Ueber eine mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function.

Von E. Lommel in Erlangen.

---

1. C. Neumann hat in seiner „Theorie der Bessel'schen Functionen"*) unter der Bezeichnung $O^n_{(z)}$ eine rationale ganze Function von $\frac{1}{z}$ vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade eingeführt, welche im Falle eines geraden n der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 O^n}{\partial z^2} + \frac{3}{z} \cdot \frac{\partial O^n}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right) O^n = \frac{1}{z},$$

im Falle eines ungeraden n aber der Gleichung

$$\frac{\partial^2 O^n}{\partial z^2} + \frac{3}{z} \cdot \frac{\partial O^n}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right) O^n = \frac{n}{z^2}$$

als particuläres Integral genügt, und mit der Bessel'schen Function $J^n_{(z)}$ die in der Gleichung

$$2\,\frac{\partial O^n_{(z)}}{\partial z} = O^{n-1}_{(z)} - O^{n+1}_{(z)}$$

ausgesprochene Eigenschaft theilt. Die nahe Verwandtschaft zwischen den Functionen J und O, welche sich in diesem Umstande offenbart, veranlasste Herrn Neumann, der Function J (der Bessel'schen Function erster Art) die Function O als „*Bessel'sche Function zweiter Art* an die Seite zu stellen. In einer bald darauf erschienenen Schrift**) habe ich es für zweckmässiger gehalten, den Namen „*Bessel'sche Function zweiter Art*" auf die Function $Y^n_{(z)}$ zu übertragen, welche neben $J^n_{(z)}$ einer und derselben (der sog. Bessel'schen) Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) y = 0$$

als zweites particuläres Integral Genüge leistet. Seitdem ist diese Bezeichnungsweise, wie ich glaube, allgemein angenommen worden.

---

*) Leipzig, Teubner. 1867.

**) Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig, Teubner. 1868.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, den Zusammenhang der Neumann'schen Function O mit den beiden Arten der Bessel'schen Functionen J und Y genauer zu erforschen. Dieser Untersuchung, bei welcher sich die Function O als specieller Fall einer viel allgemeineren Function herausstellen wird, sind die folgenden Zeilen gewidmet.

2. Ausgehend von dem allgemeinen Integral*)

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[A J^{\nu}_{(z)} + B J^{-\nu}_{(z)}\right]$$

der *reducirten* linearen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{a}{z}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{z^2}\right) y = 0$$

finden wir leicht durch Variation der Constanten das Integral der *vollständigen* linearen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{a}{z}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{z^2}\right) y = k z^{\mu - \frac{a+1}{2}}.$$

Nach der erwähnten Methode erhalten wir zur Bestimmung der Functionen von z, welche jetzt statt der Constanten A und B gesetzt werden müssen, die beiden Gleichungen

$$J^{\nu}\frac{\partial A}{\partial z} + J^{-\nu}\frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

und

$$\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}\cdot\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z}\cdot\frac{\partial B}{\partial z} = k z^{\mu-1},$$

aus welchen sich

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{k z^{\mu-1} J^{-\nu}}{N}$$

und

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{k z^{\mu-1} J^{\nu}}{N}$$

ergiebt, wo zur Abkürzung

$$J^{\nu}\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z} - J^{-\nu}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z} = N$$

gesetzt wurde. Nun ist aber**)

$$J^{\nu}\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z} - J^{-\nu}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z} = -\frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi.$$

Setzt man diesen Werth statt N oben ein und integrirt, so findet man

*) Math. Annalen. Bd. III, S. 481.
**) Math. Annalen. Bd. IV, S. 104.

$$A = \frac{k\pi}{2\sin\nu\pi}\int z^{\mu} J^{-\nu} dz + A_1$$

$$B = -\frac{k\pi}{2\sin\nu\pi}\int z^{\mu} J^{\nu} dz + B_1$$

wo A_1 und B_1 neue willkührliche Constante sind. Das vollständige Integral der Gleichung (1) gewinnt demnach folgende Gestalt:

$$(2) \qquad y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[A_1 J^{\nu} + B_1 J^{-\nu}\right] + \frac{k\pi z^{-\frac{a-1}{2}}}{2\sin\nu\pi}\left(J^{\nu}\int z^{\mu} J^{-\nu} dz - J^{-\nu}\int z^{\mu} J^{\nu} dz\right).$$

Diese Form des Integrals behält jedoch nur solange Geltung, als ν nicht positiv oder negativ ganz $(= \pm n)$ ist. In diesem Falle nämlich genügt der entsprechenden reducirten Gleichung als allgemeines Integral der Ausdruck

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[A J^{n} + B Y^{n}\right],$$

von welchem ausgehend die Rechnung genau so zu führen ist, wie vorhin, mit dem einzigen Unterschiede, dass jetzt überall für die Bessel'sche Function erster Art mit negativem Index die Bessel'sche Function zweiter Art Y eintritt; namentlich hat man jetzt an die Stelle von N den Ausdruck*)

$$J^{n}\frac{\partial Y^{n}}{\partial z} - Y^{n}\frac{\partial J^{n}}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

zu setzen. Als vollständiges Integral ergiebt sich daher im gegenwärtigen Falle

$$(2^{a}) \qquad y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[A_1 J^{n} + B_1 Y^{n}\right] + k z^{-\frac{a-1}{2}}\left(Y^{n}\int z^{\mu} J^{n} dz - J^{n}\int z^{\mu} Y^{n} dz\right).$$

Führen wir nun die Bezeichnungen ein

$$(\mathrm{I}) \qquad S^{\mu,\nu}_{(z)} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(J^{\nu}_{(z)}\int z^{\mu} J^{-\nu}_{(z)}\,.\,dz - J^{-\nu}_{(z)}\int z^{\mu} J^{\nu}_{(z)} dz\right)$$

und

$$(\mathrm{I}^{a}) \qquad S^{\mu,n}_{(z)} = Y^{n}_{(z)}\int z^{\mu} J^{n}_{(z)}\,.\,dz - J^{n}_{(z)}\int z^{\mu} Y^{n}_{(z)} dz,$$

so wird entweder

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[A_1 J^{n} + B_1 Y^{n} + k S^{\mu,n}\right]$$

oder

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}}\left[A_1 J^{\nu} + B_1 J^{-\nu} + k S^{\mu,\nu}\right]$$

*) Math. Annalen Bd. IV, S. 106.

der Differentialgleichung (1) als vollständiges Integral genügen, je nachdem ν eine ganze Zahl ($= \pm n$) ist, oder nicht.

