

## Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung.

Von

Rudolf Rothe in Berlin.

Der Mittelwertsatz in seiner einfachsten Form lautet bekanntlich folgendermaßen:

Ist  $f(x)$  für alle reellen Werte der Veränderlichen  $x$  im Innern des Bereiches  $(x \dots x + h)$  eindeutig und differenzierbar und an den Enden des Bereiches noch stetig, dann gibt es im Innern des Bereiches mindestens einen Argumentwert  $\xi = x + \vartheta h$ , wo  $0 < \vartheta < 1$ , derart, daß

$$(M_1) \quad f(x + h) - f(x) = h f'(\xi).$$

Die Größe  $\vartheta$ , von der man in der Regel nicht viel mehr weiß, als daß sie zwischen 0 und 1 gelegen ist, hängt im allgemeinen von den beiden Veränderlichen  $x$  und  $h$  ab. Die Nichtbeachtung dieses an sich selbstverständlichen Umstandes gehört zu den häufigsten Fehlschlüssen, und mancher Scheinbeweis des Taylorschen Satzes und anderer ist darauf zurückzuführen.

Nun gibt es aber Funktionen, z. B.  $f(x) = e^x$ , bei denen  $\vartheta$  nicht von  $x$  abhängt, ja sogar, wie  $f(x) = x^2$ , bei denen  $\vartheta$  überhaupt konstant ist.

Ich habe mir daher im folgenden die Aufgabe gestellt, alle den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes  $(M_1)$  genügenden Funktionen zu bestimmen, bei denen *entweder*  $\vartheta$  einen von  $x$  und  $h$  ganz unabhängigen Wert hat, *oder* nur von  $h$ , aber nicht von  $x$  abhängig ist, *oder drittens* nur von  $x$ , aber nicht von  $h$  abhängt.

Diese Fragestellungen lassen sich verallgemeinern auf die Taylorsche Formel mit dem  $n$ -ten Restgliede in der Lagrangeschen Form und auf den Mittelwertsatz  $n$ -ter Ordnung, worunter ich die Formel verstehe, die aus  $(M_1)$  hervorgeht, wenn auf der linken Seite statt der ersten die  $n$ -te Differenz von  $f(x)$  und auf der rechten entsprechend das Produkt aus  $h^n$  und der  $n$ -ten Ableitung  $f^{(n)}(\xi)$  auftritt. Ich habe mich jedoch

in diesen allgemeineren Fällen begnügt, die Annahme eines konstanten Wertes von  $\vartheta$  zu erledigen.

Die Ergebnisse sind überraschend einfach; die Beweise scheinen mir aber keineswegs so leicht, als daß man die Fragestellungen als bloße Übungsaufgaben zur Differentialrechnung betrachten könnte. Da ich ihnen in der Literatur nicht begegnet bin, glaube ich, sie hier mitteilen zu dürfen.

Wenn  $f(x)$  gegeben ist und die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt, dann läßt sich aus der Formel  $(M_1)$  die zugehörige Funktion  $\xi$  der Argumente  $x$  und  $h$  bestimmen, und damit natürlich auch  $\vartheta(x, h)$ . Aber umgekehrt ist nicht jede vorgegebene Funktion  $\xi(x, h)$ , selbst wenn sie im ganzen Intervall weitgehende Voraussetzungen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit erfüllt, von der Beschaffenheit, daß sich zu ihr eine Funktion  $f(x)$  finden ließe, mit der zusammen sie die Formel  $(M_1)$  des Mittelwertsatzes befriedigte. Ich habe zum Schluß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Funktion  $\xi$  der genannten Beschaffenheit aufgestellt und gezeigt, wie man, wenn sie gegeben ist, die zugehörige Funktion  $f(x)$  zu bestimmen hat.

1. Es seien  $x$  und  $h (\neq 0)$  reell,  $a \leq x \leq b$  und auch  $a \leq x + h \leq b$ , ferner  $f(x)$  für  $a \leq x \leq b$  stetig, für  $a < x < b$  differenzierbar, so gilt der Mittelwertsatz  $(M_1)$  für den Bereich  $(a \dots b)$  und für jeden Teilbereich. In  $(M_1)$  werde jetzt  $\vartheta$  als absolute Konstante, d. h. von  $x$  und von  $h$  unabhängig, betrachtet. Wenn  $x$  im Innern von  $(a \dots b)$  gelegen ist, ist die linke und also auch die rechte Seite von  $(M_1)$  nach  $x$  differenzierbar, mithin ist infolge der Konstanz von  $\vartheta$  die Funktion  $f(x)$  zweimal differenzierbar. Durch beiderseitige Differentiation von  $(M_1)$  nach  $x$  und nach  $h$  ergibt sich

$$(1) \quad \begin{cases} f'(x+h) - f'(x) = hf''(x + \vartheta h), \\ f'(x+h) = hf''(x + \vartheta h) \cdot \vartheta + f'(x + \vartheta h). \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar:

$$f'(x+h)(1 - \vartheta) + \vartheta f'(x) = f'(x + \vartheta h).$$

Die nochmalige Differentiation nach  $h$  liefert weiter

$$(2) \quad f''(x+h)(1 - \vartheta) = f''(x + \vartheta h) \cdot \vartheta.$$

Nun ist  $f''(x)$  im Innern von  $(a \dots b)$  differenzierbar, also stetig, und nach (1) ist folglich auch  $f''(x)$  dort stetig. Demnach ergibt sich aus (2) für  $h \rightarrow 0$

$$f''(x)(1 - 2\vartheta) = 0.$$

Wäre nun  $f''(x)$  identisch gleich Null, so wäre  $f(x)$  linear, und die Formel  $(M_1)$  des Mittelwertsatzes für jeden beliebigen Wert von  $\vartheta$  erfüll-

bar. Dieser triviale Fall soll hier, wie auch im folgenden, ausgeschlossen werden.

*Es muß daher*

$$\vartheta = \frac{1}{2}$$

*sein.*

Nunmehr ergibt sich aus (2)

$$f''(x+h) = f''\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Da  $h$  beliebige Werte annehmen darf, wofern nur  $x + \frac{h}{2}$  und  $x + h$  im Innern von  $(a \dots b)$  gelegen sind, so folgt daraus, daß  $f''(x)$  eine von Null verschiedene Konstante, also

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (\alpha \neq 0)$$

mit konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$  sein muß.

Man überzeugt sich leicht, daß dieses  $f(x)$  wirklich der Formel ( $M_1$ ) mit  $\vartheta = \frac{1}{2}$  genügt.

*Unter allen, die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllenden Funktionen hat nur  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  ( $\alpha \neq 0$ ) die Eigenschaft, diesen Satz mit einem von  $x$  und  $h$  unabhängigen Wert von  $\vartheta$ , nämlich  $\vartheta = \frac{1}{2}$ , zu befriedigen.*

Die geometrische Bedeutung des Ergebnisses liegt auf der Hand: *Unter allen stetigen Kurven, die in jedem Punkte im Innern eines Bereiches  $(a \dots b)$  eine Tangente zulassen, hat allein die Parabel  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  die Eigenschaft, daß es zu jeder Sehne eine parallele Tangente gibt, deren Berührungspunkt, auf die Abszissenachse projiziert, die Strecke zwischen den Projektionen der Sehnenendpunkte immer in demselben Verhältnisse teilt, nämlich halbiert.*

2. In dem Mittelwertsatz ( $M_1$ ) werde jetzt  $\vartheta = \vartheta(h)$  als von  $x$  unabhängig und nur von  $h$  abhängig betrachtet. Es werde  $\vartheta(h)$  als eindeutig und differenzierbar angenommen<sup>1)</sup>; dann gilt dies auch für

$$h \vartheta(h) = \theta(h).$$

Zunächst folgt aus ( $M_1$ ) durch dieselben Überlegungen wie vorher, daß weil  $\vartheta$  von  $x$  nicht abhängt,  $f''(x)$  und daher auch  $f'''(x), \dots$  für  $a < x < b$  vorhanden ist. Durch Differentiation nach  $x$  und nach  $h$  ergibt sich aus ( $M_1$ )

$$(3) \quad \begin{cases} f'(x+h) - f'(x) = h f''(x+\theta), \\ f'(x+h) = f'(x+\theta) + h f''(x+\theta) \cdot \theta', \end{cases}$$

wo  $\theta' = \frac{d\theta}{dh}$  gesetzt ist. Man kann annehmen, daß  $\theta'$  nicht identisch verschwindet, denn sonst wäre  $\theta$  konstant, und aus der vorstehenden Gleichung

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu den Nachtrag dieser Abhandlung.

