$

der obige Ausdruck die Form an

$$\int_0^{x_1} f(x, r) dx + \int_0^{y_1} f_1(y, r) dy,$$

wo

$$(3) \quad x_1 = a \sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}} \quad \text{und} \quad y_1 = b \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}}.$$

die Coordinaten des Schnittpunktes  $E$  bezeichnen.

Für das Minimum muss nun die Variation der beiden Integrale nach dem Parameter  $r$  verschwinden. Bezeichnen wir also den Wert des ersten Integrals mit  $W$ , den des zweiten mit  $W_1$ , so lautet die Gleichung zur Bestimmung des Kreis-, resp. Kugelhalbmessers

$$(4) \quad \frac{dW}{dr} + \frac{dW_1}{dr} = 0.$$

Da die obere Grenze beider Integrale von  $r$  abhängt, ist

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dr} &= \frac{\partial W}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dr} + \frac{\partial W}{\partial r} = f(x_1, r) \frac{dx_1}{dr} + \frac{\partial W}{\partial r} \\ \frac{dW_1}{dr} &= \frac{\partial W_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dr} + \frac{\partial W_1}{\partial r} = f_1(y_1, r) \frac{dy_1}{dr} + \frac{\partial W_1}{\partial r}. \end{aligned}$$

Nun ist aber für die obere Grenze  $E$  wegen  $y = r$ , bezw.  $\xi = x$

$$f(x_1, r) = 0, \quad f_1(y_1, r) = 0,$$

während  $\frac{dx_1}{dr}$  und  $\frac{dy_1}{dr}$  endliche Werte besitzen, so dass

$$\frac{dW}{dr} = \frac{\partial W}{\partial r} \quad \text{und} \quad \frac{dW_1}{dr} = \frac{\partial W_1}{\partial r}$$

wird.

Da ebenso  $f''(x, r)$  und  $f_1''(y, r)$  innerhalb der Grenzen endlich bleiben, so kann die Gleichung (4) in der Form geschrieben werden

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} \cdot dx + \int_0^{y_1} \frac{\partial f_1(y, r)}{\partial r} \cdot dy = 0.$$

Dabei ist in  $f(x, r)$  lediglich  $y$ , in  $f_1(y, r)$  lediglich  $x$  von  $r$  abhängig.

Die Ausführung der Differentiation nach Gleichung (2) liefert mit

$$\eta = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

die Bedingungsgleichung

$$(5) \quad \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} \cdot dx - \frac{b}{a} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx -$$

$$- \frac{a}{b} \int_0^{y_1} \sqrt{\frac{b^2 + e'^2 y^2}{r^2 - y^2}} dy + \int_0^{y_1} \sqrt{\frac{b^2 + e'^2 y^2}{b^2 - y^2}} dy = 0.$$

### 3.

Um die vier elliptischen Integrale zweiter Gattung in Gleichung (5) auf die Normalform zu bringen, setzen wir in dem ersten

$$(6) \quad x = a \sin \varphi,$$

in dem zweiten

$$(7) \quad x = r \sin \psi, \quad \left(\frac{e}{a}\right) \cdot r = z,$$

wodurch

$$(8) \quad \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} \cdot dx = a E(e, \varphi)$$

und

$$(9) \quad \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx = a E(z, \psi)$$

wird.

Das nächste Integral liefert mit

$$(10) \quad c = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad \text{wo} \quad k = \frac{r e'}{b}$$

und

$$y = r \cdot \cos \psi$$

ist, mit Rücksicht auf die Beziehung

$$(11) \quad \int_0^{\psi} \frac{\cos^2 \psi \, d\psi}{V1 - c^2 \sin^2 \psi} = \frac{E(c, \psi) - (1 - c^2) F(c, \psi)}{c^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} V \frac{b^2 + e'^2 y^2}{r^2 - y^2} \cdot dy = b \cdot V1 + k^2 \left( E\left(c, \frac{\pi}{2}\right) - E(c, \psi) \right).$$

Das letzte Integral endlich führt durch analoge Transformation auf die Formel

$$(12) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} V \frac{b^2 + e'^2 y^2}{b^2 - y^2} \cdot dy = a \left( E\left(e, \frac{\pi}{2}\right) - E(e, \varphi) \right).$$

In dem ersten und letzten, sowie im zweiten und dritten Integral haben  $\varphi$  resp.  $\psi$  dieselbe Bedeutung.

