5.

Démonstration élémentaire du théorème de Wilson généralisé.

(Par l'éditeur.)

Théorème.

Soit s un nombre entier quelconque. Désignons par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots. \sigma_\varphi$ les nombres premiers avec s et moindres que s, on a

$$1. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots. \sigma_\varphi = Ns - 1$$

dans les trois cas

$$2. \quad s = p^m,$$
$$3. \quad s = 2p^m \quad \text{et}$$
$$4. \quad s = 4,$$

p désignant un nombre premier impair et m un nombre entier quelconque > 0, et

$$5. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots. \sigma_\varphi = Ns + 1$$

dans tous les autres cas.

N signifie un nombre entier indéfini.

Démonstration.

I. Si l'on divise par s le produit de deux quelconques des nombres σ premiers avec s, par ex. σ_ε et $\sigma_\varkappa$, le reste sera un troisième des nombres premiers avec s, par ex. σ_μ, c'est à dire on aura

$$6. \quad \sigma_\varepsilon \sigma_\varkappa = Ns + \sigma_\mu.$$

Car, si s et σ_μ avoient quelque nombre premier >1 pour diviseur commun, ce diviseur devroit diviser aussi σ_ε ou $\sigma_\varkappa$ et par conséquent s et σ_ε ou $\sigma_\varkappa$ en même temps, ce qui n'est pas, σ_ε et $\sigma_\varkappa$ étant premiers entre eux suivant l'hypothèse. Donc σ_μ et s sont nécessairement premiers entre eux. Mais σ_μ ne peut aussi être $= \sigma_\varepsilon$ ou $= \sigma_\varkappa$ car si cela étoit, on auroit $\sigma_\varepsilon \sigma_\varkappa = Ns + \sigma_\varepsilon$ ou $\sigma_\varepsilon \sigma_\varkappa = Ns + \sigma_\varkappa$ c'est à dire $\sigma_\varepsilon(\sigma_\varkappa - 1) = Ns$ ou $\sigma_\varkappa(\sigma_\varepsilon - 1) = Ns$ et s n'ayant pas de diviseur commun avec σ_ε ou $\sigma_\varkappa$ devroit diviser $\sigma_\varkappa - 1$ ou $\sigma_\varepsilon - 1$, ce qui est impossible, $\sigma_\varkappa$ et σ_ε étant $< s$ par hypothèse. Donc σ_μ est un *troisième* des nombres σ premiers avec s.

II. Deux nombres σ premiers avec s, par ex. $\sigma_\varkappa$ et σ_μ, étant déterminés, il se trouvera toujours un troisième σ_ε parmi les nombres σ premiers avec s qui donne

$$7. \quad \sigma_\varepsilon \sigma_\varkappa = Ns + \sigma_\mu.$$

Car, soient d'abord σ_λ et σ_ν deux quelconques des nombres σ et supposons

$$8. \quad \sigma_\lambda \sigma_\varkappa = Ns + r,$$
$$9. \quad \sigma_\nu \sigma_\varkappa = Ns + \varrho$$

les restes r et ϱ qui, suivant ce qui a été demontré sous (I.), se trouveront toujours parmi les nombres σ, ne pourront pas être égaux entre eux, parceque, si cela étoit, on auroit

$$10. \quad (\sigma_\lambda - \sigma_\nu)\sigma_\varkappa = Ns$$

et $\sigma_\varkappa$ n'ayant pas de diviseur commun avec s, $\sigma_\lambda - \sigma_\nu$ devroit être divisible par s, ce qui est impossible, σ_λ et σ_ν étant $< s$ tous les deux, $\sigma_\lambda - \sigma_\nu$ l'est également et à plus forte raison.

Donc, si dans l'équation

$$11. \quad \sigma . \sigma_\varkappa = Ns + r$$

on fait parcourir à la valeur de σ toutes celles de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots\ldots \sigma_\varphi$, tous les restes $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots r_\varphi$ seront différents entre eux. Mais tous ces restes doivent se trouver parmi les nombres σ: donc ils seront *tous* ces nombres mêmes, peut-être dans un ordre différent de celui des multiplicateurs σ à gauche. Par cette raison il existera toujours pour une valeur déterminée de r savoir $r = \sigma_\mu$ (8.) quelque σ, par ex. σ_ε qui satisfait l'équation (8.).

III. Il y aura toujours un nombre σ_ε parmi les nombres σ premiers avec s qui satisfait l'équation

$$12. \quad \sigma_\varepsilon \sigma_\varkappa = Ns + 1,$$

$\sigma_\varkappa$ étant un nombre *déterminé,* pris également et à volonté parmi les nombres σ.

Car en vertu de ce qui a été démontré sous (II.) il existe toujours un tel nombre σ_ε pour les deux nombres déterminés $\sigma_\varkappa$ et σ_μ sous (8.) et $1 = \sigma_\mu$ est toujours un des nombres σ.

IV. Si dans l'équation (12.) on fait parcourir à $\sigma_\varkappa$ *toutes* les valeurs des nombres σ premiers avec s, σ_ε parcourra également *toutes* ces valeurs.

Car si pour deux valeurs différentes de $\sigma_\varkappa$, par ex. σ_λ et σ_ν, une même valeur de σ_ε pourroit satisfaire l'équation (12.) on aurait

$$13. \quad \sigma_\varepsilon(\sigma_\lambda - \sigma_\nu) = Ns$$

et σ_ε n'ayant pas de diviseur commun avec s, $\sigma_\lambda - \sigma_\nu$ devroit être divisible par s, ce qui ne se peut pas, σ_λ et σ_ν et à plus forte raison $\sigma_\lambda - \sigma_\nu$ étant $< s$. Donc pour des valeurs différentes de σ_x, celles de σ_ε sous (12.) seront également différentes et il suit de là que, si σ_x parcourt toutes les valeurs de σ, σ_ε les parcourra également.

V. Dans la série des équations

$$14. \quad \left\{\begin{array}{l} \sigma_a\,\sigma_1 = Ns+1, \\ \sigma_b\,\sigma_2 = Ns+1, \\ \sigma_c\,\sigma_3 = Ns+1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sigma_x\,\sigma_\varphi = Ns+1, \end{array}\right.$$

où en vertu de ce qui a été démontré sous (IV.) les facteurs σ_a, σ_b, σ_c, ... σ_x ne sont autre chose que les ϕ nombres σ et par conséquent inégaux entre eux, il peut y en avoir d'équations où les deux facteurs à gauche sont *égaux* entre eux. Le nombre de ces équations sera toujours *pair* et à chaque équation à facteurs égaux correspondera une autre, dont le facteur, multiplié par le facteur de la première équation donne pour produit $Ns - 1$, de sorte que, si par ex. on a

$$15. \quad \sigma^2 = Ns+1 \quad \text{et}$$
$$16. \quad \sigma_k^2 = Ns+1,$$

on aura en même temps

$$17. \quad \sigma_e\,\sigma_k = Ns-1.$$

Car *en premier lieu* on aura

$$18. \quad \sigma_e^2 = Ns+1$$

ou bien

$$19. \quad (\sigma_e+1)(\sigma_e-1) = Ns$$

aussitôt que σ_e+1 est divisible par un des facteurs de s et σ_e-1 l'est en même temps par l'autre, et cela peut visiblement avoir lieu, σ_e+1 ou σ_e-1 n'étant pas nécessairement premier avec s comme s l'est. En effet σ_e-1 sera déjà *toujours* co-divisible avec s, si $\sigma = 1$; car alors $\sigma_e - 1$ est $= 0$ et 0 est divisible par s même. Mais cette co-divisibilité peut avoir lieu aussi pour des valeurs de σ autre que l'unité. Elle aura nécessairement lieu par ex. si s est le produit de deux nombres premiers absolus p et q, différents de 2 l'un de l'autre. Le nombre $p+1 = q-1$, moyen entre ces deux facteurs, sera alors nécessairement un des nombres σ premiers avec s, puisque $\sigma_e = p+1 = q-1$ n'est divisible ni par p, ni par

$q=p+2$. Et ce nombre moyen donne $\sigma_e^2-1=(p+1)^2-1=p(p+2)$, produit divisible par p et par $q=p+2$. Donc en premier lieu l'équation $\sigma_e^2=Ns+1$ est toujours possible, et cela, suivant les circonstances, même pour d'autres valeurs de σ_e que l'unité.

En second lieu, si σ_e, premier avec s, donne $\sigma_e^2=Ns+1$, $s-\sigma_e$, égalément premier avec s, donnera aussi $Ns+1$, car

$$20.\quad (s-\sigma_e)^2 = s^2-2s\sigma_e+\sigma_e^2 = Ns+\sigma_e^2 = Ns+1.$$

Donc parmi les nombres premiers avec s ceux qui, multipliés par eux-mêmes, donnent $Ns+1$, existent toujours *par couples.* Si σ_e est l'un de ces nombres, $s-\sigma_e$ sera l'autre. Par conséquent le nombre des équations à facteurs égaux parmi celles (14.) est toujours *pair.*

En troisième lieu tout nombre σ_e premier avec s, qui donne $\sigma_e^2=Ns+1$, ayant pour correspondant $\sigma_k=s-\sigma_e$, le produit de ces deux nombres est

$$20.\quad \sigma_e\sigma_k = \sigma_e(s-\sigma_e) = \sigma_e s-\sigma_e^2 = Ns-\sigma_e^2 = Ns-1.$$

Donc $\sigma_e\sigma_k$ est toujours $Ns-1$.

VI. Parmi les équations (14.) il n'existe pas plusieurs, ni même deux, dans lesquelles un seul des deux facteurs à gauche soit le même. Ou les facteurs sont les mêmes tous les deux, ou aucun ne l'est.

Car si par ex. on pouvait avoir

$$21.\quad \sigma_m\sigma_\varepsilon = Ns+1 \quad \text{et}$$
$$22.\quad \sigma_m\sigma_\lambda = Ns+1,$$

on auroit

$$23.\quad \sigma_m(\sigma_\varepsilon-\sigma_\lambda) = Ns,$$

et cela ne se peut pas, puisque σ_m est premier avec s et $\sigma_\varepsilon-\sigma_\lambda$ n'est pas divisible pour lui seul par s, σ_ε et σ_λ, et à plus forte raison $\sigma_\varepsilon-\sigma_\lambda$ étant $< s$. Donc des deux facteurs d'une des équations (14.) l'un ne peut pas *seul* se présenter de nouveau dans une autre équation. Ou les deux facteurs reviennent en même temps tous les deux, ou aucun ne revient.