3. Die Function $S_{(z)}^{\mu,\nu}$ ist es nun, deren Eigenschaften hier etwas näher betrachtet werden sollen. Wir bedürfen hierzu neben den beiden Grundgleichungen der Bessel'scheu Functionen

$$\text{(A)} \qquad \frac{2\nu}{z} J_{(z)}^{\nu} = J_{(z)}^{\nu-1} + J_{(z)}^{\nu+1}$$

$$\text{(B)} \qquad 2\frac{\partial J_{(z)}^{\nu}}{\partial z} = J_{(z)}^{\nu-1} - J_{(z)}^{\nu+1}$$

noch einiger Reductionsformeln, welche aus diesen Grundgleichungen unmittelbar folgen. Multiplicirt man nämlich jede derselben mit z^μ und integrirt nach z, so ergiebt sich

$$2\nu\int z^{\mu-1} J^\nu dz = \int z^\mu J^{\nu-1} dz + \int z^\mu J^{\nu+1} dz$$

und

$$2z^\mu J^\nu - 2\mu\int z^{\mu-1} J^\nu dz = \int z^\mu J^{\nu-1} dz - \int z^\mu J^{\nu+1} dz .$$

Durch Addition und Subtraction erhält man hieraus

$$\int z^\mu J^{\nu-1} dz = z^\mu J^\nu - (\mu-\nu)\int z^{\mu-1} J^\nu dz$$

und

$$\int z^\mu J^{\nu+1} dz = -z^\mu J^\nu + (\mu+\nu)\int z^{\mu-1} J^\nu dz$$

oder, wenn man in der ersten $\nu+1$, in der zweiten $\nu-1$ an die Stelle von ν setzt:

$$\text{(C)} \qquad \int z^\mu J^\nu dz = z^\mu J^{\nu+1} - (\mu-\nu-1)\int z^{\mu-1} J^{\nu+1} dz$$

$$\text{(D)} \qquad \int z^\mu J^\nu dz = -z^\mu J^{\nu-1} + (\mu+\nu-1)\int z^{\mu-1} J^{\nu-1} dz .$$

Setzt man dagegen in dem vorletzten Gleichungspaare $\mu+1$ statt μ, und löst jede derselben nach dem zur Rechten vorkommenden Integrale auf, so erhält man

$$\text{(E)} \qquad \int z^\mu J^\nu dz = \frac{z^{\mu+1}}{\mu-\nu+1} J^\nu - \frac{1}{\mu-\nu+1}\int z^{\mu+1} J^{\nu-1} dz$$

$$\text{(F)} \qquad \int z^\mu J^\nu dz = \frac{z^{\mu+1}}{\mu+\nu+1} + \frac{1}{\mu+\nu+1}\int z^{\mu+1} J^{\nu+1} dz .$$

Durch Combination der Gleichung (C) mit (D), nachdem in letzterer μ mit $\mu-1$ und ν mit $\nu+1$ vertauscht worden, ergiebt sich ferner

$$\text{(G)} \int z^\mu J^\nu dz = z^\mu J^{\nu+1} + (\mu-\nu-1) z^{\mu-1} J^\nu - (\mu-\nu-1)(\mu+\nu-1)\int z^{\mu-2} J^\nu d$$

und in gleicher Weise geht

$$\text{(H)}\qquad \int z^\mu J^\nu dz = \frac{z^{\mu+1}}{\mu-\nu+1} J^\nu - \frac{z^{\mu+2}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)} J^{\nu-1} - \frac{1}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)}\int z^{\mu+2} J^\nu dz$$

aus (E) und (F) hervor, nachdem in letzterer $\mu+1$ statt μ und $\nu-1$ statt ν gesetzt worden ist. Diese sämmtlichen Formeln (C bis H) gelten ebenso wie die Gleichungen (A) und (B), aus welchen sie fliessen, sowohl für die Bessel'schen Functionen erter Art J als für diejenigen zweiter Art Y.

4. Gehen wir zur Betrachtung der Function $S^{\mu,\nu}$ über, so ist vor Allem aus (I) ersichtlich, dass

$$\text{(II)}\qquad S^{\mu,-\nu} = S^{\mu,\nu}$$

ist. —

Nun werde in (I) $\mu+2$ statt μ gesetzt, so dass

$$S^{\mu+2,\nu} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(J^\nu\int z^{\mu+2}J^{-\nu}dz - J^{-\nu}\int z^{\mu+2}J^\nu dz\right)$$

hervorgeht. Nach (G) aber ist

$$\int z^{\mu+2}J^\nu dz = z^{\mu+2}J^{\nu+1} + (\mu-\nu+1)z^{\mu+1}J^\nu - (\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)\int z^\mu J^\nu dz\,,$$

und

$$\int z^{\mu+2}J^{-\nu}dz = z^{\mu+2}J^{-\nu+1} + (\mu+\nu+1)z^{\mu+1}J^{-\nu} - (\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)\int z^\mu J^{-\nu}dz\,.$$

Nach Einsetzung dieser Ausdrücke nimmt die obige Gleichung folgende Gestalt an:

$$S^{\mu+2,\nu} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}z^{\mu+2}\left(J^\nu J^{-\nu+1} - J^{\nu+1}J^{-\nu} + \frac{2\nu}{z}J^\nu J^{-\nu}\right) - (\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)S^{\mu,\nu}\,,$$

oder, wenn man aus Gleichung (A)

$$J^{\nu+1} = \frac{2\nu}{z}J^\nu - J^{\nu-1}$$

substituirt

$$S^{\mu+2,\nu} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}z^{\mu+2}\left(J^\nu J^{-\nu+1} + J^{-\nu}J^{\nu-1}\right) - (\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)S^{\mu,\nu}\,.$$

Da nun*)

$$\text{(J)}\qquad J^\nu J^{-\nu+1} + J^{-\nu}J^{\nu-1} = \frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi$$

ist, so hat man

$$\text{(III)}\qquad S^{\mu+2,\nu} = z^{\mu+1} - (\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)S^{\mu,\nu}\,.$$

5. Indem wir ferner in (I) μ durch $\mu-1$ und ν durch $\nu+1$ ersetzen, erhalten wir

*) Math. Annalen Bd. IX, S. 105.

$$S^{\mu-1,\,\nu+1} = -\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(J^{\nu+1}\int z^{\mu-1}J^{-\nu-1}dz - J^{-\nu-1}\int z^{\mu-1}J^{\nu+1}dz\right).$$

Nach (E) und (F) aber ist

$$\int z^{\mu-1}J^{\nu+1}dz = \frac{z^\mu}{\mu-\nu-1}J^{\nu+1} - \frac{1}{\mu-\nu-1}\int z^\mu J^\nu dz\,;$$

$$\int z^{\mu-1}J^{-\nu-1}dz = \frac{z^\mu}{\mu-\nu-1}J^{-\nu-1} + \frac{1}{\mu-\nu-1}\int z^\mu J^{-\nu}dz\,;$$

setzen wir diese Werthe oben ein, indem wir abkürzend

$$\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\int z^\mu J^\nu dz \quad \text{mit} \quad P$$

und

$$\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\int z^\mu J^{-\nu} dz \quad \text{mit} \quad Q$$

bezeichnen, so erhalten wir

$$(\alpha) \qquad (\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu+1} = -(QJ^{\nu+1} + PJ^{-\nu-1})\,.$$

Setzt man in dieser Gleichung $-\nu$ statt ν, und berücksichtigt, dass nach (I)

$$S^{\mu-1,\,-\nu+1} = S^{\mu-1,\,\nu-1}$$

ist, und dass gleichzeitig P in $-Q$ und Q in $-P$ übergeht, so gelangt man zu der Gleichung

$$(\beta) \qquad (\mu+\nu-1)\,S^{\mu-1,\,\nu-1} = QJ^{\nu-1} + PJ^{-\nu+1}\,.$$

Wird von dieser die Gleichung (α) abgezogen, so erhält man unter Rücksichtnahme auf Gleichung (A):

$$(\mu+\nu-1)\,S^{\mu-1,\,\nu-1} - (\mu-\nu-1)\,S^{\mu-1,\,\nu+1} = \frac{2\nu}{z}(QJ^\nu - PJ^{-\nu})$$

oder, weil ja

$$S^{\mu,\,\nu} = QJ^\nu - PJ^{-\nu}$$

ist:

$$\text{(IV)} \quad \frac{2\nu}{z}S^{\mu,\,\nu} = (\mu+\nu-1)\,S^{\mu-1,\,\nu-1} - (\mu-\nu-1)\,S^{\mu-1,\,\nu+1}\,.$$