chung würde sich auch  $f'(x)$  als konstant ergeben, was auf den trivialen Fall der linearen Funktion führen würde. Demnach folgt aus den beiden Gleichungen durch Herausschaffen von  $f''(x + \theta)$ , wie leicht einzusehen,

$$(4) \quad f'(x+h)(1-\theta') + \theta' f'(x) = f'(x+\theta)$$

oder

$$\theta'(f'(x+h) - f'(x)) = f'(x+h) - f'(x+\theta).$$

Nun ist aber diese Gleichung stets nach  $\theta'$  aufzulösen. Um dies zu beweisen, bedenke man, daß  $\theta'$  von  $x$  gänzlich unabhängig ist und nur von  $h$  abhängt, und daß es also erlaubt ist, in dieser Gleichung für  $x$  irgendeinen beliebigen Wert zu wählen, welchen Wert auch  $h$  haben mag, vorausgesetzt, daß nur  $x$  und  $x+h$  im Bereiche  $(a \dots b)$  gelegen sind. Man kann nun aber zu jedem Wert von  $h$  solche Werte von  $x$  angeben, daß  $f'(x+h) - f'(x) \neq 0$  wird. Denn wäre  $f'(x+h) - f'(x) = 0$  erstens für beliebige Werte von  $h$  und von  $x$ , so müßte  $f'(x)$  im ganzen Bereiche konstant sein, was ausgeschlossen war. Wäre aber zweitens für einen bestimmten Wert von  $h$  und beliebige Werte von  $x$

$$f'(x+h) = f'(x),$$

hätte also  $f'(x)$  die Periode  $h$ , so würde aus (4) folgen, daß auch

$$f'(x) = f'(x+\theta) = f'(x+\vartheta h)$$

wäre, d. h.  $f'(x)$  auch die Periode  $\vartheta h$  hätte, die wegen  $\vartheta < 1$  kleiner als  $h$  ist; indem man diese Überlegung wiederholt, würde man folgern, daß  $f'(x)$  eine beliebig kleine Periode hätte, also konstant wäre. Hieraus ergibt sich, daß in jedem Falle  $f'(x+h) - f'(x)$  von Null verschieden ist. Mithin läßt die Gleichung (4) eine Auflösung nach  $\theta'$  zu:

$$\theta' = \frac{f'(x+h) - f'(x+\theta)}{f'(x+h) - f'(x)}.$$

Die rechte Seite, die wie gesagt von  $x$  unabhängig ist, ist nach  $h$  differenzierbar. Es existiert also  $\theta''$ .

Nunmehr folgt aus (4) durch Differentiation nach  $h$ :

$$f''(x+h)(1-\theta') - \theta''(f'(x+h) - f'(x)) = f''(x+\theta) \cdot \theta'$$

oder unter Benutzung von (3)

$$(5_1) \quad f''(x+h)(1-\theta') - f''(x+\theta)(h\theta'' + \theta') = 0,$$

und daher weiter durch Differentiation nach  $x$ :

$$(5_2) \quad f'''(x+h)(1-\theta') - f'''(x+\theta)(h\theta'' + \theta') = 0.$$

Nun können aber, wie sofort ersichtlich, die Größen  $1-\theta'$  und

$h\theta'' + \theta'$  nicht beide zugleich identisch Null sein. Es muß demnach die Determinante der beiden Gleichungen (5<sub>1</sub>) und (5<sub>2</sub>) verschwinden:

$$\begin{vmatrix} f''(x+h) & f''(x+\theta) \\ f'''(x+h) & f'''(x+\theta) \end{vmatrix} = 0.$$

Es kann aber  $f''(x+\theta)$  nicht gleich Null sein, denn nach (3) müßte dann auch  $f'(x+h) - f'(x)$  verschwinden, was der vorhergehenden Überlegung zufolge nicht zutrifft. Infolgedessen kann auch  $f'''(x+h)$  nicht gleich Null sein, wie ein Blick auf die Gleichung (5<sub>1</sub>) lehrt. Mithin läßt sich die vorstehende Determinantengleichung in der Form schreiben:

$$\frac{f'''(x+h)}{f''(x+h)} = \frac{f'''(x+\theta)}{f''(x+\theta)}.$$

Da  $\theta = \vartheta h$  wegen  $\vartheta < 1$  nicht gleich  $h$  sein kann, so wird man

$$\theta = h + p(h)$$

setzen, wo  $p(h) \neq 0$  ist. Dann geht die vorstehende Gleichung mit  $x + h = z$  über in:

$$(6) \quad \frac{f'''(z)}{f''(z)} = \frac{f'''(z+p)}{f''(z+p)}.$$

Aber  $p$  kann keine absolute Konstante sein, sonst wäre nämlich  $\theta' = 1$ ,  $\theta'' = 0$  und daher nach (5<sub>1</sub>)  $f''(x+\theta) = f''(z+p) = 0$ , was wieder auf den Fall der linearen Funktion führen würde. Also ist  $p = p(h)$  veränderlich, und da  $\theta$  differenzierbar, also gewiß stetig ist, so gilt dies auch für  $p(h)$ , und daher kann  $p(h)$  alle Werte eines gewissen Bereiches annehmen. Das hat aber bezüglich der Gleichung (6) zur Folge, daß  $f'''(z):f''(z)$  konstant sein muß. Schreibt man statt  $z$  lieber  $x$ , so ist also

$$\frac{f'''(x)}{f''(x)} = C,$$

worin  $C$  eine Konstante bedeutet. Aus dieser Gleichung läßt sich  $f(x)$  leicht bestimmen.

Zunächst ergibt sich leicht

$$f'(x) = Cf(x) + C_1x + C_2,$$

unter  $C_1, C_2$  Konstanten verstanden. Die Integration dieser linearen Differentialgleichung erster Ordnung liefert auf bekannte Weise

$$f(x) = C_3 e^{Cx} - \frac{C_1}{C} \left(x + \frac{1}{C}\right) - \frac{C_2}{C},$$

falls  $C \neq 0$ , und

$$f(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

falls  $C = 0$  ist;  $C_3$  bedeutet eine dritte Integrationskonstante.

Die quadratische Funktion  $f(x)$  führt auf den in 1. betrachteten Fall zurück, wo  $\vartheta$  von  $h$  unabhängig den Wert  $\frac{1}{2}$  hat; dieser Fall ist also bereits erledigt.

Der Fall  $C \neq 0$  liefert mit anderer Bezeichnung der Konstanten das Ergebnis

$$f(x) = ce^{ax} + \beta x + \gamma \quad (a \neq 0).$$

Man wird nun noch zu prüfen haben, ob diese Funktion  $f(x)$  wirklich den Mittelwertsatz mit  $\vartheta = \vartheta(h)$  befriedigt. In der Tat ergibt sich durch Einsetzen der vorstehenden Funktion  $f(x)$  in die Formel ( $M_1$ ):

$$e^{ah} - 1 = \alpha h e^{a\vartheta h}.$$

Daraus folgt

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha h} \cdot \log \frac{e^{ah} - 1}{\alpha h};$$

$\vartheta$  ist also von  $x$  nicht abhängig, sondern nur von  $h$ , und auch nicht konstant.

Sonach gilt folgender Satz:

*Unter allen, die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllenden Funktionen hat nur*

$$f(x) = ce^{ax} + \beta x + \gamma \quad (a \neq 0)$$

*die Eigenschaft, diesen Satz mit einem nicht von  $x$ , sondern nur von  $h$  abhängigen nicht konstanten Werte von  $\vartheta$ , nämlich*

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha h} \cdot \log \frac{e^{ah} - 1}{\alpha h}$$

*zu befriedigen. Auch dieses Ergebnis läßt sich geometrisch deuten.*

3. Es sei jetzt  $\vartheta = \vartheta(x)$  nur von  $x$ , dagegen nicht von  $h$  abhängig;  $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dx}$  werde als vorhanden angenommen. Die linke Seite der Gleichung

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi) \quad (\xi = x + \vartheta h)$$

ist für  $h \neq 0$  und für jeden festen Wert von  $x$  im Bereiche  $a < x < b$  in bezug auf  $h$  stetig und differenzierbar, und da das Argument  $\xi$  als lineare Funktion von  $h$  für jeden festen Wert von  $x$  in bezug auf  $h$  ebenfalls stetig und differenzierbar ist, so gilt das gleiche für  $f'(\xi)$ , d. h. es ist  $f''(x)$  im Innern des Bereiches  $a < x < b$  vorhanden. Nunmehr ergibt die Differentiation von ( $M_1$ ) nach  $h$  und nach  $x$  die beiden Gleichungen

$$f'(x+h) = f'(x + \vartheta h) + h f''(x + \vartheta h) \cdot \vartheta,$$

$$f'(x+h) - f'(x) = h f''(x + \vartheta h) \cdot (1 + \vartheta' h).$$

Aus der ersten folgt wegen  $0 < \vartheta$  sofort, daß für  $h \neq 0$  auch  $f''(\xi)$ , d. h.  $f''(x)$  für  $a < x < b$  stetig ist. In der zweiten Gleichung kann der

Faktor von  $f''(x + \vartheta h)$  nicht für jeden Wert von  $h$  verschwinden. Mit hin läßt sich  $f''(x + \vartheta h)$  eliminieren, und man erhält auf diese Weise

$$(1 + \vartheta' h - \vartheta) f'(x + h) + \vartheta f'(x) = (1 + \vartheta' h) f'(x + \vartheta h).$$

Die nochmalige Differentiation nach  $h$  liefert

$$\vartheta' f'(x + h) + (1 + \vartheta' h - \vartheta) f''(x + h) = \vartheta' f'(x + \vartheta h) + (1 + \vartheta' h) f''(x + \vartheta h) \cdot \vartheta.$$