VII. Le cas où aucun des deux facteurs ne revient, est celui où les deux facteurs sont *égaux* entre eux. L'autre cas où les facteurs reviennent tous les deux, est celui des facteurs *inégaux* entre eux, et toutes les fois où il existe des équations à facteur *inégaux,* chacune de ces équation revient nécessairement *une fois* identiquement, mais non pas plus d'une fois. Le nombre des équations à facteurs inégaux est donc *pair,* de même que l'est celui des équations à facteurs égaux.

Car dans la série des *seconds* facteurs $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots. \sigma_\varphi$ (14.) *aucun* ne revient. Donc si dans l'une ou l'autre équation les deux facteurs sont *égaux, aucun* de ces deux facteurs ne reviendra. Si au contraire les facteurs dans une équation, par ex. dans l'équation

$$24. \quad \sigma_\varepsilon \sigma_x = Ns + 1$$

sont *inégaux,* de sorte que, ou $\sigma_\varepsilon > \sigma_x$ ou $\sigma_\varepsilon < \sigma_x$: qu'on aille en avant dans le premier de ces deux cas et en arrière dans le second, et l'on retrouvera *nécessairement,* les facteurs parcourant *tous* les nombres σ dans la série des *seconds* facteurs $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots. \sigma_\varphi$, le facteur σ_ε lui même, mais on ne le retrouvera pas plus d'une fois. Maintenant si l'un des deux facteurs revient, l'autre reviendra également en même temps (VI.). Donc chaque équation à facteurs inégaux revient identiquement, mais non pas plus d'une fois. Le nombre de ces équations est donc toujours *pair.*

VIII. Aucun des facteurs relatifs aux équations à facteurs égaux ne peut se présenter dans aucune équation à facteurs inégaux; et reciproquement.

Car si, *en premier lieu,* le facteur d'une équation à facteurs *égaux* revenoit dans quelque autre équation, le second facteur de la première équation reviendroit également dans la seconde (VI.): donc celle-ci ne seroit pas une équation à facteurs inégaux, mais à facteurs égaux, et deux équation aux *mêmes* facteurs égaux n'existent pas; donc aucun facteur, qui entre dans les équations à facteurs égaux, ne peut revenir nulle part. Et si, en second lieu, l'un des facteurs d'une équation à facteurs *inégaux* revenoit dans une autre équation, cette équation ne seroit pas une des équations à facteurs égaux, parceque l'autre facteur reviendroit en même temps (VI.): donc aucun des facteurs relatifs aux équations à facteurs inégaux ne peut se présenter non plus dans les équations à facteurs égaux.

IX. Si l'on désigne dans (14.) par $2m$ *le nombre des équations à facteurs inégaux,* nombre toujours *pair* (VII.), celles parmi ces équations, dans lesquelles les facteurs sont *différents,* contiendront *tous* les nombres σ premiers avec s excepté ceux qu'offrent les équations à facteurs égaux, et chacun de ces nombres ne se présentera pas plus d'une seule fois.

Car les φ équations (14.) contiennent *tous* les φ nombres σ *sans exception,* et chacun de ces nombres *deux fois,* ni plus ni moins, parceque la série des *seconds* facteurs $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots. \sigma_\varphi$ est la série complète et ordonnée des φ nombres σ, pendant que la série des *premiers* facteurs

$\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \ldots. \sigma_x$ est la même série, peut-être dans un ordre différent (IV.). Mais les équations à facteurs *égaux* présentent leurs facteurs *deux fois chacun,* et aucun de ces facteurs ne revient dans les équations à facteurs inégaux. Donc les $2m$ équations à facteurs *inégaux* présenteront tous les nombres σ non-contenus dans les équations à facteurs égaux, et chacun de ces nombres deux fois. Mais ces $2m$ équations sont identiques par couples (VII.); donc m de ces équations contiendront déjà tous les nombres σ non-contenus dans les équations à facteurs égaux et aucun de ces nombres plus d'une fois.

X. Le produit de *tous les nombres* σ premiers avec s divisé par s laissera pour reste $+1$ ou -1 selon que le nombre des couples des équations à facteurs *égaux* est *pair* ou *impair.* Cela veut dire que si l'on désigne par $2n$ le nombre des équations à facteurs égaux, nombre toujours pair (V.), on a

25. $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots. \sigma_\varphi = Ns+1$ si n est *pair* et

26. $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots. \sigma_\varphi = Ns-1$ si n est *impair.*

Car le produit des m équations à facteurs *inégaux* et différents, lesquelles présentent tous les nombres σ, exceptés les $2n$ nombres qu'offrent les $2n$ équation à facteurs *égaux* (IX.), donne $(Ns+1)^m = Ns+1$; donc le produit des dits nombres est $= Ns+1$. De l'autre côté le produit des $2n$ nombres σ *inégaux,* contenus dans les $2n$ équations à facteurs *égaux,* donne $(Ns-1)^n$, celui des deux nombres σ contenus dans chaque *couple* d'équations correspondantes à facteurs égaux étant $Ns-1$ (V.). Donc le produit de la totalité des nombres σ est

27. $$(Ns+1)(Ns-1)^n;$$

et ce produit est $= Ns+1$ ou $Ns-1$ selon que n est pair ou impair.

XI. Jusqu'ici il a été démontré que le produit de *tous* les nombres σ, premiers avec s, est toujours $= Ns \pm 1$, quel que soit s. Il s'agit maintenant de distinguer les cas où l'unité dans $Ns \pm 1$ doit être prise avec le signe $-$ de ceux auxquels convient le signe $+$. Comme cela dépend du nombre n de couples d'équations à facteurs égaux dans (14.), c'est à dire du nombre des valeurs de σ dont les carrés divisés par s donnent $+1$ pour reste, il s'agit de savoir quel est le nombre des valeurs $< s$ que σ peut avoir dans l'équation

28. $$\sigma^2 = Ns+1,$$

N désignant un nombre indéfini.

XII. De cette équation on tire

$$29. \quad (\sigma+1)(\sigma-1) = Ns,$$

et pour satisfaire cette nouvelle équation il faut, qu'en décomposant Ns en deux facteurs de toutes les manières possibles, l'un de ces facteurs soit égal à $\sigma-1$, l'autre à $\sigma+1$.

D'abord il se présente les deux facteurs s et N; mais leur produit Ns pourra encore être décomposé de beaucoup d'autres manières. On embrassera toutes ces décompositions en supposant

$$30. \quad s = uv \quad \text{et}$$

$$31. \quad N = u_1 v_1,$$

de sorte que

$$32. \quad (\sigma+1)(\sigma-1) = uv\,u_1 v_1,$$

et puis

$$33. \quad \sigma+1 = uv_1 \quad \text{et}$$

$$34. \quad \sigma-1 = vu_1.$$

De là on tire

$$35. \quad \sigma = uv_1 - 1,$$

$$36. \quad \sigma = vu_1 + 1,$$

$$37. \quad 2\sigma = uv_1 + vu_1 \quad \text{et}$$

$$38. \quad 2 = uv_1 - vu_1,$$

où toutes les valeurs possibles des facteurs de s, y compris 1 et s et s et 1, pourront prendre la place de u et v, et il s'agit maintenant de savoir si une ou si aucune ou plusieurs valeurs de $\sigma < s$ conviennent à un couple déterminé de facteurs u et v.

XIII. Nous remarquerons d'abord que deux facteurs u et v, qui conviennent à quelque valeur de s, ne pourront jamais avoir en commun un facteur plus grand que 2. Car un tel facteur ne diviseroit pas le nombre 2 à gauche dans l'équation (38.).

Donc il faut que les valeurs de tout couple de facteurs u et v, pour lesquelles il pourra exister des valeurs de σ, soient ou premières entre elles ou ne soient divisibles en même temps par quelque autre nombre que 2. Tous les facteurs u et v conjugués, divisibles par un nombre plus grand que 2, doivent être rejetés; car il n'existe aucune valeur de σ qui puisse leur convenir.

XIV. Dans le cas ou les deux facteurs conjugués u et v sont *premiers entre eux,* il existera toujours *une* valeur de $u_1 < u$ et *une* valeur de $v_1 < v$ convenables à l'équation (38.) ou bien à l'équation

$$39. \quad uv_1 = vu_1 + 2,$$

mais non *pas plus d'une seule* valeur.

Car puisque les facteurs u et v doivent être premiers entre eux, le nombre 2 n'en est pas facteur commun. Donc ou des deux nombres u et v aucun n'aura 2 pour facteur, ou l'un d'eux seulement l'aura. Soit v celui qui n'est pas divisible par 2, le nombre 2 sera un des nombres premiers avec v, que nous désignerons par $z_1, z_2, z_2, z_3, \ldots.$ De son côté le facteur u, qui a été supposé premier avec v, pourra être regardé également comme un des nombres z premiers avec v, même lorsque u seroit plus grand que v, cas où l'on auroit $u - Nv = z_s$.

Soit $z_x = u$ ou bien $z_x = u - Nv$. En multipliant z_x par tous les $z < v$ et divisant les produits par v, tous les restes r seront différents entre eux, car si par ex. on avait

$$40. \quad z_x . z_\lambda = Nv + r \quad \text{et} \quad z_x . z_\nu = Nv + r,$$

on auroit $z_x(z_\lambda - z_\nu) = Nv$, ce qui ne se peut pas, z_x étant premier avec v et $z_\lambda - z_\nu < v$. Donc les restes r parcourront nécessairement *toutes* les valeurs de z moindres que v, et cela en ne touchant chaque valeur de z plus d'une fois. Donc aussi la valeur 2 de z sera touché par ces restes, mais non pas plus d'une fois, et par suite il existera toujours une valeur v_1 de $z < v$, mais non pas plus d'une qui donne

$$40'. \quad u.v_1 = Nv + 2$$

ou bien $uv_1 = vu_1 + 2$, comme (39.), en écrivant u_1 au lieu de N. Et puisque $v_1 < v$, on a $uv_1 - 2 = vu_1 < uv$; donc aussi $u_1 < u$, et il n'existera qu'une seule valeur de $u_1 < u$, de même qu'il n'existe qu'une seule valeur de $v_1 < v$.