Addirt man dagegen die Gleichungen (α) und (β), so ergiebt sich im Hinblick auf die Gleichung (B):

$$(\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu-1} + (\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu+1} = 2\left(Q\frac{\partial J^\nu}{\partial z} - P\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z}\right),$$

oder, da

$$\frac{\partial S^{\mu,\,\nu}}{\partial z} = Q\frac{\partial J^\nu}{\partial z} - P\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z}$$

ist,

$$\text{(V.)} \quad 2\frac{\partial S^{\mu,\,\nu}}{\partial z} = (\mu+\nu-1)\,S^{\mu-1,\,\nu-1} + (\mu-\nu-1)\,S^{\mu-1,\,\nu+1}\,.$$

6. Aus der Gleichung (III) folgt

$$(\mu+\nu-1)\,S^{\mu-1,\,\nu-1} = \frac{z^\mu - S^{\mu+1,\,\nu-1}}{\mu-\nu+1}$$

und

$$(\mu-\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu+1}=\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu+1}}{\mu+\nu+1}.$$

Setzt man diese Werthe in (IV) und (V) ein, so erhält man noch:

$$\text{(VI)}\qquad \frac{2\nu}{z}S^{\mu,\,\nu}=\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu-1}}{\mu-\nu+1}-\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu+1}}{\mu+\nu+1},$$

$$\text{(VII)}\qquad 2\frac{\partial S^{\mu,\,\nu}}{\partial z}=\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu-1}}{\mu-\nu+1}+\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu+1}}{\mu+\nu+1}.$$

Indem man die Gleichungen (IV) und (V) zu einander addirt und dann ebenso mit den Gleichungen (VI) und (VII) verfährt, gelangt man ferner zu folgenden Formeln:

$$\text{(VIII)}\qquad \frac{\partial S^{\mu,\,\nu}}{\partial x}+\frac{\nu}{z}S^{\mu,\,\nu}=(\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\,\nu-1},$$

$$\text{(IX)}\qquad \frac{\partial S^{\mu,\,\nu}}{\partial z}+\frac{\nu}{z}S^{\mu,\,\nu}=\frac{z^{\mu}-S^{\mu+1,\,\nu-1}}{\mu-\nu+1}.$$

Die analogen Formeln, welche sich durch Subtraction derselben Gleichungspaare ergeben, unterlassen wir anzuschreiben, weil sie durch Umkehrung des Vorzeichens von ν und unter Berücksichtigung der Relation $S^{\mu,\,-\nu}=S^{\mu,\,\nu}$ unmittelbar aus den vorstehenden Gleichungen hervorgehen. Diese letztere Bemerkung gilt in gleicher Weise auch von den folgenden Gleichungen, welche sich den vorhergehenden aufs engste anschliessen.

Die Gleichungen (VIII) und (IX) können nämlich offenbar auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$\text{(VIII}^{\text{a}}\text{)}\qquad \frac{\partial(z^{\nu}S^{\mu,\,\nu})}{\partial z}=(\mu+\nu-1)z^{\nu}S^{\mu-1,\,\nu-1},$$

$$\text{(IX}^{\text{a}}\text{)}\qquad \frac{\partial(z^{\nu}S^{\mu,\,\nu})}{\partial z}=\frac{z^{\mu+\nu}-z^{\nu}S^{\mu+1,\,\nu-1}}{\mu-\nu+1};$$

sie nehmen eine besonders übersichtliche Gestalt an, wenn man $\sqrt{z}$ an die Stelle von z setzt; denn nach Ausführung dieser Substitution lauten sie:

$$\text{(VIII}^{\text{b}}\text{)}\qquad \frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}}S^{\mu,\,\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z}=\tfrac{1}{2}(\mu+\nu-1)\,z^{\frac{\nu-1}{2}}S^{\mu-1,\,\nu-1}_{(\sqrt{z})},$$

$$\text{(IX}^{\text{b}}\text{)}\qquad \frac{\partial\left(z^{\frac{\nu}{2}}S^{\mu,\,\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z}=\frac{z^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}-z^{\frac{\nu-1}{2}}S^{\mu+1,\,\nu-1}_{(\sqrt{z})}}{2(\mu-\nu+1)},$$

von denen sich z. B. die erstere folgendermassen aussprechen lässt: *Die Function* $z^{\frac{\nu}{2}}S^{\mu,\,\nu}_{(\sqrt{z})}$ *wird nach* z *differentiirt, indem man sowohl* μ

als ν je um 1 vermindert, und noch den Factor $\frac{1}{2}(\mu+\nu-1)$ hinzufügt. In ähnlicher wenn auch etwas umständlicherer Weise lässt sich die Gleichung (IX^b) in Worte fassen.

Wiederholt man diese Operation $n$mal hintereinander, so findet man:

$$(\mathrm{X})\quad \frac{\partial^n\left(z^{\frac{\nu}{2}} S^{\mu,\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\mu+\nu-1)^{n|-2}\, z^{\frac{\nu-n}{2}} S^{\mu-n,\,\nu-n}_{(\sqrt{z})},$$

$$(\mathrm{XI})\quad \frac{\partial^n\left(z^{\frac{\nu}{2}} S^{\mu,\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^n} = \frac{(\mu+\nu-1)^{n-1|-2}}{2^n(\mu-\nu+1)}\, z^{\frac{\mu+\nu-2n+1}{2}} - \frac{z^{\frac{\nu-n}{2}} S^{\mu+n,\,\nu-n}_{(\sqrt{z})}}{2^n(\mu-\nu+1)^{n|2}}.$$

Das Gleichungspaar (VIII) und (IX) im Vereine mit der Relation (II), oder auch jedes der Paare (IV) und (V) und (VI) und (VII), zusammen mit (II) und (III) sind der Differentialgleichung (1) äquivalent; jede dieser Gruppen genügt, um die Function $S^{\mu,\nu}$ zu charakterisiren, und die übrigen hier aufgeführten Gleichungen abzuleiten.

7. Alle diese Gleichungen gelten auch noch, wenn ν eine ganze Zahl ist. Man könnte sich hiervon überzeugen, indem man von der Definition von $S^{\mu,n}$ (Gleichung (I^a)) ausgehend, die nämliche Reihe von Operationen wiederholt, und nur statt der Gleichung (J) die Gleichung*)

$$(\mathrm{Y})\qquad Y^n J^{n+1} - J^n Y^{n+1} = \frac{1}{z}$$

in Anwendung bringt. Diese Wiederholung ist aber unnöthig, weil $S^{\mu,n}$ in der That in $S^{\mu,\nu}$ bereits enthalten, und nur unter der Form $\frac{0}{0}$, welche $S^{\mu,\nu}$ für ein ganzes ν annimmt, verborgen ist. Um dies nachzuweisen, zeigen wir, dass $S^{\mu,n}$ die Grenze ist, welcher sich $S^{\mu,\nu}$ nähert, wenn ν in die ganze Zahl n übergeht, d. h. dass

$$S^{\mu,n} = \lim \frac{\pi}{2\sin(n+\varepsilon)\pi}\left(J^{n+\varepsilon}\int z^\mu J^{-n-\varepsilon} dz - J^{-n-\varepsilon}\int z^\mu J^{n+\varepsilon} dz\right)$$

ist, wo unter n eine beliebige positive ganze Zahl und unter ε eine zum Verschwinden bestimmte Grösse zu verstehen ist.

