

## 10.

**Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.**

(Von Herrn Dr. phil. G. Eisenstein, Privatdocent zu Berlin.)

**IV. Über einen allgemeinen Satz, welcher das Additionstheorem für elliptische Functionen als speciellen Fall enthält.**

Wenn *Gaußs* seinen schon gefundenen Beweisen des quadratischen Reziprocitätsgesetzes eine Reihe neuer hinzugefügte, zum Theil um den Weg zu der weit schwierigeren Theorie der biquadratischen Reste zu erleichtern, so möchte es nach diesem Vorbilde nicht unpassend erscheinen, in ähnlicher Weise den Fundamentalsätzen über elliptische Functionen immer neue Seiten abzugewinnen, in der Hoffnung, es könnte die eine oder die andere Wendung zur Aufklärung und leichtern Erforschung der Eigenschaften der *Abelschen* Functionen etwas beitragen. — So sahen wir, wie neulich *Hermite*, von den trigonometrischen Reihen ausgehend, welche den Zähler und Nenner der elliptischen Functionen constituiren, zu dem *Abelschen* Theorem für diese Functionen gelangte, indem er sich auf dasselbe Princip stützte, auf welches ich schon im 27ten Bande dieses Journals Seite 187 aufmerksam gemacht habe, daß nämlich jede homogene Verbindung jener Reihen wieder eine ähnliche Reihe hervorbringt. — Hierher gehört auch das elegante Verfahren, durch welches *Richelot* die *Lagrangesche* Integrationsmethode auf die *Abelschen* Functionen ausgedehnt hat.

In Nr. II. dieser Beiträge habe ich einen Beweis des Additionstheorems gegeben, welcher hauptsächlich auf dem Umstande beruht, daß die geraden Differentialquotienten der elliptischen Functionen durch ganze rationale Verbindungen dieser Functionen, die ungeraden Differentialquotienten derselben durch Producte aus ganzen rationalen Verbindungen in die Wurzelgröße ausgedrückt werden. Der hier folgende Beweis, welcher auf demselben Principe beruht, unterscheidet sich dennoch in wesentlichen Punkten von dem ersten und läßt zugleich deutlich sehen, warum das Verfahren nicht gelingt, wenn die Function unter der Quadratwurzel auf einen höheren als den vierten Grad

steigt, obwohl auch dann noch jene eben erwähnte Eigenschaft der Differentialquotienten Statt findet.

Es sei  $x = \varphi(t)$  diejenige Function von  $t$ , für welche

$$t = \int_0^x \frac{\partial x}{\mathcal{A}(x)}$$

ist, indem der Kürze wegen  $\mathcal{A}(x)$  die Quadratwurzel aus einer geraden ganzen Function  $2n$ ten Grades

$$x^{2n} + bx^{2n-2} + \dots + ex^2 + 1 = \lambda(x)$$

bezeichnet, nämlich  $\mathcal{A}(x) = \sqrt{\lambda(x)}$ . Da zufolge der eben gemachten Annahme  $\frac{\partial x}{\partial t} = \mathcal{A}(x)$ ,  $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \lambda(x)$ ,  $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda'(x)}{\mathcal{A}(x)} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2} \lambda'(x) = nx^{2n-1} + (n-1)bx^{2n-3} + \text{etc.}$  ist, so erhält man die beiden ersten Differentialquotienten jeder Function  $F(x)$  von  $x$ , nach  $t$ , wie folgt ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x)}{\partial t} &= F'(x) \mathcal{A}(x), & \frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2} &= F'(x) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + F''(x) \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 \\ & & &= F'(x) (nx^{2n-1} + (n-1)bx^{2n-3} + \text{etc.}) \\ & & &+ F''(x) (x^{2n} + bx^{2n-2} + \text{etc.}). \end{aligned}$$

Hieraus sieht man sogleich, dafs, wenn  $F(x)$  eine ganze Function von  $x$  ist,  $\frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2}$  ebenfalls eine ganze Function von  $x$  sein wird, deren Grad um  $2n-2$  Einheiten (bei den elliptischen Functionen um 2 Einheiten, bei den Sinus um 0 Einheiten) höher ist, als der von  $F(x)$ ; und zwar wird, wenn  $Ax^\mu$  das höchste Glied in  $F(x)$  ist, das höchste Glied in  $\frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2}$ ,

$$\mu Ax^{\mu-1} \cdot nx^{2n-1} + \mu(\mu-1) Ax^{\mu-2} \cdot x^{2n} = \mu(\mu+n-1) Ax^{\mu+2n-2}$$