XV. Si les deux facteurs conjugués u et v *ont le nombre* 2 *pour facteur commun*, cas qui peut se présenter dans notre problême (XIII.), il existera toujours *deux* valeurs de $u < u_1$ et *deux* valeurs de $v < v_1$ propres à satisfaire l'équation (38.) ou (39.), mais *non pas plus de deux* valeurs.

Puisque les nombres u et v ne peuvent pas avoir en commun de facteur *plus grand* que 2, si on les divise par 2 et qu'on suppose

$$41. \quad u = 2\overset{1}{u}, \quad v = 2\overset{1}{v},$$

les quotients $\overset{1}{u}$ et $\overset{1}{v}$ seront nécessairement *premiers* entre eux.

Mais en substituant les expressions de u et v (41.) dans l'équation (39.), cette équation, ayant été divisée par 2, se réduit à

$$42.\qquad \overset{1}{u}v_1 = \overset{1}{v}u_1 + 1.$$

Cette nouvelle équation est précisement dans le cas de la précédente (39.), $\overset{1}{u}$ et $\overset{1}{v}$ étant premiers entre eux et 1 étant toujours un des nombres premiers avec u et v. Donc il existera toujours une unique valeur de $u_1 < \overset{1}{u}$ et une unique valeur de $v_1 < \overset{1}{v}$ propres à satisfaire l'équation (42.) et par suite en même temps l'équation (39.), celle-ci n'étant autre chose que l'équation (42.) multiplié par 2.

Mais pendant qu'il n'existe qu'une seule valeur de u_1 et de v_1 *moindres* que $\overset{1}{u} = \frac{1}{2}u$ et $\overset{1}{v} = \frac{1}{2}v$ (41.), toutes les valeurs de u_1 et v_1 exprimées par

$$43.\qquad n\overset{1}{u} + u_1 \quad \text{et} \quad n\overset{1}{v} + v_1,$$

où n est un n'ombre entier arbitraire, conviendront également à l'équation (42.). Car elles donnent

$$44.\qquad u(n\overset{1}{v} + v_1) = \overset{1}{v}(nu + u_1) + 1,$$

ce qui n'est autre chose que $\overset{1}{u}v_1 = \overset{1}{v}u_1 + 1$, comme (42.). Si n dans (43.) est plus grand que 1, la valeur $n\overset{1}{u} + u_1 = \frac{1}{2}nu + u_1$ (41.) de u_1 est plus grande que u et la valeur $n\overset{1}{v} + v_1 = \frac{1}{2}nv + v_1$ (41.) de v_1 est plus grande que v, et les valeurs de u_1 et v_1 plus grandes que u et v n'importent guère, car elles donnent dans (37.) $2\sigma > 2uv > 2s$ et $\sigma > s$, valeurs de σ dont il ne s'agit pas. Mais il en est autrement si $n = 1$. Dans ce cas (43.) donne

$$45.\qquad n\overset{1}{u} + u_1 = \tfrac{1}{2}u + u_1 \quad \text{et} \quad n\overset{1}{v} + v_1 = \tfrac{1}{2}v + v_1,$$

et $\frac{1}{2}u + u_1$ est toujours plus petit que u, u_1 étant $< \frac{1}{2}u$, et $\frac{1}{2}v + v_1$ est toujours plus petit que v, v_1 étant $< \frac{1}{2}v$. Donc, outre u_1 et v_1, aussi $\frac{1}{2}u + u_1$ et $\frac{1}{2}v + v_1$, en même temps qu'ils conviennent à l'équation (39.) remplissent la condition d'être moindres que u et v.

Donc si u et v ont 2 pour facteur commun, il existe toujours deux valeurs de u_1 et v_1 *moindres* que u et v, savoir

$$46.\qquad \begin{cases} u_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}u + u_1 \quad \text{et} \\ v_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}v + v_1, \end{cases}$$

mais non pas plus que ces deux valeurs, propres à satisfaire l'équation (39.) ou celle (38.).

XVI. Si les deux facteurs conjugués u et v de $uv=s$ sont *premiers entre eux,* il existera toujours *une* valeur de $\sigma < s$ propre à satisfaire l'équation (29.), mais *non pas plus d'une seule* valeur.

Car dans ce cas il existe toujours suivant (XIV.) une valeur de $u_1 < u$ et une valeur de $v_1 < v$ propres à satisfaire l'équation de condition (38.), mais non pas plus de cette seule *valeur;* donc σ suivant son expression

$$46. \quad \sigma = \tfrac{1}{2}(uv_1 + vu_1) \quad (37.)$$

n'a qu'une seule valeur, et cette valeur est plus petite que $\frac{1}{2}(uv+vu) = \frac{1}{2}.2s = s$, comme cela doit être.

XVII. Si les deux facteurs conjugués u et v *ont le nombre* 2 *pour facteur commun,* il existe toujours *deux* valeurs de σ moindres que s et différentes l'une de l'autre de $\frac{1}{2}s$ propres à satisfaire l'équation (29.), mais il n'existe par plus de ces deux valeurs.

Car dans ce cas il existe toujours suivant (XV.) deux valeurs de $u_1 < u$, savoir u_1 et $\frac{1}{2}u + u_1$ où $u_1 < \frac{1}{2}u$, et deux valeurs de $v_1 < v$, savoir v_1 et $\frac{1}{2}v + v_1$ où $v_1 < \frac{1}{2}v$ propres à satisfaire l'équation de condition (38.), mais non pas plus de ces deux valeurs; donc σ suivant son expression (46.) a les deux valeurs

$$47. \quad \begin{cases} \overset{2}{\sigma} = \frac{1}{2}(uv_1 + vu_1) \quad \text{et} \\ \overset{2}{\sigma} = \frac{1}{2}(u(\frac{1}{2}v + v_1) + v(\frac{1}{2}u + u_1)) = \frac{1}{2}uv + \frac{1}{2}(uv_1 + vu_1), \end{cases}$$

ou bien

$$48. \quad \overset{2}{\sigma} = \tfrac{1}{2}s + \sigma;$$

mais il n'a pas plus de ces deux valeurs différentes l'une de l'autre de $\frac{1}{2}s$ et plus petits que s toutes les deux, u_1 étant $< \frac{1}{2}u$ et $v_1 < \frac{1}{2}v$ et par suite $\overset{1}{\sigma} < \frac{1}{2}s$ (47.) et $\overset{2}{\sigma} < \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s < s$ (48.).

XVIII. Si la valeur σ_1 de σ convient aux facteurs u et v de $s = uv$, la valeur

$$49. \quad \sigma_2 = s - \sigma_1 \quad \text{de} \quad \sigma$$

conviendra toujours aux facteurs $v = \frac{s}{u}$ et $u = \frac{s}{v}$ de $s = vu$ et jamais les valeurs σ_1 et σ_2 de σ seront égales entre elles.

Car si d'abord les mêmes valeurs de u_1 et v_1 qui, en satisfaisant l'équation de condition $2 = uv_1 - vu_1$ (38.), donnent la valeur σ_1 de σ (35., 36.) donnoient la même valeur de σ_1 en mettant v et u à la place de u et v, on auroit en vertu des équations (33. et 34.)

$$50. \quad \text{ou} \quad \sigma_1+1 = vu_1 \quad \text{et} \quad \sigma_1-1 = uu_1,$$

$$51. \quad \text{ou} \quad \sigma_1+1 = vu_1 \quad \text{et} \quad \sigma_1-1 = uv_1,$$

en même temps que l'on a (33. et 34.)

$$52. \quad \sigma_1+1 = uv_1 \quad \text{et} \quad \sigma_1-1 = vu_1.$$

Mais (50. et 52.) donnent $\sigma_1+1 = vv_1 = uv_1$ et $\sigma_1-1 = uu_1 = vu_1$, de sorte que σ_1+1 et σ_1-1 tous les deux seroient divisibles par u et par v en même temps et par suite par $uv = s$; ce qui est impossible. Puis (51. et 52.) donnent $\sigma_1+1-(\sigma_1-1)$ ou $2 = vu_1 - vu_1 = uv_1 - uv_1 = 0$, ce qui est absurde. Donc il est impossible que les mêmes valeurs de u_1 et v_1 ne cessent pas de satisfaire l'équation de condition (38.) si l'on y met v et u à la place de u et v, ce qui réduit cette équation à $2 = vv_1 - uu_1$ ou à $2 = vu_1 - uv_1$. Il faut nécessairement qu'il y ait *d'autres* valeurs u_2 et v_2 de u_1 et v_1 propres à satisfaire la nouvelle équation de condition

$$53. \quad 2 = vu_2 - uv_2.$$

Cela posé, puisqu'on à déjà

$$54. \quad 2 = uv_1 - vu_1 \ (38.),$$

on tire de ces deux équations

$$55. \quad 2-2 = 0 = v(u_2+u_1) - u(v_2+v_1)$$

et de là

$$56. \quad u(v_1+v_2) = v(u_1+u_2).$$

Maintenant il n'y a que *deux cas*. Ou u et v sont premiers entre eux, ou ils ont le nombre 2 pour facteur commun, mais aucun autre nombre.

A. Dans le *premier* cas u_1+u_2 en vertu de l'équation (56.) doit être divisible par u et v_1+v_2 par v, u et v étant premiers entre eux. Mais quelles que soient les valeurs de u_2 et v_2, elles ne seront jamais ni zéro ni $>u$ et v, de la même sorte que u_1 et v_1 ne le sont pas; donc u_1+u_2 ne pourra être que $=u$ même, et v_1+v_2 ne pourra être que v même, de sorte que

$$57. \quad u_2 = u - u_1 \quad \text{et} \quad v_2 = v - v_1.$$

Cela donne, en ayant actuellement en vertu de l'équation (37.),

$$58. \quad \begin{cases} 2\sigma_2 = vu_2 + uv_2: \\ 2\sigma_2 = v(u-u_1) + u(v-v_1) = 2uv - (uv_1 + vu_1), \end{cases}$$

c'est à dire

$$2\sigma_2 = 2s - 2\sigma_1,$$

ou bien

$$59.\qquad \sigma_2 = s - \sigma_1,$$

comme nous l'avons avancé.