Vermittelst der Gleichung**)

$$J^\nu = (-1)^n \sum_{p=0}^{p=n} (-2)^p \frac{n^{p|-1}(n+\nu)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{J^{2n+\nu-p}}{z^p}$$

drücken wir zuerst $J^{-n-\varepsilon}$ durch eine endliche Reihe aus, die nur noch Bessel'sche Functionen mit positiven Indices enthält. Es wird nämlich

---

*) Math. Annalen Bd. IV, S. 108.

**) Studien über die Bessel'schen Functionen, S. 9.

$$
\begin{aligned}
J^{-n-\varepsilon} &= (-1)^n \sum (-2)^p \frac{n^{p|-1}(-\varepsilon)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{J^{n-\varepsilon-p}}{z^p} \\
&= (-1)^n \sum 2^p \cdot \frac{n^{p|-1}\varepsilon^{p|1}}{p!} \cdot \frac{J^{n-\varepsilon-p}}{z^p} \\
&= (-1)^n \left[J^{n-\varepsilon} + \varepsilon \sum 2^{p+1} \frac{n^{p+1|-1}(1+\varepsilon)^{p|1}}{(p+1)!} \cdot \frac{J^{n-\varepsilon-p-1}}{z^{p+1}} \right].
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man diese letzte Summe einstweilen mit Σ und berücksichtigt, dass

$$J^{n-\varepsilon} = J^n - \varepsilon \frac{\partial J^n}{\partial n} + k,$$

wo k nur Glieder enthält, die mit der zweiten und höheren Potenzen von ε behaftet sind, so erhält man

$$J^{-n-\varepsilon} = (-1)^n \left[J^n + \varepsilon \left(\sum - \frac{\partial J^n}{\partial n} \right) + k \right].$$

Führt man diesen Ausdruck nebst

$$J^{n+\varepsilon} = J^n + \varepsilon \frac{\partial J^n}{\partial n} + k'$$

oben ein, und lässt bei der Entwickelung jedes Glied bei Seite, welches mit einer höheren als der ersten Potenz von ε multiplicirt ist, so findet man

$$
\begin{aligned}
&J^{n+\varepsilon} \int z^\mu J^{-n-\varepsilon} dz - J^{-n-\varepsilon} \int z^\mu J^{n+\varepsilon} dz \\
&= (-1)^n \varepsilon \left\{ J^n \int z^\mu \left(\sum - 2 \frac{\partial J^n}{\partial n} \right) dz - \left(\sum - 2 \frac{\partial J^n}{\partial n} \right) \int z^\mu J^n dz \right\}.
\end{aligned}
$$

Diesem Ausdruck muss nun noch der Factor

$$\frac{\pi}{2 \sin (n+\varepsilon)\pi},$$

d. i.

$$\frac{\pi}{2 \cos n\pi \sin \varepsilon\pi} = \frac{1}{2(-1)^n \varepsilon}$$

beigefügt und dann $\varepsilon = 0$ gesetzt werden, um $S^{\mu, n}$ zu erhalten. Es ist daher

$$S^{\mu, n} = J^n \int z^\mu \left(\tfrac{1}{2} \sum\nolimits_0 - \frac{\partial J^n}{\partial n} \right) dz - \left(\tfrac{1}{2} \sum\nolimits_0 - \frac{\partial J^n}{\partial n} \right) \int z^\mu J^n dz,$$

worin $\sum_0$ obige Summe bedeutet, nachdem in ihr $\varepsilon = 0$ gesetzt worden ist. In der bereits citirten Schrift über die Bessel'schen Functionen ist nun aber (S. 82) eine Function $L^n_{(z)}$ definirt worden durch die Gleichung

$$L^n_{(z)} = \log z \cdot J^n_{(z)} - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \cdot \frac{n^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{n-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}},$$

d. i.

$$L^n = \log z \cdot J^n - \tfrac{1}{2} \sum\nolimits_0,$$

so dass

$$\tfrac{1}{2} \sum\nolimits_0 = \log z \cdot J^n - L^n$$

gesetzt werden kann. Andrerseits wurde ebendaselbst (S. 77) eine Function $\mathfrak{J}^n_{(z)}$ eingeführt durch die Gleichung

$$\frac{\partial \left(z^{-n} J^n_{(z)} \right)}{\partial n} = z^{-n} \mathfrak{J}^n_{(z)},$$

aus welcher

$$\frac{\partial J^n}{\partial n} = \log z J^n + \mathfrak{J}^n$$

folgt. Hiernach ist

$$\tfrac{1}{2} \sum\nolimits_0 - \frac{\partial J^n}{\partial n} = - \mathfrak{J}^n - L^n.$$

Nach der Math. Annalen Bd. IV, S. 107 gegebenen Definition der Bessel'schen Function zweiter Art aber ist

$$Y^n = \mathfrak{J}^n + L^n.$$

Wir finden also

$$S^{\mu, n} = Y^n \int z^\mu J^n dz - J^n \int z^\mu Y^n dz,$$

denselben Ausdruck, welcher oben ($\mathrm{I^a}$) für $S^{\mu, n}$ bereits angenommen wurde.

8. Zur Entwickelung von $S^{\mu, \nu}$ nach Potenzen von z bedienen wir uns der Recursionsformel (III).

Ihre fortgesetzte Anwendung im Sinne der Erniedrigung des Index μ liefert eine Entwickelung nach fallenden Potenzen von z, nämlich

$$\text{(XII)} \quad S^{\mu, \nu} = z^{\mu - 1} \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p (\mu - \nu - 1)^{p|-2} (\mu + \nu - 1)^{p|-2} z^{-2p}$$
$$+ (-1)^{m+1} (\mu - \nu - 1)^{m+1|-2} (\mu + \nu - 1)^{m+1|-2} S^{\mu - 2m - 2, \nu}.$$

Das Restglied verschwindet und die Reihe bricht ab, so oft entweder $\mu - \nu$ oder $\mu + \nu$ einer positiven ungeraden Zahl $2m + 1$ gleich ist. In diesen beiden Fällen, welche wir hiermit besonders zum Ausdruck bringen:

$$(\mathrm{XIII^a}) \quad S^{2m+1+\nu, \nu} = z^{2m+\nu} \sum (-1)^p m^{p|-1} (m + \nu)^{p|-1} \left(\frac{2}{z}\right)^{2p},$$

$$(\mathrm{XIII^b}) \quad S^{2m+1-\nu, \nu} = z^{2m-\nu} \sum (-1)^p m^{p|-1} (m - \nu)^{p|-1} \left(\frac{2}{z}\right)^{2p},$$

erscheint also $S^{\mu, \nu}$, abgesehen von dem Factor z^ν oder $z^{-\nu}$, als eine rationale Function von z.