Jetzt ist es zweckmäßig,  $h$  nach Null konvergieren zu lassen. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf die Stetigkeit von  $f''(x)$

$$(1 - \vartheta) f''(x) = f''(x) \vartheta,$$

und da das identische Verschwinden von  $f''(x)$  wieder auf die lineare Funktion führen würde, so bleibt nur

$$\vartheta = \frac{1}{2}$$

übrig, d. h. es ergibt sich nichts anderes als der in 1. besprochene Fall des konstanten  $\vartheta$ . Sonach folgt der Satz:

*Es gibt keine, die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllende Funktion, für die dieser Satz mit einem nur von  $x$ , nicht von  $h$  abhängigen und nicht konstanten  $\vartheta$  zu befriedigen wäre.*

4. Zu diesen Ergebnissen sind noch einige Bemerkungen zu machen. Erstens ist der in den Resultaten von 1. und 2. auftretende lineare Anteil  $\beta x + \gamma$  überflüssig. Denn wenn ganz allgemein der Mittelwertsatz ( $M_1$ ) für eine Funktion  $f(x)$  erfüllt ist, ist er es auch für die Funktion  $f(x) + \beta x + \gamma$  und umgekehrt, wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugen kann. Zweitens kommt es auch weder auf die Maßeinheit von  $x$ , noch auf die von  $f(x)$  an, d. h. auch  $C f(\alpha x)$ , wo  $C, \alpha$  Konstanten sind, genügt dem Mittelwertsatz. Um das einzusehen, braucht man in ( $M_1$ ) nur  $\alpha x$  statt  $x$  und zugleich  $\alpha h$  statt  $h$  zu setzen, während der Faktor  $C$  von selbst herausfällt. Wenn daher der Mittelwertsatz für die Funktion  $f(x)$  gültig ist, so genügt ihm auch die Funktion

$$C f(\alpha x) + \beta x + \gamma$$

und umgekehrt. Demnach ist es ohne Beschränkung der Allgemeinheit erlaubt,  $\beta = \gamma = 0$  und  $C = \alpha = 1$  anzunehmen.

Dies vorausgeschickt, kann man jetzt die gefundenen Ergebnisse so aussprechen:

*Der Mittelwertsatz wird für konstantes  $\vartheta$  nur durch die Parabel  $f(x) = x^2$  und nur mit  $\vartheta = \frac{1}{2}$  erfüllt; für nicht konstantes  $\vartheta = \vartheta(h)$  nur durch die Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$  und nur mit  $\vartheta = \frac{1}{h} \log \frac{e^h - 1}{h}$ ; für nicht konstantes  $\vartheta = \vartheta(x)$  durch keine Funktion.*

5. Daß als konstanter Wert von  $\vartheta$  gerade  $\frac{1}{2}$  und kein anderer zulässig ist, überrascht zuerst. Aber dieser Wert ist derjenige, dem  $\vartheta$  bei festgehaltenem  $x$  zustrebt, wenn  $h$  nach Null konvergiert. Ich habe eine entsprechende Aufgabe ohne Lösung, die sich auf den Taylorschen Satz bezieht, bei Laurent<sup>2)</sup> gefunden und vermute, daß das Ergebnis von Cauchy stammt. Man kann es einfach so beweisen:

$f(x)$  werde für  $a < x < b$  als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt,  $f''(x) \neq 0$ . Dann gilt für  $f(x)$  die Formel ( $M_1$ ); aber diese Formel gilt auch für die Funktion  $f'(x)$  wenigstens für jeden ganz im Innern von  $(a \dots b)$  enthaltenen Bereich und bleibt gültig, wenn man darin  $\vartheta h$  statt  $h$  schreibt. Es bestehen also zugleich folgende Gleichungen:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1),$$

$$f'(x + \vartheta_1 h) - f'(x) = \vartheta_1 h f''(x + \vartheta_1 \vartheta h) \quad (0 < \vartheta_1 < 1).$$

Daher wird

$$\vartheta f''(x + \vartheta_1 \vartheta h) = \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h^2}$$

Nach der Bernoulli-L'Hospitalschen Regel findet sich leicht der Grenzwert der rechten Seite bei festem  $x$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h^2} = \frac{1}{2} f''(x).$$

Da ferner  $0 < \vartheta_1 \vartheta < 1$  beschränkt ist, so wird mit  $h \rightarrow 0$  auch  $\vartheta_1 \vartheta h \rightarrow 0$  und wegen der Stetigkeit von  $f''(x)$  bei festem  $x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f''(x + \vartheta_1 \vartheta h) = f''(x).$$

Daher ist  $\lim_{h \rightarrow 0} \vartheta$  vorhanden und hat den Wert  $\frac{1}{2}$ , falls  $f''(x) \neq 0$  ist, wie vorausgesetzt war.

Daß auch im Falle  $\vartheta = \vartheta(h)$  für  $h \rightarrow 0$

$$\lim \vartheta = \lim \left[ \frac{1}{\alpha h} \log \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h} \right] = \frac{1}{2}$$

wird, ist leicht zu zeigen.

6. Man kann die behandelten Fragestellungen verallgemeinern, indem man vom gewöhnlichen Mittelwertsatz zur *Taylorschen Formel mit Lagrangeschem Restglied* übergeht:  $f(x)$  habe für  $a \leq x \leq b$  stetige Ableitungen bis zur  $(n-1)$ -ten Ordnung einschließlich, und  $f^{(n)}(x)$  sei noch für  $a < x < b$  vorhanden, dann gilt für  $a \leq x \leq b$  und  $a \leq x+h \leq b$

$$(T) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

<sup>2)</sup> H. Laurent, *Traité d'Analyse*, Paris, Gauthier-Villars, 1885, I, S. 96.



wo

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \vartheta h) \quad (0 \leq \vartheta \leq 1).$$

Es werde nun die Frage behandelt: *Gibt es Funktionen  $f(x)$ , für die die Formel (T) durch ein konstantes  $\vartheta$  befriedigt wird?*

Aus (T) folgt unmittelbar, daß  $R_n$  gewiß für solche Werte von  $x$  und von  $h$  nach jeder dieser beiden Veränderlichen differenzierbar ist, für die  $a < x < b$  und  $a < x + h < b$  gilt. Aus der Konstanz von  $\vartheta$  schließt man weiter, daß  $f^{(n+1)}(x)$  und daher alle folgenden Ableitungen von  $f(x)$  im Innern des Bereiches  $(a \dots b)$  vorhanden und also auch stetig sind. Die Differentiationen nach  $x$  und nach  $h$  ergeben, mit  $\xi = x + \vartheta h$ ,

$$\begin{aligned} f'(x+h) - f'(x) &= \frac{h}{1!} f''(x) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi), \\ f'(x+h) - f'(x) &= \frac{h}{1!} f''(x) - \dots - \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) \\ &= \frac{h^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \vartheta + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi). \end{aligned}$$

Man kann daraus  $f^{(n+1)}(\xi)$  entfernen und findet

$$\begin{aligned} \left[ f'(x+h) - f'(x) - \frac{h}{1!} f''(x) - \dots - \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) \right] (1 - \vartheta) \\ + \vartheta \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi). \end{aligned}$$

Jetzt differenziere man  $n$ -mal nach  $h$ , dann verschwindet auf der linken Seite die dort auftretende ganze Funktion  $(n-1)$ -ten Grades von  $h$ , und man erhält

$$(7) \quad f^{(n+1)}(x+h) \cdot (1 - \vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial h^n} [h^{n-1} f^{(n)}(x + \vartheta h)].$$

Die rechte Seite wird nach der Leibnizschen Formel für die  $n$ -te Ableitung eines Produktes entwickelt. Dadurch entsteht eine Summe, in deren Summanden die Ableitungen von  $h^{n-1}$  vorkommen bis zur  $n$ -ten Ordnung einschließlich. Diese enthalten alle den Faktor  $h$ , ausgenommen die  $(n-1)$ -te, die den Wert  $(n-1)!$  hat, und die verschwindet. Man kann also schreiben

$$f^{(n+1)}(x+h) \cdot (1 - \vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \binom{n}{1} f^{(n+1)}(x + \vartheta h) \cdot \vartheta \cdot (n-1)! + (h) \right],$$

wo  $(h)$  ein Aggregat ist, das zugleich mit  $h$  nach Null konvergiert. Jetzt werde  $h \rightarrow 0$  genommen; dann kommt

$$f^{(n+1)}(x) \cdot (1 - \vartheta) = n f^{(n+1)}(x) \cdot \vartheta.$$

Daher ist entweder  $f^{(n+1)}(x) = 0$ , d. h.  $f(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades, wofür die Taylorsche Formel trivial wird und  $\vartheta$  jeden beliebigen Wert annehmen kann, oder es ist

$$1 - \vartheta = n\vartheta,$$

d. h.  $\vartheta$  kann nur den konstanten Wert

$$\vartheta = \frac{1}{n+1} \quad (n > 0)$$

annehmen.

Um die zugehörigen Funktionen  $f(x)$  zu gewinnen, werde die Gleichung (7) beiderseits nochmals nach  $h$  differenziert, so daß sich

$$f^{(n+2)}(x+h) \cdot (1-\vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \binom{n+1}{2} f^{(n+2)}(x+\vartheta h) \cdot \vartheta^2 (n-1)! + (h) \right]$$

ergibt. Der Grenzfall mit  $h \rightarrow 0$  liefert jetzt

$$f^{(n+2)}(x) \cdot (1-\vartheta) = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} f^{(n+2)}(x) \cdot \vartheta^2.$$

Die Einsetzung des Wertes  $\vartheta = \frac{1}{n+1}$  führt zu

$$f^{(n+2)}(x) = 0;$$

$f(x)$  kann daher nur ein Polynom  $(n+1)$ -ten Grades ( $n > 0$ ) von  $x$  sein.