B. Dans le *second* cas l'équation (56.) étant divisé par 2 se réduit à

$$60.\qquad \tfrac{1}{2}u(v_1+v_2) = \tfrac{1}{2}v(u_1+u_2).$$

Puisque ici $\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}v$ sont premier entre eux, il faut que u_1+u_2 soit divisible par $\frac{1}{2}u$ et v_1+v_2 par $\frac{1}{2}v$, de sorte que

$$61.\qquad u_1+u_2 = N.\tfrac{1}{2}u \quad \text{et}$$

$$62.\qquad v_1+v_2 = N.\tfrac{1}{2}v.$$

Mais dans le cas actuel l'équation de condition (53.) se réduit de son côté à

$$61.\qquad 1 = \tfrac{1}{2}vu_2 - \tfrac{1}{2}uv_2;$$

où u_2 et v_2 ne sont ni zéro ni $>\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}v$, de la même manière que u_1 et v_1 ne le sont pas.

En même temps les autres valeurs $\frac{1}{2}u+u_2$ et $\frac{1}{2}v+v_2$ de u_2 et v_2 satisfont encore l'équation (53.), ces valeurs étant plus petites que u et v; de même que les autres valeurs $\frac{1}{2}u+u_1$ et $\frac{1}{2}v+v_1$ satisfont encore l'équation de condition $2 = uv_1 - vu_1$ (38.), ces valeurs étant plus petites que u et v. Donc si l'on écrit les différentes valeurs de v_1 et u_1, v_2 et u_2 comme suit:

$$63.\qquad u_1 = \overset{1}{u}_1,\quad \tfrac{1}{2}u+u_1 = \overset{2}{u}_1,\quad v_1 = \overset{1}{v}_1,\quad \tfrac{1}{2}v+v_1 = \overset{2}{v}_1,$$

$$64.\qquad u_2 = \overset{1}{u}_2,\quad \tfrac{1}{2}u+u_2 = \overset{2}{u}_2,\quad v_2 = \overset{1}{v}_2,\quad \tfrac{1}{2}v+v_2 = \overset{2}{v}_2,$$

on aura

$$65.\qquad \overset{1}{u}_1+\overset{1}{u}_2 = \tfrac{1}{2}u,\quad \overset{1}{u}_1+\overset{2}{u}_2 = u,\quad \overset{2}{u}_1+\overset{1}{u}_1 = u,\quad \overset{2}{u}_1+\overset{2}{u}_2 = \tfrac{3}{2}u,$$

$$66.\qquad \overset{1}{v}_1+\overset{1}{v}_2 = \tfrac{1}{2}v,\quad \overset{1}{v}_1+\overset{2}{v}_2 = v,\quad \overset{2}{v}_1+\overset{1}{v}_1 = v,\quad \overset{2}{v}_1+\overset{2}{v}_2 = \tfrac{3}{2}v$$

et

$$67.\qquad \overset{1}{u}_2 = \tfrac{1}{2}\overset{1}{u}-u_1 = u-\overset{2}{u}_1,\quad \overset{2}{u}_2 = u-\overset{1}{u}_1 = \tfrac{3}{2}u-\overset{2}{u}_1,$$

$$68.\qquad \overset{1}{v}_2 = \tfrac{1}{2}\overset{1}{v}-v_1 = v-\overset{2}{v}_1,\quad \overset{2}{v}_2 = v-\overset{1}{v}_1 = \tfrac{3}{2}v-\overset{2}{v}_1.$$

Donc en désignant égalément par les accents 1 et 2 les deux valeurs de σ_1 et σ_2, savoir

$$69.\qquad \overset{1}{\sigma}_1 = \tfrac{1}{2}(u\overset{1}{v}_1+v\overset{1}{u}_1) \quad \text{et} \quad \overset{2}{\sigma}_1 = \tfrac{1}{2}(u\overset{2}{v}_1+v\overset{2}{u}_1) \;(37.) \quad \text{et}$$

$$70.\qquad \overset{1}{\sigma}_2 = \tfrac{1}{2}(u\overset{1}{v}_2+v\overset{1}{u}_2) \quad \text{et} \quad \overset{2}{\sigma}_2 = \tfrac{1}{2}(u\overset{2}{v}_2+v\overset{2}{u}_2) \;(58.),$$

on aura

$$71.\qquad \overset{1}{\sigma}_1 = \tfrac{1}{2}(u\overset{1}{v}_1+vu_1) \quad \text{et} \quad \overset{2}{\sigma}_1 = \tfrac{1}{2}(u(\tfrac{1}{2}v+\overset{1}{v}_1)+v(\tfrac{1}{2}u+\overset{1}{u}_1)) = \tfrac{1}{2}s+\overset{1}{\sigma}_1,$$

$$72.\quad \begin{cases} \overset{1}{\sigma}_2 = \tfrac{1}{2}(u(\tfrac{1}{2}v - \overset{1}{v}_1) + v(\tfrac{1}{2}u - \overset{1}{u}_1)) = \tfrac{1}{2}s - \overset{1}{\sigma}_1, \\ \overset{2}{\sigma}_2 = \tfrac{1}{2}(u(v - \overset{1}{v}_1) + v(u - \overset{1}{u}_1)) = s - \overset{1}{\sigma}_1, \end{cases}$$

donc

$$73.\quad \overset{1}{\sigma}_1 + \overset{2}{\sigma}_2 = s \quad \text{et} \quad \overset{2}{\sigma}_1 + \overset{1}{\sigma}_2 = s$$

et par conséquent

$$74.\quad \overset{1}{\sigma}_2 = s - \overset{2}{\sigma}_1 \quad \text{et}$$

$$75.\quad \overset{2}{\sigma}_2 = s - \overset{1}{\sigma}_1,$$

c'est à dire: les deux valeurs $\overset{1}{\sigma}_2$ et $\overset{2}{\sigma}_2$ de σ_2, convenables aux facteurs v et u de $s = vu$, se trouvent, en retranchant de s celles $\overset{2}{\sigma}_1$ et $\overset{1}{\sigma}_1$ de σ_1; comme il a été avancé.

XIX. Si les facteurs u et v de $s = uv$ sont *impairs* tous les deux, de sorte que s est impair soi-même, la valeur de σ, qui convient à ces facteurs, ne conviendra à aucun autre couple de facteurs x et y de $s = xy$, également impairs.

Car soit λ le plus grand diviseur commun de u et x et

$$76.\quad u = \lambda u_0, \quad x = \lambda x_0,$$

de sorte que u_0 et x_0 sont *premiers entre eux*, on aura

$$77.\quad \frac{u}{x} = \frac{u_0}{x_0}.$$

Dans le cas où u et x sont premiers entre eux, on aura $\lambda = 1$, $u_0 = u$ et $x_0 = x$.

Si u est un multiple de x, on aura $\lambda = x$ et $x_0 = 1$.

Si x est un multiple de u, on aura $\lambda = u$ et $u_0 = 1$.

De (77.) on tire

$$78.\quad x = u\frac{x_0}{u_0}$$

et y étant $= \frac{s}{x} = \frac{uv}{x}$, on a

$$79.\quad y = \frac{uv}{u\frac{x_0}{u_0}} = v\frac{u_0}{x_0}.$$

Maintenant soient x_1 et y_1 les nombres qui satisfont l'équation de condition

$$80.\quad 2 = xy_1 - yx_1 \quad (38.)$$

propre aux facteurs x et y, et soient σ_u et σ_x les valeurs de σ qui conviennent aux deux couples des facteurs u et v et x et y de s, de sorte qu'on ait

$$\left.\begin{array}{ll} 81. & \sigma_u = uv_1 + 1 = vu_1 - 1, \\ 82. & \sigma_x = xy_1 + 1 = yx_1 - 1, \end{array}\right\} \quad (35. \text{ et } 36.)$$

on auroit

$$83.\quad uv_1 = xy_1 \quad \text{et}$$
$$84.\quad vu_1 = yx_1$$

si σ_u étoit $=\sigma_x$.

Mais les équations (83.) et (84.), en y substituant les expressions de x et y (78.) et (79.), donnent la première $uv_1 = u\frac{x_0}{u_0}y_1$, c'est à dire

$$85.\quad \frac{v_1 u_0}{x_0} = y_1$$

et la seconde $vu_1 = v\frac{u_0}{x_0}x_1$, c'est à dire

$$86.\quad \frac{u_1 x_0}{u_0} = x_1.$$

Maintenant u_0 et x_0 étant premiers entre eux, et x et y, ainsi que x_1 et y_1 étant des nombres entiers, les équations (78. et 86.) font voir que u et u_1 doivent être divisibles par u_0 tous les deux, et les équations (79. et 85.) font voir *qu'en même temps* v et v_1 doivent être divisibles par x_0 tous les deux.

Mais en vertu de l'équation de condition

$$87.\quad uv_1 - vu_1 = 2 \quad (38.)$$

ni u et u_1 ni v et v_1 ne peuvent généralement être divisibles que par les nombres 1 et 2 puisque 2 n'est divisible par aucun autre nombre, et si u et u_1 sont divisibles par 2, v et v_1 ne sont plus divisibles que par 1 et réciproquement; car si u et u_1 et v et v_1 étoient divisibles en même temps par 2, le nombre 2 à droite dans (87.) devrait être divisible par $2.2=4$, ce qui n'est pas.

Donc les diviseurs communs u_0 et x_0 de u et u_1 et de v et v_1 ne peuvent être que les nombres 1 ou 2, et nommément, si u_0 est $=2$, v_0 ne peut être que 1, et réciproquement.

Dans le cas actuel ni u_0 ni x_0, diviseurs de u et x, ne peuvent être $=2$, u et x étant *impairs*, suivant l'hypothèse. Donc ici u_0 et x_0 ne peuvent être que 1 tous les deux en même temps, ce qui donne $\frac{u}{x} = \frac{1}{1} = 1$ (77.) et par suite

$$88.\quad u = x \quad \text{et} \quad v = y \quad (79.).$$

Donc dans le cas de u et v *impairs*, il n'existe aucun autre couple de facteurs x et y de s auquel conviendroit la même valeur de σ qui convient aux facteurs u et v.