9. Um die Function $S^{\mu,\nu}$ nach steigenden Potenzen von z zu entwickeln, schreiben wir die Gleichung (III) in folgender Gestalt:

$$(\mathrm{III}^a)\qquad S^{\mu,\nu} = \frac{z^{\mu+1} - S^{\mu+2,\nu}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)},$$

und erhalten durch ihre wiederholte Anwendung

$$(\mathrm{XIV})\quad S^{\mu,\nu} = \sum_{p=0}^{p=m-1} \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+1}}{(\mu-\nu+1)^{p+1|2}(\mu+\nu+1)^{p+1|2}} + \frac{(-1)^m}{(\mu-\nu+1)^{m|2}(\mu+\nu+1)^{m|2}} \cdot S^{\mu+2m,\nu}.$$

Auch diese Entwickelung bricht ab, sobald μ entweder $= \nu + 1$ oder $= -\nu + 1$ ist. Alsdann hat man nämlich nach (III)

$$S^{\nu+1,\nu} = z^\nu, \qquad S^{-\nu+1,\nu} = z^{-\nu},$$

und es ergeben sich die folgenden beiden endlichen Reihen:

$$(\mathrm{XIII}^\alpha)\quad S^{2m+1+\nu,\nu} = (-1)^m 2^{m|2}(2\nu+2)^{m|2} \sum_{p=0}^{p=m} \frac{(-1)^p z^{\nu+2p}}{2^{p|2}(2\nu+2)^{p|2}},$$

$$(\mathrm{XIII}^\beta)\quad S^{2m+1-\nu,\nu} = (-1)^m 2^{m|2}(2-2\nu)^{m|2} \sum_{p=0}^{p=m} \frac{(-1)^p z^{-\nu+2p}}{2^{p|2}(2-2\nu)^{p|2}},$$

welche sich von denen unter (XIII^a) und (XIII^b) nur durch die umgekehrte Anordnung der Glieder unterscheiden.

10. Setzt man die Entwickelung (XIV) ins Unendliche fort, so gelangt man zu der unendlichen Reihe:

$$s^{\mu,\nu} = \sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+1}}{(\mu-\nu+1)^{p+1|2}(\mu+\nu+1)^{p+1|2}},$$

welche, wenn weder $\mu-\nu$ noch $\mu+\nu$ negativ ungerade ist, für jeden Werth von z convergirt. Diese Reihe genügt sowohl der Differentialgleichung (1) (für $a=1$ und $k=1$) als auch den Relationen (II) bis (XI) und könnte daher als Ausdruck der Function $S^{\mu,\nu}$ angenommen werden, wenn nicht in den beiden vorhergehenden Paragraphen über die specielle Form, welche wir der Function $S^{\mu,\nu}$ geben wollen, bereits stillschweigend Entscheidung getroffen wäre.

Ist nämlich $s^{\mu,\nu}$ irgend ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = z^{\mu-1},$$

welches zugleich den Gleichungen (II) bis (XI) genügt, so wird auch

$$s^{\mu,\nu} + AJ^\nu + BJ^{-\nu}$$

diesen sämmtlichen Bedingungen Genüge leisten, sobald man A und B als Functionen von μ und ν den Gleichungen (II) bis (XI) gemäss auswählt. Diese Bedingungen, welche sich übrigens auf *drei* reduciren, reichen aber zur vollständigen Bestimmung der Functionen A und B nicht hin; es giebt daher unzählig viele besondere Ausdrücke, welche den durch die genannten Gleichungen der Function $S^{\mu,\nu}$ auferlegten Forderungen entsprechen, von denen jeder zur Darstellung von $S^{\mu,\nu}$ gebraucht werden könnte. Durch die Form aber, welche wir in den Paragraphen 8. und 9. für die Function $S^{\mu,\nu}$ in den daselbst behandelten speciellen Fällen angenommen haben, kommt zu den obigen Bedingungen noch eine neue hinzu, nämlich die, dass

$$S^{\nu+1,\nu} = z^{\nu}$$

sei; dadurch werden die Functionen A und B völlig bestimmt, und wir erhalten für $S^{\mu,\nu}$ folgenden Ausdruck:

$$\text{(XV)} \quad S^{\mu,\nu} = \sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+1}}{(\mu-\nu+1)^{p+1|2}(\mu+\nu+1)^{p+1|2}} \\ + \frac{2^{\mu-1}}{\sin\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\left[\sin\frac{\mu+\nu-1}{2}\pi\cdot J^{\nu} - \sin\frac{\mu-\nu-1}{2}\pi\cdot J^{-\nu}\right],$$

welcher, obgleich im Allgemeinen als unendliche Reihe sich darstellend, die in den Formeln (XIII) gegebenen endlichen Entwickelungen als specielle Fälle in sich schliesst.

Der Ausdruck (XV) ist nicht unmittelbar zu gebrauchen, sobald ν einer ganzen Zahl n gleich wird, weil alsdann sein zweites Glied die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Bestimmt man diesen $\frac{0}{0}$-Werth, indem man in ähnlicher Weise verfährt wie in § 7., so erhält man:

$$\text{(XV}^{\text{a}}\text{)} \quad S^{\mu,n} = \sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+1}}{(\mu-n+1)^{p+1|2}(\mu+n+1)^{p+1|2}} \\ + 2^{\mu-1}\cdot\Gamma\left(\frac{\mu-n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+n+1}{2}\right)\left[\cos\frac{\mu-n-1}{2}\pi\cdot J^{n} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\mu-n-1}{2}\pi\cdot Y^{n}\right]$$

11. Die Formel (XV) wird unbrauchbar, sobald $\mu-\nu$, oder $\mu+\nu$, oder beide zugleich negativ ungerade sind.

Wenn nur $\mu-\nu$ negativ ungerade und zwar $= -2m-1$ ist, so kann man zunächst die Formel (XIV) benutzen, um $S^{\mu,\nu}$ auf $S^{\nu-1,\nu}$ zu reduciren; dieselbe liefert nämlich, wenn man $\mu = \nu-2m-1$ setzt:

$$\text{(XVI)} \quad S^{\nu-2m-1,\nu} = -\sum_{p=0}^{p=m-1} \frac{z^{\nu-2m+2p}}{2^{2p+2}m^{p+1|-1}(\nu-m)^{p+1|1}} + \frac{1}{2^{2m}m^{m|-1}(\nu-m)^{m|1}}\cdot S^{\nu-1,\nu}$$

Für $\mu = \nu-1$ aber nimmt $S^{\mu,\nu}$, wie ein Blick auf die Gleichung (III$^{\text{a}}$) zeigt, die Form $\frac{0}{0}$ an, deren Bedeutung man findet, wenn man zur Rechten der Gleichung (III$^{\text{a}}$) Zähler und Nenner nach μ differentiirt und nachher $\mu = \nu-1$ substituirt; d. h. es ist

$$S^{\nu-1,\nu} = \left[\frac{z^{\mu+1}\log z - \dfrac{\partial S^{\mu+2,\nu}}{\partial\mu}}{2\mu+2}\right]_{\mu=\nu-1}.$$

