7.

Ueber die Sonderung der Wurzeln einer Gleichung.

(Von Herrn Dr. *Umpfenbach* zu Giefsen.)

Die Aufgabe, die Wurzeln einer Gleichung zu sondern, hat schon vielfach die Mathematiker beschäftigt. Bekannt sind die Auflösungen von *Lagrange*, *Fourier*, *Sturm* etc. Diese Auflösungen beruhen jedoch zum Theil auf sehr verwickelten Grundlagen: zum Theil führen sie auch zu sehr combinirten Rechnungen, und es hat daher noch keine derselben so recht Eingang in die Lehrbücher finden wollen. Ich will versuchen, hier ein Verfahren zu entwickeln, welches mir einfacher als die angeführten scheint.

Es sei X ein nach absteigenden ganzen und positiven Potenzen von x geordnetes Polynom von der $n$ten Ordnung. Ich setze voraus, dafs in demselben keine gleichen Factoren von dem ersten Grade in Bezug auf x enthalten sind; wären dergleichen in X enthalten, so liefsen sie sich leicht entdecken und sodann durch Division wegschaffen. Es sei weiter $\frac{dX}{dx}=X'$, $\frac{d^2X}{dx^2}=X''$, ... $\frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}}=X^{(n-1)}$, so wird $X^{(n-1)}$ von dem ersten, $X^{(n-2)}$ von dem zweiten, u. s. w. Grade in Beziehung auf X sein.

Es seien nun an die aus $X^{(n-1)}=0$ gezogene Wurzel von x; $a(n-1)$, $b(n-1)$ die beiden Wurzeln von $X^{(n-2)}=0$, geordnet nach ihrer Gröfse; $a(n-2)$, $b(n-2)$, $c(n-2)$ die drei Wurzeln von $X^{(n-3)}=0$, gleichfalls geordnet nach ihrer Gröfse ....; und endlich a, b, c, d, e, ... die Wurzeln von $X=0$, auf die nämliche Weise geordnet: so ist an begriffen zwischen $a(n-1)$ und $b(n-1)$; $a(n-1)$ ist begriffen zwischen $a(n-2)$ und $b(n-2)$, $b(n-1)$ ist begriffen zwischen $b(n-2)$ und $c(n-2)$, u. s. w.

Um also die Wurzeln von $X=0$ zu finden, bestimmen wir vorerst die Wurzel an von $X^{(n-1)}=0$, substituiren in $X^{(n-2)}$ nach und nach die obere Grenze der Wurzel an, und die untere Grenze; sind diese drei Resultate mit dem nämlichen Zeichen behaftet, so hat $X^{(n-2)}$ keine reellen Wurzeln; ist das Zeichen des Resultates der mittlern Substitution das entgegengesetzte von dem der beiden äufsern, so bestimmen wir die beiden Wurzeln von $X^{(n-2)}=0$; zu welchem Behufe in der Regel die successive Substitution von ganzen Zahlen hinreicht, um die Wurzeln genau bis auf $\frac{1}{10}$ zu bestimmen. Z. B. wenn zwei successive Resultate der Substitution von 3 und 4 $+6$ und -8 wären, so würde man in der Regel sagen können, dafs die Wurzel, genau bis auf $\frac{1}{10}$ ausgedrückt, $3+\frac{6}{14}$, also 3,4 sei.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 7:54 AM

Auf die nämliche Weise fahren wir fort, bis zu der Gleichung $X = 0$; von welcher wir dann die Wurzeln genau bis auf $\frac{1}{20}$ bestimmt und uns so überzeugt haben werden, daſs sie auſser diesen keine reelle Wurzeln mehr haben kann.

Beweis. Es stelle (Fig. 1.) die Curve vor, deren Gleichung $y = X$ ist, so ist klar, daſs in sämmtlichen Puncten, wo sie die Axe der X schneidet, der zugehörige Werth von x eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ ist. Es seien F und E zwei solche aufeinander folgende Puncte, so ist weiter klar, daſs es zwischen F und E einen Punct der krummen Linie geben muſs, in welchem die Tangente der Axe X parallel ist. Einen solchen Punct bestimmen wir aber, indem wir $\frac{dy}{dx} = 0$ setzen. Wenn also $x = OF = c$, $x = OE = d$ Wurzeln von $X = 0$ sind, so ist $x = ON = c' <$ als die eine jener Wurzeln und $>$ als die andere. *Zwischen zwei Wurzeln von* $\mathrm{X} = 0$ *ist also immer eine Wurzel von* $\mathrm{X}' = 0$ *enthalten.*

Zwischen zwei Wurzeln $x = OP = d'$ und $x = OS = e'$ von $X' = 0$ ist nur dann eine Wurzel $x = OG = e$ von $X = 0$ begriffen, wenn die Resultate PQ und RS von $x = d'$ und $x = e'$ in X mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind. Wenn aber $x = OS = e'$ und $x = OT = f'$ zwei aufeinander folgende Wurzeln von $X' = 0$ sind, und wenn die Resultate RS und UT der Substitution dieser Werthe in X mit den nämlichen Zeichen behaftet sind, so findet zwischen R und U kein Durchschnittspunct mit der Axe Statt; es deutet also dieses eine imaginäre Wurzel von $X = 0$ an.

Die Gleichung $X'' = 0$ steht aber zu $X = 0$ in der nämlichen Beziehung, wie $X' = 0$ zu $X = 0$; eben so $X''' = 0$ zu $X'' = 0$, ... Wenn wir also auf diese Weise von $X^{(n-1)}$ ausgehen, so wird hierdurch das Verfahren geboten, welches oben angedeutet worden ist.

Beispiele. Es sei $X = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 16x - 39 = 0$, so ist
$X' = 4x^3 - 24x^2 + 24x + 16$, $X'' = 12x^2 - 48x + 24$, $X''' = 24x - 48$. Die Wurzel von $X''' = 0$ ist hier 2; die Wurzeln von $X'' = 0$ sind 3,4; 0,6; die von $X' = 0$ sind 4,4; 2; —0,4; die von $X = 0$ sind 5,4 und —1,4. Die beiden Wurzeln von $X = 0$, welche zwischen den Wurzeln von $X' = 0$, 4,4 und 2; 2 und — 0,4 fallen sollten, sind also hier imaginär.

Es sei $X = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 7x - 4 = 0$, so ist
$X' = 4x^3 - 15x^2 + 6x + 7$, $X'' = 12x^2 - 30x + 6$, $X''' = 24x - 30$, so ist die Wurzel von $X''' = 0$, 1,25; die von $X'' = 0$ sind 2,2 und 2; die von $X' = 0$ sind 3,0; 1,2; —0,5; die von $X = 0$ sind 3,6; 1,7; 0,5; —1,1.

Gieſsen den 26. Februar 1838.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 7:54 AM