Die Gleichung (5) nimmt dann mit Rücksicht auf (8), (9), (11) und (12) die Form an:

$$(13) \quad a E\left(e, \frac{\pi}{2}\right) = b E(z, \psi) + a V1 + k^2 \left( E\left(c, \frac{\pi}{2}\right) - E(c, \psi) \right).$$

Die linke Seite der Gleichung ist unabhängig von  $r$ , während in den beiden rechtsstehenden Gliedern  $z$ ,  $k$ ,  $c$ ,  $\psi$  vermöge der Gleichungen (3), (7) und (10) durch  $r$  ausgedrückt werden können.

#### 4.

Zur näherungsweisen Bestimmung von  $r$  aus Gleichung (13) entwickeln wir die elliptischen Integrale bis auf das Quadrat des Modulus, setzen also beispielsweise

$$E(c, \psi) = \int_0^{\psi} V1 - c^2 \sin^2 \psi \, d\psi = \psi \left( 1 - \frac{1}{4} c^2 \right) + \frac{1}{8} c^2 \sin 2\psi$$

und bringen damit Gleichung (13) auf die Form

$$(14) \quad M + N\psi = 0,$$

wo

$$M = \frac{1}{2} a \pi \left[ \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 \right) - \left( 1 - \frac{1}{4} c^2 \right) V1 + k^2 \right] - \frac{1}{8} (b z^2 - a c^2 V1 + k^2) \sin 2\psi$$

$$(15) \quad N = a \left( 1 - \frac{1}{4} c^2 \right) V1 + k^2 - b \left( 1 - \frac{1}{4} z^2 \right).$$

Der Rechnung werden die Bessel'schen Erddimensionen zu Grunde gelegt, nämlich

$$\begin{aligned} a &= 6377397,15 \text{ m} & b &= 6356078,96 \text{ m} \\ c^2 &= 0,00667437223 & e'^2 &= 0,00671921880. \end{aligned}$$

Nachdem a priori angenommen werden kann, dass der gesuchte Halbmesser wenig von dem arithmetischen Mittel der Halbachsen des Meridianschnittes abweichen wird, so wurden zunächst  $M$ ,  $N$  und  $\psi$  für die beiden Annahmen

$$r = \begin{cases} 6366700 \\ 6366800 \end{cases}, \text{ demgemäß } \psi = \begin{cases} 45^\circ 2' 7'' \\ 45^\circ 14' 17'' \end{cases}$$

ausgewertet, wodurch auch in Gleichung (14) ein Zeichenwechsel erfolgt.

Zur Übersicht setzen wir die von  $r$  abhängenden Glieder mit Benützung der Schrön'schen Tafeln auf 7 Stellen genau gerechnet, hieher.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a \pi \left(1 - \frac{1}{4} c^2\right) \sqrt{1 + k^2} &= \begin{cases} 10034476 \\ 10034477 \end{cases} \\ \frac{1}{8} b z^2 \sin 2\psi &= \begin{cases} 5285,076 \\ 5285,057 \end{cases} \\ \frac{1}{8} a c^2 \sqrt{1 + k^2} \cdot \sin 2\psi &= \begin{cases} 5356,278 \\ 5356,263 \end{cases} \\ a \left(1 - \frac{1}{4} c^2\right) \sqrt{1 + k^2} &= \begin{cases} 6388146 \\ 6388146 \end{cases} \\ b \left(1 - \frac{1}{4} z^2\right) &= \begin{cases} 6345510 \\ 6345510 \end{cases} \end{aligned}$$

Der geringen Unterschiede wegen können daher für die erste Rechnung  $M$  und  $N$  constant angenommen werden und ergibt sich somit aus Gleichung (14)

$$\psi = 45^\circ 3' 21''$$

und aus

$$\begin{aligned} r &= \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi}} \\ r &= 6366732 \text{ m.} \end{aligned}$$

Mit diesem genäherten Werte von  $r$  wurde die Rechnung diesmal jedoch auf 8 Stellen genau wiederholt, also  $z$ ,  $c$  und damit  $M$  und  $N$  neu berechnet und folgt aus (14)

$$\psi = 45^\circ 3' 19,7''$$

und damit der verbesserte Wert

$$r = 6366731,9 \text{ m,}$$

womit für den vorliegenden Zweck die Rechnung abgebrochen werden kann.

Hält man dem entgegen das arithmetische Mittel

$$\frac{a+b}{2} = 6366738,05,$$

so stimmt der dem Princip der kleinsten Quadratsummen entsprechende Kugelhalbmesser auf etwa 6 m mit dem arithmetischen Mittel der Halbaxen der Meridianellipse überein.

---