Man überzeugt sich auch leicht davon, daß jedes Polynom  $(n+1)$ -ten Grades den Taylorschen Satz mit dem  $n$ -ten Restgliede in der Lagrangeschen Form bei konstantem Werte  $\vartheta = \frac{1}{n+1}$  befriedigt. Es genügt dazu ersichtlich,  $f(x) = x^{n+1}$  zu wählen.

Das Ergebnis ist hier also das folgende:

*Damit eine den Voraussetzungen des Taylorschen Satzes mit Lagrangeschem Restgliede  $n$ -ter Ordnung genügende Funktion diesen Satz mit einem konstanten Werte von  $\vartheta$  befriedigt, ist notwendig und hinreichend, daß sie ein Polynom  $(n+1)$ -ten Grades ist, und  $\vartheta$  nimmt den Wert  $\frac{1}{n+1}$  an.*

7. Der Wert  $\vartheta = \frac{1}{n+1}$  ist der Grenzwert, dem die Größe  $\vartheta$  des Taylorschen Satzes zustrebt, wenn bei festem  $x$  sich  $h$  der Null nähert, vorausgesetzt, daß  $f^{(n+1)}(x)$  für  $a < x < b$  noch vorhanden und stetig ist, jedoch nicht identisch verschwindet. Dies beweist man genau entsprechend wie in 4. beim Mittelwertsatze: Man wende die Formel ( $M_1$ ) des gewöhnlichen Mittelwertsatzes auf die Funktion  $f^{(n)}(x)$  an, die die

Voraussetzungen dieses Satzes gewiß für jedes ganz im Innern von  $(a \dots b)$  enthaltene Intervall erfüllt; zugleich schreibe man  $\vartheta h$  statt  $\vartheta$ . Dann ist

$$f^{(n)}(x + \vartheta h) = f^{(n)}(x) + \vartheta h f^{(n+1)}(x + \vartheta_1 \vartheta h) \quad (0 \leq \vartheta \leq 1; 0 \leq \vartheta_1 \leq 1).$$

Damit ergibt sich aus der Gleichung (T) für  $h \neq 0$ :

$$\frac{\vartheta}{n!} f^{(n+1)}(x + \vartheta_1 \vartheta h) = \frac{f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) - \frac{h^2}{2!} f''(x) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)}{h^{n+1}}$$

Nun berechnet sich durch wiederholte Anwendung der Bernoulli-L'Hospitalischen Regel der Grenzwert der rechten Seite bei festgehaltenem Werte von  $x$  unschwer zu  $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)$ . Für die linke Seite hat man zu bemerken, daß mit  $h \rightarrow 0$  auch  $\vartheta_1 \vartheta h \rightarrow 0$ , und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von  $f^{(n+1)}(x)$  bei festem  $x$  auch

$$f^{(n+1)}(x + \vartheta_1 \vartheta h) \rightarrow f^{(n+1)}(x)$$

ist. Es existiert also gewiß  $\lim_{h \rightarrow 0} \vartheta$ , und man findet, falls  $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vartheta = \frac{1}{n+1}.$$

8. Der *Mittelwertsatz  $n$ -ter Ordnung* lautet: Ist, für  $a \leq x \leq b$ ,  $f^{(n-1)}(x)$  stetig und für  $a \leq x \leq b$  differenzierbar, so gilt die Formel

$$(M_n) \quad A^n f(x) = h^n \cdot f^{(n)}(x + n\vartheta h) \quad (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

für den Bereich  $(a \dots b)$  und jeden in ihm enthaltenen Teilbereich. Darin bedeutet  $A^n f(x)$  die  $n$ -te Differenz

$$(A) \quad A^n f(x) = \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} f(x + n - \mu h).$$

*Unter welchen Bedingungen ist in der Formel  $(M_n)$  die Größe  $\vartheta$  eine Konstante?*

Wegen der angenommenen Konstanz von  $\vartheta$  folgt aus der Formel  $(M_n)$ , daß im Innern von  $(a \dots b)$  die  $(n+1)$ -te Ableitung von  $f(x)$  und also auch die höheren Ableitungen vorhanden sind. Übrigens werde  $f^{(n+1)}(x)$  als nicht identisch verschwindend angenommen. Denn wenn  $f^{(n+1)}(x)$  für alle betrachteten Werte von  $x$  gleich Null ist, so bedeutet  $f(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades, und für ein solches ist die Formel  $(M_n)$  des Mittelwertsatzes  $n$ -ter Ordnung trivial.

Für das Folgende ist es nützlich, einige nachher zu benutzende Hilfsformeln voranzuschicken.

Setzt man zunächst in (A)  $f(x) = x^n$  und bedenkt, daß  $\Delta^n x^n = n! h^n$ , so erhält man die bekannte Formel <sup>3)</sup>

$$\sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (x + n - \mu h)^\mu = n! h^n.$$

Zur Vereinfachung setze man darin noch  $n - \mu = \lambda$ ,  $h = +1$ , vertausche  $x$  mit  $-x$ , so wird

$$\sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (x - \lambda)^n = n!$$

Durch Integration nach  $x$  zwischen den Grenzen 0 und  $x$  ergibt sich hieraus die Beziehung

$$\sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (x - \lambda)^{n+1} = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} \lambda^{n+1} \cdot (-1)^{n+1} = (n+1)! x.$$

Nimmt man hierin  $x = n$  und vertauscht sodann in der zweiten Summe  $\lambda$  mit  $n - \lambda$ , so folgt nach einer einfachen Zwischenrechnung

$$(a) \quad \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (n - \lambda)^{n+1} = (n+1)! \frac{n}{2},$$

und daher auch

$$\sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} \lambda^{n+1} = (-1)^n (n+1)! \frac{n}{2}.$$

Setzt man dies in die obige Beziehung ein, so ergibt sich leicht

$$(b) \quad \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (x - \lambda)^{n+1} = (n+1)! \left( x - \frac{n}{2} \right).$$

9. Mit Hilfe der Formeln (a) und (b) ist es nun zunächst möglich, zu zeigen, daß auch im Falle des Mittelwertsatzes  $n$ -ter Ordnung der einzige konstante Wert, den  $\vartheta$  annehmen kann, der Wert  $\frac{1}{2}$  ist.

Zu dem Zweck werde auf die Formel (M<sub>n</sub>) das folgende Verfahren angewendet. Man differenziere sowohl nach  $x$  wie auch nach  $h$ , wobei man zur Abkürzung

$$x + n\vartheta h = \xi,$$

$$(-1)^\mu \binom{n}{\mu} f(x + n - \mu h) = \varphi_\mu$$

setze, dann erhält man, mit  $\varphi'_\mu, \varphi''_\mu, \dots$  die Ableitungen in bezug auf  $x$  bezeichnend,

$$\sum_{\mu=0}^n \varphi'_\mu = h^n f^{(n+1)}(\xi),$$

$$\sum_{\mu=0}^n \varphi'_\mu \cdot (n - \mu) = h^n f^{(n+1)}(\xi) \cdot n\vartheta + n h^{n-1} f^{(n)}(\xi).$$

Aus beiden Gleichungen kann man  $f^{(n+1)}(\xi)$  eliminieren. So entsteht

$$\sum_{\mu=0}^n \varphi'_\mu \cdot (n - \mu - n\vartheta) = n h^{n-1} f^{(n)}(\xi).$$

Auf diese Formel wende man dasselbe Verfahren des Differenzierens nach  $x$  und nach  $h$  und der darauffolgenden Elimination von  $f^{(n+1)}(\xi)$  wiederum an, usf. Nach  $p$ -maliger Wiederholung ( $p \leq n$ ) erhält man

$$\sum_{\mu=0}^n \varphi'_\mu^{(p)} \cdot (n - \mu - n\vartheta)^p = n(n-1) \dots (n-p+1) h^{n-p} f^{(n)}(\xi).$$

Durch Schluß von  $p$  auf  $p+1$  kann man leicht die allgemeine Gültigkeit dieser Formel nachweisen.

Für  $p = n$  folgt daraus

$$\sum_{\mu=0}^n \varphi'_\mu^{(n)} \cdot (n - \mu - n\vartheta)^n = n! f^{(n)}(\xi).$$

Die abermalige Differentiation nach  $x$  und  $h$  liefert zwei Gleichungen, aus denen sich jetzt leicht ergibt:

$$(*) \quad \sum_{\mu=0}^n \varphi'_\mu^{(n+1)} \cdot (n - \mu - n\vartheta)^{n+1} = 0.$$

Nun sei  $h \rightarrow 0$ ; dann wird

$$\varphi'_\mu^{(n+1)} \rightarrow (-1)^\mu \binom{n}{\mu} f^{(n+1)}(x),$$

und, da  $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ , so folgt aus der vorhergehenden Gleichung (\*)

$$\sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n - \mu - n\vartheta)^{n+1} = 0.$$

Die Formel (b) ergibt aber für  $x = n(1 - \vartheta)$

$$\sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} (n - \mu - n\vartheta)^{n+1} = (n+1)! \binom{n}{2} \cdot n\vartheta.$$

Es muß also

$$\vartheta = \frac{1}{2}$$

sein, wie behauptet wurde.