Aus (XV) aber findet man

$$\frac{\partial S^{\mu+2,\nu}}{\partial\mu} = \frac{\partial s^{\mu+2,\nu}}{\partial\mu} + J^{\nu}\frac{\partial A}{\partial\mu} + J^{-\nu}\frac{\partial B}{\partial\mu},$$

wo

$$s^{\mu+2,\nu} = \sum \frac{(-1)^p z^{\mu+2p+3}}{(\mu-\nu+3)^{p+1|2}(\mu+\nu+3)^{p+1|2}},$$

$$A = -\frac{2^{\mu+1}}{\sin\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}+1\right)\cdot\sin\frac{\mu+\nu-1}{2}\pi,$$

$$B = \frac{2^{\mu+1}}{\sin\nu\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}+1\right)\cdot\sin\frac{\mu-\nu-1}{2}\pi$$

ist. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial s^{\mu+2,\nu}}{\partial\mu} = \sum\frac{(-1)^p z^{\mu+2p+3}}{(\mu-\nu+3)^{p+1|2}(\mu+\nu+3)^{p+1|2}}\left\{\log z - \frac{\partial\log(\mu-\nu+3)^{p+1|2}}{\partial\mu} - \frac{\partial\log(\mu+\nu+3)^{p+1|2}}{\partial\mu}\right\},$$

oder, wenn man die Gauss'sche Bezeichnung

$$\frac{\partial\log\Gamma(1+z)}{\partial z} = \psi(z)$$

einführt:

$$\frac{\partial s^{\mu+2,\nu}}{\partial\mu} = \frac{1}{2}\sum\frac{(-1)^p z^{\mu+2p+3}}{(\mu-\nu+3)^{p+1|2}(\mu+\nu+3)^{p+1|2}}\left\{2\log z - \psi\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+p+1\right) + \psi\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\right.$$
$$\left. - \psi\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}+p+1\right) + \psi\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\right\}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\frac{\partial A}{\partial\mu} = -\frac{2^{\mu+1}}{\sin\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}+1\right)\left[\left(\log 2 + \tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\right)\right.$$
$$\left.\cdot\sin\frac{\mu+\nu-1}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu+\nu-1}{2}\pi\right],$$

und

$$\frac{\partial B}{\partial\mu} = \frac{2^{\mu+1}}{\sin\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}+1\right)\left[\left(\log 2 + \tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\right)\right.$$
$$\left.\cdot\sin\frac{\mu-\nu-1}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu-\nu-1}{2}\pi\right].$$

Für $\mu = \nu - 1$ gestalten sich diese Ausdrücke folgendermassen:

$$\left.\frac{\partial s^{\mu+2,\nu}}{\partial\mu}\right]_{\mu=\nu-1} = \frac{1}{2}\sum\frac{(-1)^p z^{\nu+2p+2}}{2^{p+1|2}(2\nu+2)^{p+1|2}}\left\{2\log z - \psi(\nu+p+1) + \psi(\nu) - \psi(p+1) + \psi(0)\right\};$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial\mu}\right]_{\mu=\nu-1} = \left(\log 2 + \tfrac{1}{2}\psi(\nu) + \tfrac{1}{2}\psi(0) + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\nu\pi\right)2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1);$$

$$\left[\frac{\partial B}{\partial \mu}\right]_{\mu=\nu-1} = -\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\cdot 2^\nu\Gamma(\nu+1).$$

Nach Einsetzung dieser Werthe ergiebt sich $S^{\nu-1,\nu}$ in folgender Gestalt:

$$S^{\nu-1,\nu} = \frac{z^\nu}{2\nu}\log z - \frac{1}{4\nu}\sum\frac{(-1)^p z^{\nu+2p+2}}{2^{p+1|2}(2\nu+2)^{p+1|2}}\{2\log z - \psi(\nu+p+1)+\psi(\nu)$$
$$-\psi(p+1)+\psi(0)\}$$
$$-\left(\log 2+\tfrac{1}{2}\psi(\nu)+\tfrac{1}{2}\psi(0)+\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\nu\pi\right)\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{2\nu}\cdot J^\nu$$
$$+\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\cdot\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{2\nu}J^{-\nu},$$

oder auch, mit Rücksicht darauf, dass

$$\sum\frac{(-1)^p z^{\nu+2p+1}}{2^{p|2}(2\nu+2)^{p|2}} = z^\nu - \sum\frac{(-1)^p z^{\nu+2p+2}}{2^{p+1|2}(2\nu+2)^{p+1|2}} = 2^\nu\Gamma(\nu+1)J^\nu$$

ist:

$$\text{(XVII)}\quad S^{\nu-1,\nu} = \frac{1}{4\nu}\sum\frac{(-1)^p z^{\nu+2p+2}}{2^{p+1|2}(2\nu+2)^{p+1|2}}\{\psi(\nu+p+1)-\psi(\nu)+\psi(p+1)-\psi(0)\}$$
$$+\left(\log\frac{z}{2}-\tfrac{1}{2}\psi(\nu)-\tfrac{1}{2}\psi(0)-\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\nu\pi\right)\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{2\nu}\cdot J^\nu$$
$$+\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\cdot\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{2\nu}\cdot J^{-\nu},$$

worin

$$\psi(\nu+p+1)-\psi(\nu) = \frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{\nu+3}+\cdots+\frac{1}{\nu+p+1} = \sum_{q=0}^{q=p}\frac{1}{\nu+q+1}$$

und

$$\psi(p+1)-\psi(0) = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p+1} = \sum_{q=0}^{q=p}\frac{1}{q+1}$$

zu nehmen ist.

Vermöge der Gleichungen (XVI) und (XVII) ist also $S^{\mu,\nu}$, falls $\mu-\nu$, nicht aber gleichzeitig $\mu+\nu$, negativ ungerade ist, durch eine für jedes z convergirende Reihe ausgedrückt. Für den andern Fall, dass $\mu+\nu$, nicht aber zugleich $\mu-\nu$ negativ ungerade ist, gelten die nämlichen Gleichungen (XVI) und (XVII), nachdem in ihnen ν durch $-\nu$ ersetzt ist.

Die Formel (XVII) wird jedoch unbrauchbar, sobald ν positiv oder negativ ganz ist. Dieser Fall aber ist durch die Voraussetzungen, welche ihr zu Grunde liegen, von vorneherein ausgeschlossen. Würde nämlich, während die eine der beiden Summen $\mu+\nu$ und $\mu-\nu$ negativ ungerade ist, ν als ganze Zahl angenommen, so müsste die andere Summe entweder positiv ungerade sein, ein Fall, welcher durch die Formeln (XIII) bereits erledigt ist; oder sie wäre ebenfalls negativ ungerade, welcher Fall noch einer besonderen Erörterung vorbehalten wurde, die im folgenden Paragraphen durchgeführt werden soll.

12. Wenn $\mu-\nu$ und $\mu+\nu$ gleichzeitig negativ ungerade sind, so kann $S^{\mu,\nu}$ stets auf die Form $S^{-n-2m-1,n}$ gebracht werden, wo unter m sowohl als n eine beliebige positive ganze Zahl oder Null zu verstehen ist.