sein. Geht man demnach von  $x$  selbst als der einfachsten ganzen Function aus und bildet successive dessen gerade Differentialquotienten nach  $t$ , so werden dieselben sämmtlich ganze Functionen von  $x$  sein, deren Grade fortwährend um  $2n-2$  Einheiten steigen, und es werden die höchsten Glieder von

$$x, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 x}{\partial t^4}, \quad \text{etc.}, \quad \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}}, \quad \text{resp. sein:}$$

$$\begin{aligned} x, \quad nx^{2n-1}, \quad n(2n-1)(3n-2)x^{4n-3}, \quad \text{etc.}, \\ n(2n-1)(3n-2) \dots ((2\mu-1)n-2\mu+2)x^{2\mu n-2\mu+1}, \end{aligned}$$

so dafs man schreiben kann:

$$(1.) \quad \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = n(2n-1)(3n-2) \dots ((2\mu-1)n-2\mu+2)x^{2\mu n-2\mu+1} + N,$$

wo die Anzahl der numerischen Factoren, deren Product den Coëfficienten

des höchsten Gliedes bildet,  $2\mu - 1$  beträgt, und wo durch  $N$  der Complex aller derjenigen Glieder ausgedrückt wird, welche niedrigere Potenzen von  $x$  enthalten, als die  $2\mu n - 2\mu + 1$ te. Ich werde nämlich hier und im Folgenden, wenn es mir bei einer ganzen Function lediglich auf die Betrachtung ihres höchsten Gliedes ankommt, nur dieses schreiben und die Summe aller übrigen Glieder durch  $+N$  andeuten; in umgekehrter Weise werde ich, wenn es mir bei einer nach *steigenden* Potenzen der Variabeln geordneten ganzen Function, oder unendlichen Reihe, nur auf das niedrigste oder Anfangsglied ankommt, diesem die Summe der höhern Glieder mit  $+H$  anfügen. — Für elliptische Functionen ist  $n = 2$  und die Formel (1.) wird für diese

$$(1'.) \quad \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = (2\mu)! x^{2\mu+1} + N.$$

Übrigens ist leicht zu sehen, daß die ganze Function zur Rechten in (1.) oder (1'.) nur ungerade Potenzen von  $x$  enthält.

Den allgemeinen Ausdruck für die ungeraden Differentialquotienten von  $x$  nach  $t$  erhält man, wenn man (1.) noch einmal nach  $t$  differentiirt, nämlich:

$$(2.) \quad \frac{\partial^{2\mu+1} x}{\partial t^{2\mu+1}} = A(x) \{n(2n-1)(3n-2) \dots (2\mu n - 2\mu + 1) x^{2\mu n - 2\mu} + N\},$$

d. h. gleich dem Producte aus  $A(x)$  in eine gerade ganze Function von  $x$ , wo aber das neue  $N$  um einen Grad niedriger ist, als das obige in (1.) und eben deshalb wiederum jenes in (2.) dieselbe Rolle spielt, wie dieses in (1.). Für elliptische Functionen ist

$$(2'.) \quad \frac{\partial^{2\mu+1} x}{\partial t^{2\mu+1}} = A(x) \{(2\mu + 1)! x^{2\mu} + N\}.$$

Außer diesen Entwicklungen der Differentialquotienten von  $x$  nach *fallenden* Potenzen von  $x$ , bei welchen nur die höchsten Glieder berechnet, die übrigen bloß angedeutet sind, bedürfen wir noch der Entwicklungen von  $t^h$  und  $\frac{t^h}{A(x)}$  nach *steigenden* Potenzen von  $x$ , oder vielmehr nur der niedrigsten, d. h. der Anfangsglieder dieser Entwicklungen. Da  $\lambda(x)$ , nach steigenden Potenzen von  $x$  geordnet, mit 1 anfangen soll, so fangen  $A(x)$  und  $\frac{1}{A(x)}$  ebenfalls mit 1 an, und  $\int_0^{\partial x} \frac{\partial x}{A(x)} = t$  fängt mit  $x$ , folglich  $t^h$  mit  $x^h$  und  $\frac{t^h}{A(x)}$  ebenfalls mit  $x^h$  an. Nach obiger Übereinkunft kann also geschrieben werden:

$$(3.) \quad t^h = x^h + H,$$

$$(4.) \quad \frac{t^h}{A(x)} = x^h + H.$$

Diese Reihen enthalten nur gerade, oder nur ungerade Potenzen von  $x$ , je nachdem  $h$  gerade oder ungerade ist.