10. Nachdem dies festgestellt ist, lautet jetzt die Formel (\*) in 9. für  $\vartheta = \frac{1}{2}$  folgendermaßen:

$$\sum_{\mu=0}^n (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} f^{(n+1)}(x + \bar{n} - \mu h) \left(\frac{n}{2} - \mu\right)^{n+1} = 0.$$

Eine solche Gleichung kann aber für unzählig viele Werte von  $x$  und  $h$  nur stattfinden, wenn  $f^{(n+1)}(x)$  für alle Argumentwerte eine Konstante ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so würden zwischen den  $(n+1)$  von Null verschiedenen Größen

$$(-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \left(\frac{n}{2} - \mu\right)^{n+1} \quad (\mu = 0, 1, \dots, n)$$

unzählig viele verschiedene lineare homogene Gleichungen bestehen können, was unmöglich ist. Ist aber  $f^{(n+1)}(x)$  eine von Null verschiedene Konstante, dann sind alle diese Gleichungen mit der einen übereinstimmend

$$\sum_{\mu=0}^n (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \left(\frac{n}{2} - \mu\right)^{n+1} = 0,$$

und diese ist identisch erfüllt, wie sich sofort aus (b) für  $x = \frac{n}{2}$  ergibt.

Da  $f^{(n+1)}(x)$  eine nicht verschwindende Konstante ist, so folgt, daß  $f(x)$  ein Polynom  $(n+1)$ -ten Grades sein muß. Man stellt leicht fest, daß auch wirklich ein beliebiges Polynom vom  $(n+1)$ -ten Grade den Mittelwertsatz  $n$ -ter Ordnung für ein konstantes  $\vartheta$ , nämlich  $\vartheta = \frac{1}{2}$ , befriedigt. Dazu genügt es,  $f(x) = x^{n+1}$  zu nehmen. Dann ist nämlich nach (A)

$$\Delta^n x^{n+1} = \sum_{\mu=0}^n (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} (x + \bar{n} - \mu h)^{n+1};$$

aber aus (b) folgt, wenn man darin  $\lambda = n - \mu$  setzt und  $-\frac{x}{h}$  statt  $x$  schreibt

$$\sum_{\mu=0}^n (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} (x + \bar{n} - \mu h)^{n+1} = (n+1)! \cdot h^n \left(x + \frac{n}{2} h\right),$$

demnach

$$\Delta^n x^{n+1} = (n+1)! h^n \left(x + \frac{n}{2} h\right).$$

Die rechte Seite ist aber in der Tat gleich  $h^n f^{(n)}(x + n\vartheta h)$  für  $f(x) = x^{n+1}$  und  $\vartheta = \frac{1}{2}$ .

Man kommt also hier zu folgendem Ergebnis: *Damit eine den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes  $n$ -ter Ordnung genügende Funktion diesen Satz mit einem konstanten Werte von  $\vartheta$  befriedigt, ist notwendig und hinreichend, daß sie ein Polynom  $(n+1)$ -ten Grades ist, und  $\vartheta$  nimmt den Wert  $\frac{1}{2}$  an.*

11. Die Formel (b) in 8. kann auch zu dem Nachweise dienen, daß beim Mittelwertsatz  $n$ -ter Ordnung sich ebenfalls  $\vartheta$  dem Grenzwerte  $\frac{1}{2}$  nähert, wenn  $h$  nach Null konvergiert, vorausgesetzt, daß  $f(x)$  im Innern des betrachteten Bereiches noch ein  $(n+1)$ -tes Mal stetig differenzierbar ist und  $f^{(n+1)}(x)$  nicht identisch verschwindet. Dazu gehe man von der Formel  $(M_n)$  in 8. aus und wende auf  $f^{(n)}(x + n\vartheta h)$  den gewöhnlichen Mittelwertsatz an, dessen Voraussetzungen alle erfüllt sind:

$$f^{(n)}(x + n\vartheta h) = f^{(n)}(x) + n\vartheta h \cdot f^{(n+1)}(x + \vartheta_1 n\vartheta h) \quad \left( \begin{array}{l} 0 < \vartheta < 1 \\ 0 < \vartheta_1 < 1 \end{array} \right).$$

Aus dieser Formel und dem Mittelwertsatz  $n$ -ter Ordnung  $(M_n)$  mit Benutzung von (A) entsteht nunmehr

$$\sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} f(x + n - \mu h) - h^n f^{(n)}(x) = n\vartheta \cdot f^{(n+1)}(x + \vartheta_1 n\vartheta h).$$

Was zunächst die rechte Seite dieser Formel betrifft, so ist wegen der Beschränktheit von  $\vartheta_1 \vartheta$  und der Stetigkeit von  $f^{(n+1)}(x)$  für  $h \rightarrow 0$

$$f^{(n+1)}(x + \vartheta_1 n\vartheta h) \rightarrow f^{(n+1)}(x).$$

Die linke Seite wird nach  $(n+1)$ -maliger Differentiation von Zähler und Nenner in bezug auf  $h$  den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} f^{(n+1)}(x + n - \mu h) \cdot (n - \mu)^{n+1}}{(n+1)!} \\ = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \binom{n}{\mu} f^{(n+1)}(x) \cdot (n - \mu)^{n+1} \end{aligned}$$

annehmen, also, der Formel (b) für  $x = n$  zufolge, gleich dem von Null verschiedenen  $f^{(n+1)}(x)$ , multipliziert mit

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot (n+1)! \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

werden. Demnach ist, wie behauptet,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vartheta = \frac{1}{2}.$$

12. Ich kehre noch einmal zum einfachen Mittelwertsatz zurück. Die in 3. bewiesene Tatsache, daß *keine* Funktion  $f(x)$  vorhanden ist, die die Formel  $(M_1)$  des Mittelwertsatzes mit einem von  $\frac{1}{2}$  verschiedenen konstanten Werte von  $\vartheta$ , oder mit einem nur von  $x$ , nicht von  $h$  abhängigen und nicht konstanten  $\vartheta = \vartheta(x)$  befriedigt, veranlaßt die Frage, *welchen* Be-

dingungen  $\vartheta$ , als Funktion von  $x$  und  $h$  betrachtet, genügen muß, damit die Formel des Mittelwertsatzes durch eine Funktion  $f(x)$  überhaupt erfüllt werden könne. Der triviale, bei beliebigem  $\vartheta$  zu befriedigende Fall einer linearen Funktion  $f(x)$  sei wieder ausgeschlossen.

Der Symmetrie des Ergebnisses zuliebe ist für das Folgende die Bezeichnungsweise und die Formulierung der Fragestellung ein wenig abgeändert worden.

Es sei  $\vartheta$  eine auf den Wertbereich  $0 < \vartheta < 1$  beschränkte Funktion der beiden voneinander unabhängigen Veränderlichen  $x_1 = x$  und  $x_2 = x + h$ , die das Innere des quadratischen Bereiches  $a < x_1 < b$ ,  $a < x_2 < b$  durchlaufen mögen. Die Funktion

$$\xi = \xi(x_1, x_2) = x_1 + \vartheta(x_1, x_2) \cdot (x_2 - x_1)$$

nimmt nur Werte des Bereiches  $a < \xi < b$  an.

Es handelt sich dann um folgende Fragestellung:

Welchen Bedingungen muß  $\xi$  als Funktion von  $x_1, x_2$  Genüge leisten, damit es eine Funktion  $f(x)$  gebe, die für  $a \leq x \leq b$  stetig, für  $a < x < b$  differenzierbar ist und die Gleichung

$$(M) \quad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$$

befriedigt?

Zur Vereinfachung der mehr formalen Untersuchungen dieser und der folgenden Nummern mögen aus dem erwähnten quadratischen Bereiche des Paares  $x_1, x_2$  die Punkte ausgeschlossen werden, die den im folgenden mit I. bis IV. bezeichneten Bedingungen nicht genügen. Der übrigbleibende Bereich werde mit  $\mathfrak{B}$  bezeichnet. Es sei

I.  $x_1 \neq x_2$ , d. h.  $h = x_2 - x_1 \neq 0$ .

II. Von der Funktion  $\vartheta(x_1, x_2)$  werde vorausgesetzt, sie besitze für  $a < x_1 < b$ ,  $a < x_2 < b$  die stetigen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = \vartheta_1, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} = \vartheta_2, \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_1} = \vartheta_{12}, \quad \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial x_1} = \vartheta_{121}, \quad \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial x_2} = \vartheta_{122},$$

abgesehen von gewissen Punkten, die jedoch keinen zweidimensionalen Bereich erfüllen dürfen.

Man sieht sogleich, daß die Bedingung II. auch für die Funktion  $\xi(x_1, x_2)$  erfüllt ist. Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \xi}{\partial x_1} = \xi_1$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial x_2} = \xi_2$  können nicht beide identisch verschwinden; denn sonst wäre  $\xi$  eine Konstante, daher auch  $f'(\xi)$ , und nach (M) würde  $f(x)$  eine lineare Funktion sein, was ausgeschlossen war.