XX. Si des deux facteurs u et v de $s = uv$

A. u est *impair,* l'autre v *pair,* la valeur de σ qui convient aux facteurs u et v, conviendra en même temps aux facteurs

89. $x = 2u$ et $y = \frac{1}{2}v$ de $s = xy$,

mais à aucun autre couple de facteurs.

B. Si u est *pair* et v *impair,* la valeur de σ qui convient aux facteurs u et v, conviendra en même temps aux facteurs

90. $x = \frac{1}{2}u$ et $y = 2v$ de $s = xy$,

mais à aucun autre couple de facteurs.

Pour trouver d'autres facteurs x et y auxquels pourroit convenir la même valeur de σ, qui convient aux facteurs u et v, supposons

91. $u = \lambda u_0$ et $x = \lambda x_0$,

comme (76.). Nous avons vu dans (XIX.) que u_0 et x_0 ne peuvent jamais avoir d'autres valeurs que 1 et 2 et que u_0 est $= 2$ si x_0 est 1 et que u_0 est $= 1$ si x_0 est 2.

Mais $u_0 = 1$ et $x_0 = 2$ donnent en vertu de (76.)

92. $u = \lambda$, $x = 2\lambda$, donc $x = 2u$ et $u = \frac{1}{2}x$,

et $u_0 = 2$ et $x_0 = 1$ donnent

93. $u = 2\lambda$ et $x = \lambda$, donc $u = 2x$ et $x = \frac{1}{2}u$.

Premier cas de u impair et v pair.

Dans ce cas $x = \frac{1}{2}u$ (93.) n'a pas lieu. Donc il n'existe ici que l'unique valeur $2u$ de x (91.) et par suite l'unique valeur $\frac{1}{2}v$ de y, auxquelles pourra convenir la même valeur de σ qui convient aux facteurs u et v.

Pour voir si cela a lieu effectivement, écrivons $2u$ et $\frac{1}{2}v$ au lieu de x et y dans l'équation de condition

94. $xy_1 - yx_1 = 2$ (38.)

qui doit être satisfaite par les nouveaux facteurs x et y, nous aurons

95. $2uy_1 - \frac{1}{2}vx_1 = 2$.

Quelles que soient ici les valeurs de x_1 et y_1, il n'y en a *qu'un seul* couple $< 2u$ et $\frac{1}{2}v$ si $2u$ et $\frac{1}{2}v$ sont premiers entre eux, c'est à dire si $\frac{1}{2}v$ est *impair,* comme u l'est, et il n'y en a *que deux* couples de valeurs de x_1 et $y_1 < 2u$ et $\frac{1}{2}v$, savoir les deux valeurs x_1 et $x_1 + \frac{1}{2}(2u) = x_1 + u$ de x_1 et les deux valeurs y_1 et $y_1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}v) = y_1 + \frac{1}{4}v$ de y_1, x_1 étant $< u$ et $y_1 < \frac{1}{4}v$ dans le cas où $2u$ et $\frac{1}{2}v$ sont divisibles toutes les deux par 2, c'est à dire si $\frac{1}{2}v$ est pair comme $2u$ l'est.

Mais l'un des couples de valeurs de x_1 et y_1 qui satisfont l'équation (95.) est évidemment celui-ci:

$$96.\quad x_1 = 2u_1 \quad \text{et} \quad y_1 = \tfrac{1}{2}v_1,$$

car ces valeurs de x_1 et y_1 substituées dans (95.) donnent

$$97.\quad 2u.\tfrac{1}{2}v_1 - \tfrac{1}{2}v.2u_1 = 2 = uv_1 - vu_1,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation de condition (38.) elle même, qui doit être satisfaite par les facteurs u et v. D'ailleurs les valeurs $2u_1$ et $\frac{1}{2}v_1$ de x_1 et y_1 (96.) ont toujours lieu en nombres *entiers*. Car v a été supposé *pair*, donc vu_1 est pair et $uv = 2 + vu$, l'est également, et aussi v_1, u étant *impair;* donc $\frac{1}{2}v_1 = y_1$ est entier. Donc $2u_1$ et $\frac{1}{2}v_1$ constituent effectivement le seul couple de valeurs de x_1 et y_1 qui ont lieu en (96.) dans le cas de $\frac{1}{2}v$ *impair* et l'un des deux couples de valeurs que peuvent avoir x_1 et y_1 dans les cas où $\frac{1}{2}v$ est *pair*.

Mais les valeurs de σ qui puissent convenir aux facteurs x et y de $s = xy$ s'expriment par

$$98.\quad \sigma_x = xy_1 + 1 = yx_1 - 1 \quad (35.\text{ et } 36.),$$

pendant que celles qui conviennent aux facteurs u et v sont

$$99.\quad \sigma_u = uv_1 + 1 = vu_1 - 1 \quad (35.\text{ et } 36.).$$

Donc, faisant dans (99.) $x = 2u$, $y = \frac{1}{2}v$ (92.) et $x_1 = 2u$, $y_1 = \frac{1}{2}v_1$ (96.), on a

$$100.\quad \sigma_x = 2u.\tfrac{1}{2}v_1 + 1 = \tfrac{1}{2}v.2u_1 - 1 = uv_1 + 1 = vu_1 - 1$$

et suivant (99.)

$$101.\quad \sigma_x = \sigma_u.$$

Donc la même valeur σ_u de σ, qui convient aux facteurs u et v de $s = uv$, convient aussi aux facteurs $2u$ et $\frac{1}{2}v$ dans le cas où u est impair et v pair, mais à aucun autre couple de facteurs.

Second cas de u pair et v impair.

Dans ce cas $u = \frac{1}{2}x$ (92.) n'a pas lieu; car à cause de $uv = xy = s$, cela donneroit $uv = 2uy$ et par suite $y = \frac{1}{2}v$, ce qui ne se peut pas. Donc il n'y a qu'à supposer $x = \frac{1}{2}u$ suivant (93.) et par conséquent $y = 2v$. Cela étant substitué dans (94.) on a

$$102.\quad \tfrac{1}{2}uy_1 - 2vx_1 = 2.$$

A cette équation conviennent les valeurs

$$103.\quad \tfrac{1}{2}u_1 \text{ de } x_1 \quad \text{et} \quad 2v_1 \text{ de } y_1.$$

Il faut donc que ces valeurs de x_1 et y_1 soient ou le seul ou l'un des deux couples de valeurs que peuvent avoir x_1 et y_1 dans (102.).

Mais ces valeurs de x_1 et y_1 et celles $\frac{1}{2}u$ et $2v$ de x et y, étant substituées dans l'expression (98.) de σ_x, donnent

104. $\sigma_x = \frac{1}{2}u.2v_1 + 1 = 2v.\frac{1}{2}u_1 - 1 = uv_1 + 1 = vu_1 - 1$,

donc on trouve comme ci-dessus

$$105. \quad \sigma_x = \sigma_u \quad (99.).$$

Par conséquent la même valeur σ_u de σ qui convient aux facteurs u et v de $s = uv$ convient aussi aux facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$ dans le cas de u pair et v impair, mais à aucun autre couple de facteurs.

XXI. Si les deux facteurs u et v de $s = uv$ sont divisibles par 2 tous les deux, mais étant divisés par 2 donnent des quotiens tous deux *impairs,* les deux valeurs $\overset{1}{\sigma}$ et $\overset{2}{\sigma}$ de σ qui, dans le cas supposé de u et v pairs, ont toujours lieu suivant (XVII.) conviendront en même temps l'une aux facteurs

$$106. \quad \overset{1}{x} = \tfrac{1}{2}u, \quad \overset{1}{y} = 2v,$$

l'autre aux facteurs

$$107. \quad \overset{2}{x} = 2u, \quad \overset{2}{y} = \tfrac{1}{2}v.$$

A. Car dans le cas supposé le facteur $\overset{1}{x} = \frac{1}{2}u$ est *impair* pendant que l'autre $\overset{1}{y} = 2v$ est *pair.* Mais suivant ce qui a été démontré (XX. *A.*) la valeur de σ qui convient à ces facteurs $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$, qui existe toujours et qui suivant (XVI.) est unique, $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$ étant premiers entre eux, conviendra en même temps aux facteurs $2\overset{1}{x}$ et $\frac{1}{2}\overset{1}{y}$, c'est à dire aux facteurs u et v, $2\overset{1}{x}$ étant u et $\frac{1}{2}\overset{1}{y} = v$ (106.). Donc la valeur σ qui convient aux facteurs $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$ (106.) sera nécessairement une de celles qui conviennent aux facteurs u et v.

B. En second lieu $\frac{1}{2}v$ est *impair* pendant que $2u$ est *pair;* donc des deux facteurs $\overset{2}{x}$ et $\overset{2}{y}$ le premier est *pair* et le second *impair,* et suivant ce qui a été démontré (XX. *B.*) la valeur de σ qui convient à ces facteurs, qui existe toujours et qui suivant (XVI.) est unique, $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$ étant premiers entre eux, conviendra en même temps aux facteurs $\frac{1}{2}\overset{2}{x}$ et $2\overset{2}{y}$, c'est à dire aux facteurs u et v, $2\overset{2}{x}$ étant $= u$ et $2\overset{2}{y} = v$ (107.). Donc la valeur de σ qui convient aux facteurs $\overset{2}{x}$ et $\overset{2}{y}$, sera également une de celles qui conviennent aux facteurs u et v.