Durch die Gleichung (XVI), welche im gegenwärtigen Falle folgendermassen lautet:

$$\text{(XVIII)}\qquad S^{-n-2m-1,n}=\sum_{p=0}^{p=m-1}\frac{(-1)^p z^{-n-2m+2p}}{(2m)^{p+1|-2}(2m+2n)^{p+1|-2}} + \frac{(-1)^m}{(2m)^{m|-2}(2m+2n)^{m|-2}}S^{-n-1,n},$$

wird zunächst $S^{-n-2m-1,n}$ auf $S^{-n-1,n}$ reducirt, während $S^{-n-1,n}$ leicht auf $S^{-1,0}$ zurückgeführt werden kann. Setzen wir nämlich in Gleichung (X) $\nu=0$ und $\mu=-1$, so erhalten wir

$$\frac{\partial^n S^{-1,0}_{(\sqrt{z})}}{\partial z^n}=(-1)^n\cdot n!\,z^{-\frac{n}{2}}S^{-n-1,n}_{(\sqrt{z})}$$

oder

$$\text{(XIX)}\qquad S^{-n-1,n}_{(\sqrt{z})}=\frac{(-1)^n z^{\frac{n}{2}}}{n!}\cdot\frac{\partial^n S^{-1,0}_{(\sqrt{z})}}{\partial z^n},$$

so dass es sich jetzt nur noch darum handelt, $S^{-1,0}$ in eine convergente Reihe zu entwickeln.

Nach (III^a) erhalten wir

$$S^{\mu,0}=\frac{z^{\mu+1}-S^{\mu+2,0}}{(\mu+1)^2};$$

für $\mu=-1$ nimmt nicht nur dieser Ausdruck, sondern auch

$$\frac{z^{\mu+1}\log z-\frac{\partial S^{\mu+2,0}}{\partial\mu}}{2\mu+2}$$

die Form $\frac{0}{0}$ an; durch nochmalige Differentiation des Zählers und Nenners aber erhalten wir

$$S^{-1,0}=\frac{1}{2}\left[z^{\mu+1}(\log z)^2-\frac{\partial^2 S^{\mu+2,0}}{\partial\mu^2}\right]_{\mu=-1}.$$

Nach (XV^a) aber ist

$$\begin{aligned}S^{\mu+2,0}&=\sum\frac{(-1)^p z^{\mu+2p+3}}{((\mu+3)^{p+1|2})^2}\\&\quad+2^{\mu+1}\left(\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}+1\right)\right)^2\left(\cos\frac{\mu+1}{2}\pi\cdot J^0+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\mu+1}{2}\pi\cdot Y^0\right)\\&=s^{\mu+2,0}+AJ^0+BY^0.\end{aligned}$$

Hiernach ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 s^{\mu+2,0}}{\partial\mu^2}=\sum\frac{(-1)^p z^{\mu+2p+3}}{((\mu+3)^{p+1|2})^2}\left\{\left(\log z-\psi\left(\tfrac{\mu+1}{2}+p+1\right)+\psi\left(\tfrac{\mu+1}{2}\right)\right)^2\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{2}\psi'\left(\tfrac{\mu+1}{2}+p+1\right)+\tfrac{1}{2}\psi'\left(\tfrac{\mu+1}{2}\right)\right\},$$

wo $\psi'(z)$ statt $\frac{\partial\psi(z)}{\partial z}$ gesetzt wurde. Für $\mu=-1$ hat man daher:

$$\left[\frac{\partial^2 s^{\mu+2,0}}{\partial\mu^2}\right]_{\mu=-1}=\sum\frac{(-1)^p z^{2p+2}}{(2^{p+1|2})^2}\left\{(\log z-\psi(p+1)+\psi(0))^2\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{2}\psi'(p+1)+\tfrac{1}{2}\psi'(0)\right\}.$$

Ferner ergiebt sich

$$\left[\frac{\partial^2 A}{\partial\mu^2}\right]_{\mu=-1}=\left(\log 2+\psi(0)\right)^2+\tfrac{1}{2}\psi'(0)-\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2,$$

oder, da

$$\tfrac{1}{2}\psi'(0)=\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\cdots\right)=\tfrac{\pi^2}{12},$$

ist:

$$\left[\frac{\partial^2 A}{\partial\mu^2}\right]_{\mu=-1}=\left(\log 2+\psi(0)\right)^2-\frac{\pi^2}{6};$$

und endlich:

$$\left[\frac{\partial^2 B}{\partial\mu^2}\right]_{\mu=-1}=2\left(\log 2+\psi(0)\right).$$

Wir erhalten demnach für $S^{-1,0}$ die folgende Entwickelung:

$$\text{(XX)}\quad S^{-1,0}=\tfrac{1}{2}(\log z)^2-\tfrac{1}{2}\sum\frac{(-1)^p z^{2p+2}}{(2^{p+1|2})^2}\left\{(\log z-\sigma)^2+\sigma'\right\}$$
$$+\left(\tfrac{\pi^2}{12}-\tfrac{1}{2}\left(\log 2+\psi(0)\right)^2\right)J^0-\left(\log 2+\psi(0)\right)Y^0,$$

worin

$$\sigma=\psi(p+1)-\psi(0)=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p+1}=\sum_{q=0}^{q=p}\frac{1}{q+1}$$

und

$$\sigma'=\tfrac{1}{2}\left(\psi'(0)-\psi'(p+1)\right)=\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(p+1)^2}\right)=\tfrac{1}{2}\sum_{q=0}^{q=p}\frac{1}{(q+1)^2}$$

zu nehmen ist.

13. Mit unendlich wachsendem z nähert sich $S^{\mu,\nu}$ dem asymptotischen Werthe $z^{\mu-1}$. Man überzeugt sich hiervon, indem man $y=z^{\mu-1}$ in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y=z^{\mu-1}$$

substituirt. Sie verwandelt sich dadurch in

$$\frac{(\mu-1)^2-\nu^2}{z^2}=0\,,$$

und wird erfüllt 1) für jedes z, wenn $\mu-1=\nu$ ist, was bereits bekannt ist; 2) für jedes μ und ν, wenn z unendlich gross ist.

Das nämliche Resultat ergiebt sich auch aus der in § 8. gegebenen Entwickelung von $S^{\mu,\nu}$ nach fallenden Potenzen von z, nämlich

$$\text{(XII)}\quad S^{\mu,\nu}=z^{\mu-1}\sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p(\mu-\nu-1)^{p|-2}(\mu+\nu-1)^{p|-2}z^{-2p}$$
$$+(-1)^{m+1}(\mu-\nu-1)^{m+1|-2}(\mu+\nu-1)^{m+1|-2}S^{\mu-2m-2,\nu},$$

wenn wir uns dieselbe ins Unendliche fortgesetzt denken. Diese Reihe ist nun zwar divergent; man bemerkt jedoch leicht, dass (wenigstens für reelle Werthe von z, μ und ν) die Vorzeichen ihrer Glieder von einem bestimmten Gliede ab rein alternirend sind, und dass der Rest (für einen hinlänglich grossen Werth von z) stets von entgegengesetztem Zeichen ist als das letzte Glied. Nach einer Bemerkung von Hankel*) sind aber diese Kennzeichen hinreichend, um darzuthun, dass die Reihe „*halbconvergent*" ist. Dieselbe kann daher, für grössere Werthe von z, zur numerischen Berechnung von $S^{\mu,\nu}$ gebraucht werden.