Nun ist die linke Seite von (M), also auch die rechte sowohl nach  $x_1$  wie auch nach  $x_2$  partiell differenzierbar, und weil nach II.  $\xi_1$  und  $\xi_2$  vorhanden sind, so existiert auch  $f''(\xi)$ :



$$f''(\xi) = \frac{\partial f'(\xi)}{\partial x_1} : \xi_1 = \frac{\partial f'(\xi)}{\partial x_2} : \xi_2,$$

vorausgesetzt, daß  $\xi_1$  und  $\xi_2$  beide nicht verschwinden. Unter dieser Voraussetzung folgt durch partielle Differentiation aus (M)

$$(M') \quad \begin{cases} f'(x_2) = (x_2 - x_1) f''(\xi) \cdot \xi_2 + f'(\xi), \\ -f'(x_1) = (x_2 - x_1) f''(\xi) \cdot \xi_1 - f'(\xi), \end{cases}$$

und hieraus ergibt sich weiter wegen der Bedingung I.:

$$f''(\xi) = \frac{f'(x_2) - f'(\xi)}{(x_2 - x_1) \cdot \xi_2} = - \frac{f'(x_1) - f'(\xi)}{(x_2 - x_1) \cdot \xi_1}.$$

Es werde ausdrücklich angenommen, daß im Bereiche  $\mathfrak{B}$

III. weder  $\xi_1$  noch  $\xi_2$  verschwinden.

Die gefundenen Ausdrücke für  $f''(\xi)$  lassen nun ersichtlich partielle Ableitungen im ganzen Bereiche  $\mathfrak{B}$  zu, und wegen

$$f'''(\xi) = \frac{\partial f''(\xi)}{\partial x_1} : \xi_1 = \frac{\partial f''(\xi)}{\partial x_2} : \xi_2$$

ist also  $f'''(\xi)$  im ganzen Bereiche  $\mathfrak{B}$  vorhanden. Nachdem dies festgestellt ist, folgt durch beiderseitige Differentiation der ersten Gleichung (M') nach  $x_1$  oder der zweiten nach  $x_2$ :

$$(M'') \quad (x_2 - x_1) f''(\xi) \cdot \xi_{12} + (x_2 - x_1) f'''(\xi) \cdot \xi_1 \xi_2 + f''(\xi) \cdot (\xi_1 - \xi_2) = 0,$$

wobei

$$\xi_{12} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}$$

gesetzt worden ist, entsprechend der Bedingung II.

Aus (M'') schließt man sofort, daß weder  $\xi_1$  noch  $\xi_2$  identisch verschwinden können, es sei denn, daß sie zugleich verschwänden; denn mit  $\xi_1$  ist auch  $\xi_{12}$  identisch Null, und da  $f'''(\xi)$  nicht identisch verschwinden kann, müßte auch  $\xi_2$  gleich Null sein. Nach dem oben Bemerkten war dies aber auszuschließen. Hieraus folgt, daß die Funktion  $\xi$  ihre beiden Argumente wirklich enthalten muß.

Es werde nun noch viertens angenommen, daß im ganzen Bereiche  $\mathfrak{B}$

IV.  $f''(\xi) \neq 0$

sei. An solchen Stellen, wo  $f''(\xi) = 0$  wäre, müßte übrigens auch  $f'''(\xi)$  verschwinden, und danach weiter auch alle noch vorhandenen höheren Ableitungen, wie sich aus (M'') leicht folgern läßt.

Diese Annahme erlaubt es, die Gleichung (M'') in der Form

$$(\alpha) \quad \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} = -\xi$$

zu schreiben, wo  $\zeta$  den Ausdruck

$$(\beta) \quad \zeta = \frac{(x_2 - x_1) \xi_{12} + (\xi_1 - \xi_2)}{(x_2 - x_1) \xi_1 \xi_2}$$

bedeutet. Die Funktion  $\zeta(x_1, x_2)$  existiert im ganzen Bereiche  $\mathfrak{B}$  und läßt dort ersichtlich partielle Ableitungen  $\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \zeta_1$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = \zeta_2$  zu. Aus der Gleichung ( $\alpha$ ) folgt daher, daß in  $\mathfrak{B}$  auch  $f^{(4)}(\xi)$  existiert, und man erhält durch partielle Differentiation nach  $x_1$  und nach  $x_2$  und Elimination von  $f^{(4)}(\xi)$  sofort

$$f''(\xi)(\xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1) = 0,$$

also gewiß im Bereiche  $\mathfrak{B}$ , der Bedingung IV. zufolge,

$$(\gamma) \quad \frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(x_1, x_2)} = \xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1 = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine *partielle Differentialgleichung dritter Ordnung* dar, der  $\xi$  als Funktion der beiden Veränderlichen  $x_1, x_2$  im Bereiche  $\mathfrak{B}$  notwendigerweise zu genügen hat. Wenn man die Eulersche Bezeichnung  $\frac{\partial \xi}{\partial x_1} = p$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial x_2} = q$ , ...,  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} = t$  anwendet, kann man diese Differentialgleichung leicht auf die Form

$$pq \left( p \frac{\partial t}{\partial x_1} - q \frac{\partial r}{\partial x_2} \right) - s(p^2 t - q^2 r) - \frac{q^3 r - p q (p + q) s + p^3 t}{x_2 - x_1} - pq \frac{p^2 - q^2}{(x_2 - x_1)^2} = 0$$

bringen.

Wenn also die Formel (M) des Mittelwertsatzes bestehen soll, so muß der Mittelwert  $\xi$ , als Funktion des Argumentenpaares  $x_1, x_2$  betrachtet, in dem durch die Bedingungen I. bis IV. bestimmten Bereiche der Differentialgleichung ( $\gamma$ ) Genüge leisten.

**13.** Es sei nun umgekehrt  $\xi$  eine Lösung der partiellen Differentialgleichung ( $\gamma$ ). Man bilde daraus nach ( $\beta$ ) die Funktion  $\zeta(x_1, x_2)$ . Zuzufolge ( $\gamma$ ) muß  $\zeta$  sich als Funktion des einen Argumentes  $\xi$  darstellen lassen, wobei nicht ausgeschlossen ist, daß sie sich auch auf eine Konstante (einschließlich Null) reduzieren kann. Nach Bildung dieser Funktion  $\zeta(\xi)$  bestimmt man die Funktion  $f(\xi)$  aus der Gleichung ( $\alpha$ ), was stets durch Quadraturen möglich ist:

$$f(\xi) = C \int^{\xi} du \int^u dv e^{-\int^v \zeta(w) dw} + C_1 \xi + C_2,$$

worin  $C, C_1, C_2$  Integrationskonstanten bedeuten. Man beobachtet, daß  $f(\xi)$  bis auf eine lineare Funktion und einen konstanten Faktor, worauf es nach einer in 4. gemachten Bemerkung nicht ankommt, vollständig bestimmt ist.

Diese Funktion, die man also in der Form

$$(\delta) \quad f(x) = \int_a^x du \int_\beta^u dv e^{-\int_\gamma^v \zeta(\xi) d\xi}$$

schreiben kann, ist aber nicht durch die gegebene Lösung  $\xi$  der Differentialgleichung  $(\gamma)$ , sondern vielmehr durch die Funktion  $\zeta$  des Arguments  $\xi$  bestimmt, die ihrerseits aus  $\xi$  durch Differentiationen erzeugt ist. Es ist daher durchaus nicht bewiesen, daß die Funktion  $f(x)$  der Formel  $(\delta)$  auch wirklich den Mittelwertsatz (M) mit der vorher gegebenen Funktion  $\xi$  von  $x_1, x_2$  befriedigt, selbst wenn diese der Differentialgleichung  $(\gamma)$  genügt. Ich werde sogar nachher ein Beispiel des Gegenteils anführen. Die Differentialgleichung  $(\gamma)$  ist daher *zwar notwendig, jedoch noch nicht hinreichend* dafür, daß zu einer Funktion  $\xi(x_1, x_2)$  eine dem Mittelwertsatz in der Form (M) genügende Funktion  $f(x)$  existiert. Nun ist aber ersichtlich, daß wenn überhaupt eine zu einem gegebenen  $\xi(x_1, x_2)$  gehörige, den Mittelwertsatz befriedigende Funktion  $f(x)$  vorhanden ist, es nur die Funktion  $f(x)$  der Formel  $(\delta)$  sein kann. *Man braucht daher für diese Funktion  $f(x)$  nur noch zu prüfen, ob die Formel des Mittelwertsatzes (M) selbst eine mit der gegebenen übereinstimmende Funktion  $\xi(x_1, x_2)$  ergibt oder eine andere. Im ersten Falle läßt  $\xi(x_1, x_2)$  eine den Mittelwertsatz erfüllende Funktion, nämlich  $f(x)$ , zu; im zweiten Falle gehört zu  $\xi(x_1, x_2)$  überhaupt keine den Mittelwertsatz befriedigende Funktion  $f(x)$ .*

14. Der analytische Zusammenhang, aus dem ersichtlich ist, weshalb die Differentialgleichung  $(\gamma)$  keine hinreichende Bedingung für das Bestehen des Mittelwertsatzes darstellen kann, tritt durch die folgende Betrachtung noch klarer hervor. Man kann nämlich von der partiellen Differentialgleichung  $(\gamma)$  dritter Ordnung das *allgemeine Integral mit drei willkürlichen Funktionen* angeben.