C. Mais la valeur de σ qui convient aux facteurs $\overset{1}{x} = \frac{1}{2}u$ et $\overset{1}{y} = 2v$ et en même temps aux facteurs u et v (*A.*) ne peut pas *coïncider* avec la valeur de σ qui convient aux facteurs $\overset{2}{x} = 2u$ et $\overset{2}{y} = \frac{1}{2}v$ et en même temps aux facteurs u et v (*B.*). Car si cela étoit, la même valeur de σ qui convient aux facteurs $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$ conviendroit aussi aux facteurs $\overset{2}{x} = 4\overset{1}{x}$ $\overset{2}{y} = \frac{1}{4}\overset{1}{y}$, et cela ne se peut pas, puisque suivant (XX. *A.* et *B.*) la valeur de σ qui convient par ex. aux facteurs $\overset{1}{x}$ et $\overset{1}{y}$ ne peut jamais convenir en même temps à d'autres facteurs que $2\overset{1}{x}$ et $\frac{1}{2}y$ ou $\frac{1}{2}x$ et $2y$, et non pas aux facteurs $4\overset{1}{x}$ et $\frac{1}{4}\overset{1}{y}$. Donc les valeurs de σ qui conviennent aux facteurs $\overset{1}{x} = \frac{1}{2}u$, $\overset{1}{y} = 2v$ et $\overset{2}{x} = 2u$, $\overset{2}{y} = \frac{1}{2}v$ et en même temps aux facteurs u et v, sont nécessairement les deux valeurs *différentes* $\overset{1}{\sigma}$ et $\overset{2}{\sigma}$ de σ correspondant aux facteurs u et v.

XXII. Si des deux facteurs u et v de $s = uv$

A. u est impair, v pair, la valeur de σ qui leur convient, ne peut pas convenir à un autre couple de facteurs x et y dont l'un est pair l'autre impair, si ce n'est que $\frac{1}{2}v$ soit impair, et

B. Si u est pair, v impair, la valeur de σ qui convient à ces deux facteurs, ne conviendra à un second couple de facteurs x et y dont l'un est pair l'autre impair, si ce n'est que $\frac{1}{2}u$ soit *impair*.

Car suivant (XX. *A.* et *B.*) la valeur de σ qui convient aux facteurs u et v, ne convient jamais en même temps à d'autres couples de facteurs qu'à ceux-ci: $x = 2u$, $y = \frac{1}{2}v$ et $x = \frac{1}{2}u$, $y = 2v$. Donc si dans le cas de v pair (*A.*) $\frac{1}{2}v = y$ n'étoit pas impair, $x = 2u$ et $y = \frac{1}{2}v$ ne seroient pas l'un pair, l'autre impair, mais au contraire pairs tous les deux, et si dans le cas de u pair (*B.*), $\frac{1}{2}u = x$ n'étoit pas impair, $x = \frac{1}{2}u$ et $y = 2v$ ne seroient pas non plus l'uu pair l'autre impair, comme cela doit être, mais pairs tous les deux.

XXIII. Si les deux facteurs u et v de $s = uv$ sont *pairs tous les deux*, cas où leur conviennent deux valeurs $\overset{1}{\sigma}_u$ et $\overset{2}{\sigma}_u$ de σ (XVII.), aucune de ces deux valeurs de σ peut coïncider avec l'une ou l'autre des deux valeurs $\overset{1}{\sigma}_x$ et $\overset{2}{\sigma}_x$ de σ appartenantes à deux autres facteurs quelconques x et y de $s = xy$ également *pair tous les deux.*

Car d'abord quels que soient les facteurs u et v ou x et y, supposés pairs tous les deux: il faut toujours qu'au moins un d'eux divisé par 2 donne pour quotient un nombre *impair:* car si ces facteurs tous les deux divisés par 2 donnoient pour quotients des nombres pairs, ils auroient pour facteur commun un nombre plus grand que 2, et aux facteurs de ce genre il ne convient pas suivant (XIII.) aucun σ.

Cela posé, soient

A. en premier lieu $\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}x$ *impairs* en même temps, la valeur de σ qui convient aux facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$, valeur qui suivant (XIV.) est unique, $\frac{1}{2}u$ et $2v$ étant premiers entre eux et que nous désignerons par $\sigma_{\frac{1}{2}u}$, conviendra aussi suivant (XX. *A.*) en même temps aux facteurs u et v; donc on aura ou $\sigma_{\frac{1}{2}u} = \overset{1}{\sigma}_u$, ou $\sigma_{\frac{1}{2}u} = \overset{2}{\sigma}_u$. Par la même raison on aura ou $\sigma_{\frac{1}{2}x} = \overset{1}{\sigma}_x$, ou $\sigma_{\frac{1}{2}x} = \overset{2}{\sigma}_x$. Mais $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ et $\sigma_{\frac{1}{2}x}$ ne peuvent être égaux. Car les deux couples de facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$ et $\frac{1}{2}x$ et $2y$, auxquels conviennent les valeurs $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ et $\sigma_{\frac{1}{2}x}$ de σ, sont du nombre de ceux dont le premier est impair, le second pair, et suivant (XXII. *A.*) la valeur de $\sigma_{\frac{1}{2}u}$, qui convient aux facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$ par exemple, ne pourra convenir à aucun autre couples de facteurs dont l'un est pair l'autre impair, si ce n'est que $\frac{1}{2}(2v) = v$ soit impair, ce qui n'est pas, v étant *pair* par hypothèse.

Donc $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ étant égal à l'une des deux valeurs de σ_u, par ex. à $\overset{1}{\sigma}_u$ et $\sigma_{\frac{1}{2}x}$ à l'une des deux valeurs de σ_x, par ex. à $\overset{1}{\sigma}_x$, on ne peut avoir $\overset{1}{\sigma}_u = \overset{1}{\sigma}_x$. Mais les deux valeurs de σ_u et celles de σ_x sont toujours différentes l'une de l'autre de $\frac{1}{2}s$ (XVII.): donc, si peut-être, bien que $\overset{1}{\sigma}_u$ ne soit pas $\overset{1}{\sigma}_x$, $\overset{1}{\sigma}_u$ était $= \overset{2}{\sigma}_x$, on auroit $\overset{1}{\sigma}_u = \overset{2}{\sigma}_x = \overset{1}{\sigma}_x \pm \frac{1}{2}s$ et par suite, $\overset{2}{\sigma}_u$ étant $= \overset{1}{\sigma}_u \pm \frac{1}{2}s$, $\overset{1}{\sigma}_u \pm s = \overset{1}{\sigma}_x \pm \frac{1}{2}s \pm \frac{1}{2}s$, c'est à dire ou $\overset{1}{\sigma}_u \pm s = \overset{1}{\sigma}_x \pm s$ ou $\overset{1}{\sigma}_u \pm s = \overset{1}{\sigma}_x \pm 0 = \overset{1}{\sigma}_x$. De ces deux équations on tire ou $\overset{1}{\sigma}_u = \overset{1}{\sigma}_x \pm 2s$ ou $\overset{1}{\sigma}_u = \overset{1}{\sigma}_x \pm s$ ou $\overset{1}{\sigma}_u = \overset{1}{\sigma}_x$; mais aucune de ces égalités ne peut avoir lieu, $\overset{1}{\sigma}_u$ étant $< s$, positif et non pas $= \overset{1}{\sigma}_x$.

Donc dans notre cas aucune des deux valeurs de σ_u ne peut être égale à aucune des deux valeurs de σ_x.

D'ailleurs il est ici évidemment indifférent que $\frac{1}{2}v$ et $\frac{1}{2}y$ soient pairs ou impairs.

Et si au lieu de $\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}v$ et $\frac{1}{2}y$ étoient impairs en même temps, le raisonnement à faire seroit semblable à celui ci-dessus et le résultat seroit le même.

B. Soient en second lieu $\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}y$ impairs en même temps, on aura comme ci-dessus ou $\sigma_{\frac{1}{2}u} = \overset{1}{\sigma}_u$ ou $\sigma_{\frac{1}{2}u} = \overset{2}{\sigma}_u$. Et comme la valeur de σ, qui convient aux facteurs $2x$ et y, valeur qui suivant (XIV.) est unique, $2x$ et y étant premiers entre eux, et que nous désignerons par σ_{2x}, conviendra aussi suivant (XX. *B.*) en même temps aux facteurs u et v, on aura ou $\sigma_{2x} = \overset{1}{\sigma}_x$ ou $\sigma_{2x} = \overset{2}{\sigma}_x$. Mais $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ et σ_{2x} ne peuvent être égaux. Car les deux couples de facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$ et $2x$ et $\frac{1}{2}y$, auxquels conviennent les valeurs $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ et σ_{2x} de σ, sont du nombre de ceux dont l'un des deux facteurs est pair, l'autre impair, et suivant (XXII. *A.*) la valeur de $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ qui convient aux facteurs $\frac{1}{2}u$ et $2v$ par ex., ne pourra convenir à aucun autre couple de facteurs dont l'un est pair l'autre impair, si ce n'est que $\frac{1}{2}(2v) = v$ soit impair, ce qui n'est pas, v étant pair par hypothèse.

Donc $\sigma_{\frac{1}{2}u}$ étant égal à l'une des deux valeurs de σ_u, par ex. à $\overset{1}{\sigma}_u$, et σ_{2x} à l'une des deux valeurs de σ_x, à $\overset{1}{\sigma}_1 x$ par ex.: on ne peut avoir $\overset{1}{\sigma}_u = \overset{1}{\sigma}_x$. De là on conclut par les mêmes raisonnements que ci-dessus, qu'aucune valeur de σ_u ne peut être égale à aucune des valeurs de σ_x, et cela indépendamment de ce que $\frac{1}{2}v$ et $\frac{1}{2}x$ soient pairs ou impairs. La même chose aura lieu dans le cas ou au lieu de $\frac{1}{2}u$ et $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}v$ et $\frac{1}{2}x$ étoient impairs en même temps.

Donc dans aucun cas aucune des deux valeurs de σ, qui conviennent aux facteurs u et v *pair tous les deux*, ne peut coïncider avec aucune des deux valeurs de σ, qui conviennent aux facteurs x et y, également *pairs tous les deux*.

XXIV. Maintenant à l'aide de ces différentes lois d'existence et de correspondance des valeurs de σ, propres à satisfaire l'équation (28) ou celle (29.) pour les différentes valeurs des facteurs u et v de s, il sera facile de juger *le nombre* $2n$ *des valeurs* existantes de σ et par là, suivant les expressions (25. et 26. X.), *le signe* de l'unité dans l'expression $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_\varphi = Ns \pm 1$. Pour cela il ne s'agit plus que de la décomposition de s en facteurs u et v, pour connoître le nombre des couples de ces facteurs tant de ceux qui sont impairs tous les deux, que de ceux dont l'un est pair, l'autre impair, et de ceux qui sont pairs tous les deux.