14. Mit Hülfe der Function $S^{\mu,\nu}$ ist nicht nur die Differentialgleichung (1) in *allen* Fällen erschöpfend integrirt, sondern es können nun auch sämmtliche Integrale von der Form $\int z^\mu J^\nu dz$ und $\int z^\mu Y^n dz$ berechnet werden. Setzen wir nämlich, wie oben in § 5. bereits geschehen ist,

$$\int z^\mu J^\nu dz=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\cdot P$$

und

$$\int z^\mu J^{-\nu} dz=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\cdot Q,$$

so ist

$$QJ^\nu-PJ^{-\nu}=S^{\mu,\nu}$$

und

$$Q\frac{\partial J^\nu}{\partial z}-P\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z}=\frac{\partial S^{\mu,\nu}}{\partial z}.$$

Daraus ergiebt sich durch Auflösung nach P

$$P\left(J^{-\nu}\frac{\partial J^\nu}{\partial z}-J^\nu\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z}\right)=J^\nu\frac{\partial S^{\mu,\nu}}{\partial z}-S^{\mu,\nu}\cdot\frac{\partial J^\nu}{\partial z},$$

oder, da

---

*) Math. Annalen Bd. I, S. 498.

$$J^{-\nu}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}-J^{\nu}\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z}=\frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi$$

ist:

$$\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\cdot P=zJ^{\nu}\frac{\partial S^{\mu,\nu}}{\partial z}-zS^{\mu,\nu}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}.$$

Da nun ferner

$$\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}=-\frac{\nu}{z}J^{\nu}+J^{\nu-1}$$

und nach (VIII)

$$\frac{\partial S^{\mu,\nu}}{\partial z}=-\frac{\nu}{z}S^{\mu,\nu}+(\mu+\nu-1)S^{\mu-1,\nu-1},$$

so ergiebt sich schliesslich

$$\text{(XXI)}\qquad \int z^{\mu}J^{\nu}dz=(\mu+\nu-1)zJ^{\nu}S^{\mu-1,\nu-1}-zJ^{\nu-1}S^{\mu,\nu}.$$

Ebenso findet man

$$\text{(XXI}^{\text{a}}\text{)}\qquad \int z^{\mu}Y^{n}dz=(\mu+n-1)zY^{n}S^{\mu-1,n-1}-zY^{n-1}S^{\mu,n}.$$

15. Kehren wir nun zu der am Anfange erwähnten Neumann'schen Function O zurück, so lehrt die Vergleichung der zugehörigen Differentialgleichungen mit der Gleichung (1), dass

$$\text{(a)}\qquad O^{2m}_{(z)}=\frac{1}{z}\cdot S^{1,2m}_{(z)}$$

und

$$\text{(b)}\qquad O^{2m+1}_{(z)}=\frac{2m+1}{z}S^{0,2m+1}_{(z)}$$

ist. Der Zusammenhang der Function O mit den Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art findet demnach seinen Ausdruck in den Gleichungen:

$$\text{(c)}\qquad O^{2m}=\frac{1}{z}\left(Y^{2m}\int zJ^{2m}dz-J^{2m}\int zY^{2m}dz\right),$$

$$\text{(d)}\qquad O^{2m+1}=\frac{2m+1}{z}\left(Y^{2m+1}\int J^{2m+1}dz-J^{2m+1}\int Y^{2m+1}dz\right).$$

Die rationalen ganzen Functionen von $\frac{1}{z}$, durch welche Neumann die Function definirt hat, sind in unserer Formel (XIII$^{\text{b}}$) als specielle Fälle enthalten. Für $\nu=2m$ geht nämlich (mit Rücksicht auf (a) und (b))

$$\text{(e)}\qquad O^{2m}=\frac{1}{z}\sum m^{p|-1}m^{p|1}\left(\frac{2}{z}\right)^{2p}$$

daraus hervor, und für $\nu=2m+1$:

(f) $$O^{2m+1} = \frac{2m+1}{z^2} \sum m^{p|-1}(m+1)^{p|1}\left(\frac{2}{z}\right)^{2p}.$$

Die recurrenten Eigenschaften, welche wir für die Function $S^{\mu,\nu}$ nachgewiesen haben, specialisiren sich für die Function O in folgender Weise. Aus den Gleichungen (IV) und (V) folgt zunächst für $\mu = 1$ und $\nu = 2m$

$$\frac{2}{z} S^{1,2m} = S^{0,2m-1} + S^{0,2m+1}$$

und

$$2\frac{\partial S^{1,2m}}{\partial z} = 2m(S^{0,2m-1} - S^{0,2m+1}),$$

woraus sodann im Hinblick auf (a) und (b)

(g) $$2O^{2m} = \frac{zO^{2m-1}}{2m-1} + \frac{zO^{2m+1}}{2m+1}$$

und

$$2\frac{\partial(zO^{2m})}{\partial z} = 2m\left(\frac{zO^{2m-1}}{2m-1} - \frac{zO^{2m+1}}{2m+1}\right)$$

hervorgeht. Zieht man von der letzteren Gleichung, nämlich von

$$2O^{2m} + 2z\frac{\partial O^{2m}}{\partial z} = 2m\left(\frac{zO^{2m-1}}{2m-1} - \frac{zO^{2m+1}}{2m+1}\right),$$

die erstere ab, so bleibt

(h) $$2\frac{\partial O^{2m}}{\partial z} = O^{2m-1} - O^{2m+1}.$$

In analoger Weise erhält man aus den Gleichungen (VI) und (VII) für $\mu = 0$ und $\nu = 2m+1$

$$\frac{2(2m+1)}{z} S^{0,2m+1} = \frac{S^{1,2m}-1}{2m} + \frac{S^{1,2m+2}-1}{2m+2}$$

und

$$2\frac{\partial S^{0,2m+1}}{\partial z} = \frac{S^{1,2m}-1}{2m} - \frac{S^{1,2m+2}-1}{2m+2};$$

daraus folgt:

(i) $$2O^{2m+1} = \frac{zO^{2m}-1}{2m} + \frac{zO^{2m+2}-1}{2m+2}$$

und

$$2\frac{\partial(zO^{2m+1})}{\partial z} = (2m+1)\left(\frac{zO^{2m}-1}{2m} - \frac{zO^{2m+2}-1}{2m+2}\right).$$

Wird von letzterer Gleichung die vorhergehende subtrahirt, so ergiebt sich:

(k) $$2\frac{\partial O^{2m+1}}{\partial z} = O^{2m} - O^{2m+2}.$$

Die Gleichungspaare (g); (h) und (i), (k) kann man je in eine Gleichung zusammenfassen, indem man schreibt:

(l) $$2O^n = \frac{zO^{n-1} - \sin^2\frac{n\pi}{2}}{n-1} + \frac{zO^{n+1} - \sin^2\frac{n\pi}{2}}{n+1},$$

(m) $$2\frac{\partial O^n}{\partial z} = O^{n-1} - O^{n+1}.$$

Von diesen beiden Relationen wurde die erstere zuerst von Schläfli*) angegeben, die letztere findet sich bereits in der Eingangs erwähnten Neumann'schen Schrift.

Erlangen, im August 1875.

*) Math. Annalen Bd. III, S. 137.