Es ist identisch

$$(\varepsilon) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} ((x_2 - x_1) f'(\xi)) = f''(\xi) (x_2 - x_1) \xi_1 \xi_2 \cdot \left[ \zeta + \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} \right],$$

unter  $\zeta$  den durch  $(\beta)$  definierten Ausdruck verstanden.

Ein erstes Integral der Differentialgleichung  $(\gamma)$  ist aber

$$(\zeta) \quad \xi = \varphi(\xi),$$

wo  $\varphi(\xi)$  eine beliebige differenzierbare Funktion ihres Argumentes bedeutet.

Bestimmt man nun eine Funktion  $f(\xi)$  durch die Formel

$$(\eta) \quad f(\xi) = \int_a^\xi du \int_\beta^u dv e^{-\int_\gamma^v \varphi(t) dt},$$

unter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  irgendwelche Konstanten verstehend, dann ist

$$f'(\xi) = \int_{\beta}^{\xi} dv e^{-\int_{\gamma}^v \varphi(t) dt}$$

und ferner

$$\frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} = -\varphi(\xi).$$

Die Formel ( $\xi$ ) der ersten Integration geht demnach zufolge der Identität ( $\varepsilon$ ) in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ (x_2 - x_1) \int_{\beta}^{\xi} dv e^{-\int_{\gamma}^v \varphi(t) dt} \right] = 0$$

über. Man kann daher eine zweite und dritte Integration ausführen und erhält

$$(\vartheta) \quad (x_2 - x_1) \cdot \int_{\beta}^{\xi} dv e^{-\int_{\gamma}^v \varphi(t) dt} = X_2(x_2) - X_1(x_1),$$

worin  $X_1$ ,  $X_2$  beliebige differenzierbare Funktionen ihrer Argumente bedeuten. Die durch diese Gleichung bestimmte Funktion  $\xi(x_1, x_2)$  stellt *das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung ( $\gamma$ ) dar*.

15. Aus der vorstehenden Formel ergibt sich nun unmittelbar, daß das *allgemeine* Integral ( $\vartheta$ ) den Mittelwertsatz nicht befriedigt. Denn die zugehörige Funktion  $f(x)$  kann zufolge ( $\eta$ ) keine andere sein als

$$f(x) = \int_{\alpha}^x du \int_{\beta}^u dv e^{-\int_{\gamma}^v \varphi(t) dt},$$

die linke Seite von ( $\vartheta$ ) lautet also  $(x_2 - x_1) f'(\xi)$ , und damit die Formel ( $\vartheta$ ) den Mittelwertsatz liefert, dürfen die Funktionen  $X_1$  und  $X_2$  nicht willkürlich bleiben, sondern müssen im Besondern so gewählt werden, daß

$$X_1(x) = X_2(x) = f(x)$$

wird. Nur unter dieser besonderen Annahme genügt die durch ( $\vartheta$ ) gegebene Lösung der Differentialgleichung ( $\gamma$ ) in Verbindung mit der Funktion  $f(x)$  auch dem Mittelwertsatze.

Es ist nicht schwer, die Funktion anzugeben, die für  $x = x_1$  den Wert  $f(x_1)$ , für  $x = x_2$  den Wert  $f(x_2)$  annimmt, der Differentialgleichung

$$\frac{f'''(x)}{f''(x)} + \varphi(x) = 0$$

genügt und die Formel des Mittelwertsatzes

$$(M) \quad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$$

befriedigt, wo  $\xi$  einen Zwischenwert zwischen  $x_1$  und  $x_2$  bedeutet:

$$(f) \quad f(x) = C \int_{x_1}^x du \int_{u_0}^u dv e^{-\int_{v_0}^v \varphi(w) dw} - C \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} du \int_{u_0}^u dv e^{-\int_{v_0}^v \varphi(w) dw} \\ + \frac{(x - x_1) f(x_2) - (x - x_2) f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

hierin treten noch die drei willkürlichen Konstanten  $C, u_0, v_0$  auf. Es bedarf nur eines Beweises für die letzte Behauptung. In der Tat wird

$$f'(x) = C \int_{u_0}^x dv e^{-\int_{v_0}^v \varphi(w) dw} - \frac{C}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} du \int_{u_0}^u dv e^{-\int_{v_0}^v \varphi(w) dw} + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

und dies stimmt für  $x = \xi$  mit der Formel (M) überein, wenn  $\xi$  aus der Gleichung

$$\int_{u_0}^{\xi} dv e^{-\int_{v_0}^v \varphi(w) dw} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} du \int_{u_0}^u dv e^{-\int_{v_0}^v \varphi(w) dw}$$

bestimmt wird. Daß hierin  $\xi$  einen Zwischenwert zwischen  $x_1$  und  $x_2$  bedeutet, ist klar; denn die vorstehende Formel ist nichts anderes als der Mittelwertsatz der Integralrechnung, angewendet auf die im Intervall  $x_1 < u < x_2$  stetige Funktion

$$\int_{u_0}^u dv e^{-\int_{v_0}^v \varphi(w) dw}$$

16. Einige Beispiele mögen das soeben Gesagte näher erläutern. — Die Funktion

$$\xi = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3}}$$

hat die partiellen Ableitungen

$$\xi_1 = \frac{x_2 + 2x_1}{6\xi}, \quad \xi_2 = \frac{2x_2 + x_1}{6\xi}, \quad \xi_{12} = \frac{1 - 6\xi_1 \xi_2}{6\xi}.$$

Damit wird nach ( $\beta$ )

$$\zeta = -\frac{1}{\xi};$$

die Differentialgleichung ( $\gamma$ ) ist also erfüllt. Die zugehörige Funktion  $f(x)$  bestimmt sich aus ( $\delta$ ) zu

$$f(x) = x^3,$$

wobei gleich das überflüssige Beiwerk des konstanten Faktors und des linearen Zusatzes weggelassen worden ist. Man überzeugt sich leicht, daß der Mittelwertsatz für dieses  $f(x) = x^3$  und das obige  $\xi$  wirklich befriedigt wird.

17. Der in 1. besprochene Fall des konstanten  $\vartheta$  erledigt sich hier folgendermaßen. Es sei

$$\xi = x_1 + \vartheta \cdot (x_2 - x_1) \quad (\vartheta \text{ konstant}).$$

Dann ist

$$\xi_1 = 1 - \vartheta, \quad \xi_2 = \vartheta, \quad \xi_{12} = 0,$$

also nach  $(\beta)$

$$\zeta = \frac{1 - 2\vartheta}{(x_2 - x_1)^2 \vartheta (1 - \vartheta)}.$$

Damit ergibt sich

$$\zeta_1 = \frac{1 - 2\vartheta}{(x_2 - x_1)^2 \vartheta (1 - \vartheta)}, \quad \zeta_2 = - \frac{1 - 2\vartheta}{(x_2 - x_1)^2 \vartheta (1 - \vartheta)} = -\zeta_1.$$

Die Funktionaldeterminante  $(\gamma)$  wird

$$\frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(x_1, x_2)} = - (1 - \vartheta) \zeta_1 - \vartheta \zeta_1 = -\zeta_1$$

und verschwindet dann und nur dann, wenn

$$\vartheta = \frac{1}{2},$$

also

$$\zeta = 0$$

ist. Daraus folgt nach  $(\delta)$  unter Weglassung der überflüssigen Teile

$$f(x) = x^2,$$

in Übereinstimmung mit dem in 1. gefundenen Ergebnis.

18. In dem in 2. behandelten Falle ist  $\vartheta$  eine Funktion von  $h = x_2 - x_1$  allein; setzt man wie dort  $h\vartheta = \theta$ , so hängt auch  $\theta$  allein von dem Argument  $x_2 - x_1$  ab. Es wird

$$\xi = x_1 + \theta \quad (\theta = \theta(h)),$$

daher

$$\xi_1 = 1 - \theta', \quad \xi_2 = \theta', \quad \xi_{12} = -\theta'',$$

und damit

$$\zeta = \frac{-(x_2 - x_1)\theta'' + 1 - 2\theta'}{(x_2 - x_1)^2 \theta' (1 - \theta')}.$$

Aus diesem Ausdruck ist ersichtlich, daß  $\zeta$  eine Funktion des Argumentes  $h = x_2 - x_1$  ist. Danach wird

$$\zeta_1 = -\frac{d\zeta}{dh}, \quad \zeta_2 = +\frac{d\zeta}{dh}$$

und die Differentialgleichung  $(\gamma)$  reduziert sich auf

$$\frac{d\zeta}{dh} = 0.$$

Also ist  $\zeta$  eine Konstante, die mit  $-\alpha$  bezeichnet werden möge. Sie darf als nicht verschwindend betrachtet werden, denn der Fall  $\zeta = 0$  ist soeben in 17. erledigt worden. Die Gleichung ( $\alpha$ ) liefert nunmehr

$$\frac{f''''(\xi)}{f''(\xi)} = \alpha$$

und daher

$$f(\xi) = ce^{\alpha\xi} + \beta\xi + \gamma,$$

oder wenn man von den Überflüssigkeiten im vorher erwähnten Sinne absieht,

$$f(x) = e^x.$$

Aus dem Mittelwertsatz ergibt sich wie in 2

$$(\dagger) \quad \theta = \frac{1}{\alpha} \log \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h},$$

womit auch  $\xi = x_1 + \theta$  bestimmt ist.