XXV. L'expression générale de s est

$$108. \quad s = 2^m p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \dots p_k^{m_k},$$

$p_1, p_2, p_3, \dots p_k$ étant des nombres premiers impairs et $m, m_1, m_2, m_3, \dots m_k$ des nombres entiers et positifs quelconques. Evidemment cette expression embrasse tous les cas possibles.

D'abord nous remarquerons qu'en décomposant s en deux facteurs u et v propres à admettre des valeurs de σ, les facteurs égaux dans les puissances de $p_1, p_2, p_3, \dots p_k$ ne doivent jamais être separés pour entrer les uns dans u et les autres dans v; car si par ex. un ou plusieurs des facteurs égaux p_1 de $p_1^{m_1}$ se présentoient dans u et les autres dans v, les deux facteurs u et v auroient p_1 ou une puissance de p_1, c'est à dire des nombres plus grands que 2 pour *facteurs communs;* et aux facteurs de ce genre ne convient aucune valeur de σ (XIII.). Donc, pour ce qui regarde la décomposition de s, dont il s'agit ici, les *puissances* $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$, $p_3^{m_3}, \dots p_k^{m_k}$ n'y figurent que comme des nombres indivisibles. Elles pourront donc être désignés par de simples lettres, par ex. par P_1, P_2, $P_3, \dots P_k$. L'expression générale de s (108.) se réduit par là à la suivante plus simple:

$$109. \quad s = 2^m P_1 P_2 P_3 \dots P_k.$$

En second lieu les facteurs égaux 2 de la puissance 2^m pourront à la vérité être séparés pour entrer en u et en v en même temps, parceque u et v peuvent avoir le nombre 2 pour facteur commun (XIII.). Mais à cause de cette circonstance même, il ne sera permis que de détacher 2 seul de 2^m, mais non pas une puissance plus élevée de 2. Car si l'on introduisoit par ex. 2^μ (μ étant >1) dans u et $2^{m-\mu}$ ($m-\mu$ étant encore >1) dans v, u et v auroient pour facteur commun un nombre plus grand que 2; ce qui ne doit pas être (XIII.). Donc généralement les deux facteurs 2 et 2^{m-1} de 2^m, de leur coté, figurent ici comme des nombres indivisibles. L'expression générale de s (109.), mise sous la forme propre à la décomposition dont il s'agit, est donc

$$110. \quad s = 2.2^{m-1} P_1 P_2 P_3 \dots P_k.$$

XXVI. Maintenant pour trouver tous les couples de facteurs u et v qui peuvent avoir lieu, il n'y aura qu'à donner à l'un des facteurs seul, par ex. à u, toutes les valeurs possibles. *Les réciproques* $s = vu$ de $s = uv$, auxquelles il faut avoir égard également, seront déjà touchées par là en même temps: car en donnant à u *toutes* les valeurs *possibles*, on touchera nécessairement la valeur correspondante de $v = \frac{s}{u}$ pour chaque valeur de u.

Cela posé, la totalité des valeurs possibles de u pourra être ordonnée en quatre séries.

La *première série* contiendra toutes les valeurs *impaires* de u, savoir les nombres

$$111. \quad \begin{cases} 1, \; P_1, \; P_2, \; P_3 \ldots . P_k \\ P_1 P_2, \; P_1 P_3 \ldots . P_1 P_k, \; P_2 P_3, \; P_2 P_4 \ldots . P_2 P_k, \; P_3 P_4 \text{ etc.} \\ P_1 P_2 P_3, \; P_1 P_2 P_4 \ldots . P_1 P_2 P_k, \; P_1 P_3 P_4 \text{ etc.} \\ P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots . P_1 P_2 P_3 P_5 \text{ etc.} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ P_1 P_2 P_3 \ldots . P_k, \end{cases}$$

c'est à dire: tous les facteurs impairs P_1, P_2, P_3, ... P_k eux mêmes, en y ajoutant le facteur 1, tous les produits des facteurs P_1, P_2, P_3, ... P_k deux à deux, trois à trois, quatre à quatre etc. jusqu'au produit $P_1 P_2 P_3 \ldots . P_k$.

La *seconde série* contiendra toutes ces mêmes valeurs de u, multipliées par le facteur 2 de s.

La *troisième série* contiendra également toutes les valeurs de u de la première série, multipliées par le facteur 2^{m-1} de s.

La *quatrième série* enfin contiendra encore toutes les valeurs de u de la première série, multipliées par le facteur 2^m de s.

On épuisera évidemment par là toutes les valeurs possibles de u.

Le nombre des termes des séries sera le même dans toutes les quatre séries; car chaque terme de la première série revient dans les trois autres, multiplié seulement par 2, 2^{m-1} et 2^m.

Ce nombre sera 2^k. Car en désignant les coëfficients binomiaux relatifs à l'exposant k, par k_1, k_2, k_3, ... k_{k-1}, $k_k = 1$, le nombre des termes de la première ligne (111.) est $1 + k_1$; celui des termes de la seconde ligne, c'est à dire le nombre des produits des k facteurs P_1, P_2, P_3, ... P_k, pris deux à deux, est k_2; celui des termes de la troisième ligne, c'est à dire le nombre des produits de k facteurs P_1, P_2, P_3, ... P_k pris trois à trois, est k_3 et ainsi de suite: donc le nombre de tous les termes (111.) de la première série est

$$112. \quad 1+k_1+k_2+k_3\ldots\ldots+k_k = (1+1)^k = 2^k.$$

Dans la *première* série le premier des deux facteurs u et v est toujours *impair,* le second *pair.*

Dans la *seconde* et la *troisième* série les facteurs u et v sont *pairs* tous les deux.

Dans la *quatrième* série le premier des deux facteurs u et v est *pair,* le second *impair.*

XXVII. A chaque couple de facteurs u et v, dans le cas où l'un est *pair* l'autre *impair,* c'est à dire où les facteurs sont *premiers entre eux,* ne correspondra qu'une seule valeur de σ (XVI.). Donc la *première* série ainsi, que la *quatrième,* fourniront chacune 2^k valeurs de σ.

Dans le cas où les facteurs u et v sont *pairs* tous les deux, il correspondra *deux* valeurs différentes de σ à chaque couple (XVII.). Donc la *deuxième,* ainsi que la *troisième* série, fourniront chacune $2.2^k = 2^{k+1}$ valeurs de σ.

Toutes les $2.2^{k+1} = 2^{k+2}$ valeurs de σ qu'offrent la *seconde* et la *troisième* série, seront différentes entre elles, les facteurs u et v étant pairs tous les deux (XXIII.).

Enfin toutes les $2.2^k = 2^{k+1}$ valeurs de σ qu'offrent la *première* et la *quatrième* série, se retrouveront parmi celles de la *seconde* et *troisième* série, les facteurs u et v étant l'un pair l'autre impair (XX.).

Donc le *maximum* du nombre des valeurs différentes que peut avoir σ, est 2^{k+2}.

XXVIII. Maintenant pour arriver aux résultats finaux, il n'y a plus qu'à appliquer ce qui a été dit (XXVII.) aux différents cas qui peuvent se présenter.

Premier cas $m>2$, $k>0$, c'est à dire

$$113. \quad s = 2.2^{m-1}P_1P_2P_3\ldots\ldots P_k.$$

Dans ce cas les séries (XXVI.) ont lieu toutes les quatre; donc le nombre $2n$ des valeurs différentes de σ sera, comme il a été déjà trouvé dans (XXVII.), $= 2^{k+2}$. Cela donne

$$114. \quad n = 2^{k+1},$$

nombre toujours *pair.* Donc suivant (25. X.) on a dans ce cas

$$115. \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\ldots\sigma_\varphi = Ns+1.$$

Second cas $m>2$, $k=0$, c'est à dire

$$115'.\quad s = 2.2^{m-1},\quad \text{où}\quad m-1>1.$$

Dans ce cas les séries (XXVI.) ont lieu encore toutes les quatre; car bien qu'il n'existe plus aucun facteur impair $P>1$, il reste néanmoins toujours le facteur impair 1. On trouvera donc la valeur de n pour le cas actuel en mettant seulement $k=0$ dans (114.). Cela donne

$$116.\quad n = 2,$$

nombre pair. Donc suivant (25. X.) on a dans ce cas

$$117.\quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\ldots\sigma_\varphi = Ns+1.$$

Troisième cas $m=2$, $k>0$, c'est à dire

$$118.\quad s = 2.2P_1P_2P_3\ldots\ldots P_k.$$

Dans ce cas à la vérité les séries (XXVI.) ont lieu encore toutes les quatre; mais les termes de la troisième série seront *identiquement* les mêmes que ceux de la seconde, le facteur 2^{m-1} de s étant ici *égal* au facteur 2. Donc la seconde et la troisième série n'offrent plus ensemble que 2^{k+1} valeurs différentes de σ, avec lesquelles les 2^{k+1} valeurs de la première et quatrième coïncident. Donc le nombre $2n$ des valeurs *différentes* de σ n'est ici que 2^{k+1} et cela donne

$$119.\quad n = 2^k,$$

nombre toujours *pair*, k ayant été supposé >0. Donc en vertu de (25. X.) on a dans le cas actuel

$$120.\quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\ldots\sigma_\varphi = Ns+1.$$

Quatrième cas $m=2$, $k=0$, c'est à dire

$$121.\quad s = 2.2 = 4.$$

Dans ce cas les quatre séries existent toujours; mais comme dans le troisième cas, les termes de la troisième série coïncident avec ceux de la seconde. Donc pour avoir la valeur de n dans ce cas, il n'y a qu'à faire $k=0$ dans (119.). Cela donne

$$122.\quad n = 2^0 = 1,$$

nombre *impair*. Donc en vertu de (26. X.) on a ici

$$123.\quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\ldots\sigma_\varphi = Ns-1.$$