Dasselbe Resultat liefert die Formel (f) der Nummer 15. Hierin hat man  $\varphi(w) = -\alpha$  konstant zu nehmen und erhält nach Ausführung der Integrationen

$$f(x) = \frac{C}{\alpha^3} \left( e^{\alpha(x-v_0)} - \frac{(x-x_1)e^{\alpha(x_2-v_0)} - (x-x_2)e^{\alpha(x_1-v_0)}}{x_2-x_1} \right) + \frac{(x-x_1)f(x_2) - (x-x_2)f(x_1)}{x_2-x_1},$$

oder einfacher mit anderer Bezeichnung der Konstanten

$$f(x) = c \left( e^{\alpha x} - \frac{(x-x_1)e^{\alpha x_2} - (x-x_2)e^{\alpha x_1}}{x_2-x_1} \right) + \frac{(x-x_1)f(x_2) - (x-x_2)f(x_1)}{x_2-x_1},$$

was natürlich bis auf einen linearen Anteil und bis auf die Maßstabseinheiten mit  $e^x$  übereinstimmt. Daraus folgt

$$f'(x) = c \left( \alpha e^{\alpha x} - \frac{e^{\alpha x_2} - e^{\alpha x_1}}{x_2-x_1} \right) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2-x_1},$$

und der Mittelwertsatz ist für den Wert  $x = \xi$  erfüllt, für den

$$\alpha e^{\alpha \xi} = \frac{e^{\alpha x_2} - e^{\alpha x_1}}{x_2-x_1} = e^{\alpha x_1} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h}$$

oder

$$\xi - x_1 = \theta = \frac{1}{\alpha} \log \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h}$$

ist, in Übereinstimmung mit der Formel ( $\dagger$ ).

19. Will man dagegen  $\xi$  aus der Differentialgleichung ( $\gamma$ ) ermitteln, so bestimmt man wieder am besten zuerst  $\theta$ , wozu hier die Gleichung  $\zeta = -\alpha$  oder

$$(\dagger\dagger) \quad \frac{-h\theta'' + 1 - 2\theta'}{h\theta'(1-\theta')} = -\alpha$$

zu benutzen ist. Man kann sie leicht auf die Form bringen:

$$\frac{(h\theta)'}{1+\alpha h\theta'} = 1 - \theta',$$

und die Integration ergibt

$$1 + \alpha h\theta' = A e^{\alpha h} \cdot e^{-\alpha \theta},$$

worin  $A$  eine willkürliche Konstante bedeutet. Schreibt man dieses Ergebnis in der Form

$$(h e^{\alpha \theta})' = A e^{\alpha h},$$

so findet man durch weitere Integration

$$(\dagger\dagger\dagger) \quad e^{\alpha \theta} = \frac{A e^{\alpha h} + B}{\alpha h},$$

wo  $B$  eine zweite willkürliche Konstante bedeutet.

Durch Vergleich mit dem obigen, aus dem Mittelwertsatze gefundenen Werte  $(\dagger)$  für  $\theta$  zeigt sich, daß

$$A = 1, \quad B = -1$$

sein muß. Für alle anderen Werte von  $A$  oder  $B$  stellt zwar die durch  $(\dagger\dagger\dagger)$  definierte Funktion  $\theta$  von  $h = x_2 - x_1$  eine Lösung der Differentialgleichung  $(\dagger\dagger)$ , und entsprechend  $\xi = x_1 + \theta$  eine Lösung der Differentialgleichung  $(\gamma)$  dar, aber dazu gehört keine Funktion  $f(x)$ , die mit diesem  $\xi$  zusammen den Mittelwertsatz erfüllt. Dies ist ein einfaches Beispiel dafür, daß die Differentialgleichung  $(\gamma)$  nicht ausreicht, um die Brauchbarkeit einer gegebenen Funktion  $\xi$  für die Formel des Mittelwertsatzes festzustellen.

(Eingegangen am 7. Mai 1920.)

### Nachtrag.

Mein Kollege Herr Hamel hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß die in 2. gemachte Voraussetzung der Differenzierbarkeit von  $\vartheta(h)$  möglicherweise noch durch eine weitergehende ersetzt werden könnte. Dies trifft in der Tat zu. Es genügt nämlich, die *Existenz des Grenzwertes*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \vartheta(h + \eta)$$

für alle zulässigen Werte von  $h$  *anzunehmen*, um daraus die Differenzierbarkeit von  $\vartheta(h)$  zu folgern.

Aus  $(M_1)$  ergibt sich für  $\theta = h\vartheta$  zunächst

$$(a) \quad f(x + h + \eta) - f(x + h) = (h + \eta)f'(x + \theta(h + \eta)) - hf'(x + \theta(h)),$$



und da für  $\eta \rightarrow 0$  die linke Seite nach Null konvergiert, so wird

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} f'(x + \theta(h + \eta)) = f'(x + \theta(h)).$$

Nach der in 2. gemachten Bemerkung existiert aber  $f''(x)$  und ist also  $f'(x)$  stetig, und daher folgt weiter

$$(b) \quad f'(x + \lim_{\eta \rightarrow 0} \theta(h + \eta)) = f'(x + \theta(h)),$$

worin der Limes der Voraussetzung zufolge vorhanden ist.

Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist die Funktion  $f'(x)$  eindeutig umkehrbar, d. h. zu jedem Wert von  $f'(x)$  gibt es nur einen Argumentwert  $x$ . Dann folgt sofort

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \theta(h + \eta) = \theta(h),$$

d. h.  $\theta(h)$  und somit auch  $\vartheta(h)$  ist stetig.

Andernfalls kann man

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \theta(h + \eta) = \theta(h) + q(h)$$

setzen, wo  $q(h)$  nicht identisch verschwindet; es wird sich herausstellen, daß diese Annahme auf den trivialen Fall der linearen Funktion  $f(x)$  führt. Schreibt man nämlich für  $x + \theta$  wieder  $x$ , so folgt aus der Formel (b)

$$f'(x + q(h)) = f'(x).$$

Nun kann  $q(h)$  mit variablem  $h$  entweder unzählig viele verschiedene Werte annehmen, woraus dann sofort  $f'(x)$  konstant und  $f(x)$  linear folgen würde. Oder  $q(h)$  nimmt nur einen oder eine endliche Anzahl verschiedener Werte  $q_1, q_2, \dots, q_n$  an; dann wäre  $f'(x)$  periodisch mit den reellen Perioden  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , also entweder wieder überhaupt konstant, oder einfach periodisch mit einer Periode  $p$ , von der  $q_1, q_2, \dots, q_n$  Vielfache sind. Aus

$$f'(x + p) = f'(x)$$

würde aber

$$f(x + p) = f(x) + C$$

mit konstantem  $C$  folgen. Für  $h = p$  liefert die Formel ( $M_1$ ) des Mittelwertsatzes

$$f(x + p) - f(x) = C = pf'(x + \theta(p));$$

mithin ist  $f'(x + \theta(p))$  für jeden Wert von  $x$  im Bereiche  $a < x < b$  konstant, demnach ebenso  $f'(x)$ , also  $f(x)$  auch hier linear.

Auf diese Weise hat sich herausgestellt, daß, abgesehen von dem trivialen Fall der linearen Funktion, aus der Existenz von  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \vartheta(h + \eta)$

die Stetigkeit von  $\vartheta(h)$  folgt. Nunmehr ist die Differenzierbarkeit von  $\vartheta(h)$  leicht zu zeigen. Setzt man

$$\theta(h + \eta) = \theta(h) + \delta,$$

wo  $\delta$  zugleich mit  $\eta$  nach Null konvergiert, so läßt sich die Gleichung (a) in der Form

$$\frac{f(x+h+\eta)-f(x+h)}{\eta} = h \cdot \frac{f'(x+\theta+\delta)-f'(x+\theta)}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\eta} + f'(x+\theta+\delta)$$

schreiben. Für  $\eta \rightarrow 0$  konvergiert die linke Seite nach  $f'(x+h)$ , das letzte Glied der rechten nach  $f'(x+\theta)$ ; während

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f'(x+\theta+\delta)-f'(x+\theta)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f'(x+\theta+\delta)-f'(x+\theta)}{\eta} = f''(x+\theta)$$

wird. Und da diese GröÙe gewiß nicht für unzählig viele Werte ihres Argumentes verschwindet, so ist

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\theta(h+\eta)-\theta(h)}{\eta} = \frac{f'(x+h)-f'(x+\theta(h))}{hf''(x+\theta(h))}$$

vorhanden, w. z. b. w.

Eine ähnliche Betrachtung lieÙe sich übrigens auch bezüglich des in 3. untersuchten Falles  $\vartheta = \vartheta(x)$  anstellen, wo ebenfalls die dort angenommene Differenzierbarkeit dieser Funktion durch eine allgemeinere Voraussetzung ersetzt werden könnte.

(Eingegangen am 8. November 1920.)