Cinquième cas $m=1$, $k>1$, c'est à dire

$$124.\quad s = 2P_1P_2P_3\ldots\ldots P_k.$$

Dans ce cas la *seconde* et la *troisième* séries (XXVI.) n'ont pas lieu du tout, parcequ'il n'existe pas ici de couples de facteurs u et v *pairs tous les deux*. Il ne reste que la *première* et la *quatrième* série qui offrent chacune 2^k valeurs de σ. Puis tous les couples des valeurs de u et v dans les deux séries sont ici dans le cas de (XXII.), parceque tout facteur *pair,* divisé par 2, donne pour quotient un nombre *impair.* Donc les 2^k valeurs de σ qu'offre la *première* série, coïncident avec celles qu'offre la *quatrième,* et le nombre *total* des valeurs *différentes* de σ n'est pas 2.2^k, mais seulement 2^k. Donc on a $2n = 2^k$ et

$$125. \quad n = 2^{k-1},$$

nombre toujours *pair,* k ayant été supposé >1. Donc en vertu de (25. X.) on a ici

$$126. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns + 1.$$

Sixième cas $m = 1$, $k = 1$, c'est à dire

$$127. \quad s = 2P_1.$$

Dans ce cas les circonstances, quant aux séries, sont les mêmes que dans le cas précédent. Donc pour avoir la valeur de n, il n'y a qu'à faire $k = 1$ dans (125.). Cela donne

$$128. \quad n = 2^0 = 1,$$

nombre *impair.* Donc on a ici en vertu de (26. X.)

$$129. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns - 1.$$

Septième cas $m = 1$, $k = 0$, c'est à dire

$$130. \quad s = 2.$$

Dans ce cas les circonstances, quant aux séries, sont encore les mêmes que dans le *cinquième* cas. Mais ici le nombre 2^k des valeurs de σ, qu'offre la première série, est $2^0 = 1$, et cette seule valeur de σ coïncide avec le $2^k = 2^0 = 1$ valeur que donne la quatrième série. Donc il n'existe en total qu'une seule et unique valeur de σ, laquelle ne peut être que 1, σ devant être >0 et <2. Donc on a dans le cas actuel

$$131. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns + 1.$$

Huitième cas $m = 0$, $k > 1$, c'est à dire

$$132. \quad s = P_1 P_2 P_3 \dots P_k.$$

Dans ce cas la *première* série *seule* a lieu dans (XXVI.), car il n'existe pas des facteurs *pairs.* Cette série offre 2^k valeurs différentes de σ. Donc on a ici $2n = 2^k$ et

$$133. \quad n = 2^{k-1},$$

nombre toujours *pair,* k ayant été supposé >1. Donc en vertu de (25. X.) on a ici

$$134. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_\varphi = Ns + 1.$$

Neuvième cas $m=0$, $k=1$, c'est à dire

$$135.\quad s = P_1.$$

Dans ce cas les circonstances, quant aux séries, sont les mêmes que dans le cas précédent. Il n'y a donc qu'à mettre $k=1$ dans (133.) pour trouver la valeur de n. Cela donne

$$136.\quad n = 2^0 = 1,$$

nombre *impair*. Donc en vertu de (26. X.) on a ici

$$137.\quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_\varphi = Ns-1.$$

Dixième cas $m=0$, $k=0$, c'est à dire

$$138.\quad s = 1.$$

Dans ce cas, σ devant être >0 et $<s$, il n'en existe aucune valeur.

XXIX. Par cette énumération des cas, qui épuise tous les cas possibles, on voit que seulement dans le *quatrième, sixième* et *neuvième* cas, c'est à dire si

$$139.\quad s = 4,$$
$$140.\quad s = 2P_1 = 2p^m \quad \text{et}$$
$$141.\quad s = P_1 = p^m,$$

on a

$$142.\quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_\varphi = Ns-1.$$

Dans *tous* les autres cas, où il existe de nombres $\sigma<s$ premiers à s, on a

$$143.\quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_\varphi = Ns+1,$$

et c'est ce qu'énonce le théorème, qui par conséquent se trouve démontré par ce qui précède.

XXX. Nous ajouterons un exemple en nombres relatif au *premier* cas (XXVIII.), avec les valeurs calculées de σ, pour mettre en évidence ce qui a été trouvé, et nous discuterons cet exemple. Mais pour abréger, nous laisserons au lecteur à calculer et à discuter des exemples relatifs aux autres cas.

Premier cas. $m>2$, $k>0$. Soit $m=3$, $k=2$ et

$$144.\quad s = 2.2^2.3.5 = 120.$$

145.

Série I.			Série II.			Série III.			Série IV.		
u	v	σ	u	v	σ	u	v	σ	u	v	σ
1	120	1	2	60	1, 61	4	30	31, 91	8	15	31
3	40	41	6	20	41, 101	12	10	11, 71	24	5	71
5	24	49	10	12	49, 109	20	6	19, 79	40	3	79
15	8	89	30	4	29, 89	60	2	59, 119	120	1	119

On voit par ce tableau

A. Qu'ici toutes les valeurs de σ de la seconde et de la troisième série, c'est à dire les valeurs de σ correspondant aux facteurs u et v de s *pairs tous les deux,* sont différentes entre elles (XXIII.).

B. Qu'à chaque couple des facteurs u et v *pairs tous les deux* il correspond *deux* valeurs de σ différentes de $\frac{1}{2}s = 60$ l'une de l'autre (XVII.).

C. Qu'à chaque couple de facteurs u et v premiers entre eux, il correspond une *seule* valeur de σ (XVI.).

D. Que toute valeur de σ correspondante à un couple de facteurs u et v *premiers entre eux,* convient en même temps ou au couple $2u$ et $\frac{1}{2}v$ ou au couple $\frac{1}{2}u$ et $2v$, suivant que v ou u est pair (XX.).

E. Que si la valeur σ_1 de σ correspond au couple u et v des facteurs, la valeur $s-\sigma_1$ de σ correspond au couple $\frac{s}{u}$ et $\frac{s}{v}$ (XVIII.).

F. Le nombres des termes $2k$ de chaque série est ici $2^2=4$ (112.). Donc le nombre *total* $2n$ des valeurs *différentes* de σ, c'est à dire de celles qu'offrent les séries (II.) et (III.), celles des séries (I.) et (IV.) y étant comprises, est ici $2.2.2^k = 2^{k+2}$; donc on a $n = 2^{k+1}$ (114.).

G. Chaque valeur de σ dans les séries (II.) et (III.) (et celles des séries (I.) et (IV.) ne nous importent ici, puisqu'elles ne diffèrent pas des précédentes) trouvant son *complément* $s-\sigma$ parmi les σ des mêmes séries, on a, en faisant les produits des σ par couples, $\sigma(s-\sigma) = s\sigma - \sigma^2$ *pour chaque couple,* et cela, σ^2 étant toujours $= Ns+1$, donne $s\sigma - (Ns+1) = Ns-1$. Donc le produit des *toutes* les valeurs de σ qui, multipliées par elles mêmes et ces produits divisés par s, laissent $+1$ pour restes, est égal à $Ns-1$ élevé à une puissance dont l'exposant est le nombre n des *couples* des valeurs de σ, c'est à dire le nombre $n=2^{k+1}$. Ce nombre étant *pair,* on a ici

$$146. \quad (Ns-1)^{2^{k+1}} = Ns+1,$$

c'est à dire, le produit des tous les nombres σ premiers avec s, qui donnent $\sigma^2 = Ns+1$, est ici $= Ns+1$.

H. Maintenant la *totalité* des nombres σ premiers avec 1 est ici

147. 1*, 7, 11*, 13, 17, 19*, 23, 29*, 31*, 37, 41*, 43, 47, 49*, 53, 59*, 61*, 67, 71*, 73, 77, 79*, 83, 89*, 91*, 97, 101*, 103, 107, 109*, 113, 119*.

Dans cette liste des nombres σ premiers avec s on a sur le champ marqué d'un astérisque ceux qui donnent $\sigma^2 = Ns + 1$, tels qu'ils ont été trouvés dans (145.). Les autres, multipliés par couples, *mais non pas par eux-mêmes*, en donnant également $Ns + 1$ par couple, doivent parcourir tous les nombres σ *non-marqués* d'un astérisque (IX.). C'est ce qui a lieu en effet, car on trouve

$$148. \quad \left\{\begin{array}{rcl} 7.103 &=& 6.120+1 \\ 13.\ 37 &=& 4.120+1 \\ 17.113 &=& 16.120+1 \\ 23.\ 47 &=& 9.120+1 \\ 43.\ 67 &=& 14.120+1 \\ 53.\ 77 &=& 34.120+1 \\ 73.\ 97 &=& 59.120+1 \\ 83.107 &=& 74.120+1 \end{array}\right.$$

où, comme on voit, les facteurs à gauche parcourent tous les nombres

149. 7, 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 67, 73, 77, 83, 97, 103, 107, 113

premiers avec $s = 120$ et non-marqués d'un astérisque dans (147.). Donc aussi le produit de ces nombres est $Ns + 1$. Mais le produit des nombres σ qui donnent $\sigma^2 = Ns + 1$, étoit de son côté $= Ns + 1$ (147.). Donc le produit de *tous* les nombres σ (147.) premiers avec $s = 120$ est $= Ns + 1$, comme il a été trouvé (115.).

XXXI. Le theorème de *Wilson* proprement dit se rapporte aux nombres *premiers absolus.* C'est un des cas très spéciaux compris dans le *neuvième* cas (XXIX.), savoir celui où $m = 0$, $k = 1$ et $P_1 = p$, c'est à dire $m_1 = 1$. Pour ce neuvième cas il a été trouvé généralement

$$150. \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots\ldots \sigma_\varphi = Ns - 1,$$

et c'est ce qu'apprend aussi le théorème de *Wilson* proprement dit.

XXXII. Qu'il nous soit permis de remarquer que la démonstration que nous venons d'écrire n'est pas au fond aussi longue qu'elle le paroît être. Car nous n'avons ici *rien* supposé de connu. Nous avons présenté en même temps, comme lemmes, des théorèmes, qui de leur côté trouvent leur application encore en d'autres cas. Si l'on ne compte pas ces lemmes, l'étendue de la démonstration en elle-même ne se trouvera pas être très grande.

Berlin en Juin 1839.