Nach dem *Taylor'schen* Satze können folgende vier Entwicklungen angenommen werden, in welchen  $\varphi(u) = \gamma$  gesetzt ist, so daß  $\gamma$  dieselbe Function von  $u$ , welche  $x$  von  $t$ , und  $u$  dieselbe Function von  $\gamma$ , welche  $t$  von  $x$  ist:

$$\begin{aligned}\varphi(t+u) &= x + \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{u}{1!} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{u^2}{2!} + \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\partial^{\mu} x}{\partial t^{\mu}} \cdot \frac{u^{\mu}}{\mu!}, \\ \varphi(t-u) &= x - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{u}{1!} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{u^2}{2!} - \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{\partial^{\mu} x}{\partial t^{\mu}} \cdot \frac{u^{\mu}}{\mu!}, \\ \varphi(u+t) &= \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial u} \cdot \frac{t}{1!} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2} \cdot \frac{t^2}{2!} + \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\partial^{\mu} \gamma}{\partial u^{\mu}} \cdot \frac{t^{\mu}}{\mu!}, \\ \varphi(u-t) &= \gamma - \frac{\partial \gamma}{\partial u} \cdot \frac{t}{1!} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2} \cdot \frac{t^2}{2!} - \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{\partial^{\mu} \gamma}{\partial u^{\mu}} \cdot \frac{t^{\mu}}{\mu!}.\end{aligned}$$

Addirt man einerseits die zweite dieser vier Gleichungen zur ersten, subtrahirt andererseits die vierte von der dritten, bemerkt, daß  $\varphi(u+t) = \varphi(t+u)$  und  $\varphi(u-t) = -\varphi(t-u)$  ist, und dividirt jedesmal durch  $2\mathcal{A}(\gamma)$ , so erhält man das doppelte Resultat:

$$(5.) \quad \frac{\varphi(t+u) + \varphi(t-u)}{2\mathcal{A}(\gamma)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} \cdot \frac{u^{2\mu}}{\mathcal{A}(\gamma)(2\mu)!},$$

$$(6.) \quad \frac{\varphi(t+u) - \varphi(t-u)}{2\mathcal{A}(\gamma)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\partial^{2\mu+1} \gamma}{\mathcal{A}(\gamma) \partial u^{2\mu+1}} \cdot \frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}.$$

Da hier links in beiden Gleichungen Dasselbe steht, so kann man die beiden Reihen zur Rechten in (5.) und (6.) einander gleich setzen. Diese Vergleichung liefert, wie wir sogleich sehen werden, für  $n=2$ , d. h. für elliptische Functionen, unmittelbar das Additionstheorem, und für größere Werthe von  $n$  erhält man einen ziemlich merkwürdigen und allgemeinen Satz, welcher zugleich den Grund sehen läßt, weshalb in diesem Falle ein Additionstheorem in derselben Weise, wie für die elliptischen Functionen, nicht existirt. — In der That zeigen wir, daß sich die Reihen zur Rechten in (5.) und (6.) in aufsteigende Doppelreihen nach Potenzen und Producten von  $x$  und  $\gamma$  umformen lassen.

Was zunächst die Reihe in (5.) betrifft, so setze man statt  $\frac{u^{2\mu}}{\mathcal{A}(\gamma)(2\mu)!}$ , nach Anleitung von (4.), die Entwicklung nach steigenden geraden Potenzen von  $\gamma$ , welche mit  $\frac{\gamma^{2\mu}}{(2\mu)!}$  anfängt, und nach (1.) setze man statt der Differentialquotienten  $\frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}}$  die ihnen gleichen ganzen und ungeraden Functionen von  $x$ ,

welche man sich hier nach steigenden Potenzen von  $x$ , also in umgekehrter Art wie in (1.), geordnet vorstellen muß. Irgend eine bestimmte Potenz von  $y$ , z. B. die  $2k$ te, kommt nur in den ersten  $k+1$  ersten Gliedern von (5.), nämlich für die Werthe  $\mu=0$  bis  $\mu=k$  vor, während alle folgenden nur *höhere* Potenzen von  $y$  als die  $2k$ te enthalten, nach (4.); von der andern Seite enthält keine der ungeraden ganzen Functionen, durch welche die Differentialquotienten in diesen  $k+1$  ersten Gliedern ausgedrückt werden, eine Potenz von  $x$ , deren Exponent  $>$  als  $2kn-2k+1$  wäre, nach (1.), und dieses Maximum des Exponenten  $2kn-2k+1$  zeigt sich nur in dem einzigen  $k+1$ ten Gliede der Reihe, und zwar erscheint die Potenz von  $x$ , welche diesem Exponenten entspricht, mit dem Coëfficienten  $n(2n-1)(3n-2)\dots((2k-1)n-2k+2)$ , welchen ich, um abzukürzen, durch  $K$  bezeichne. Hieraus folgt: wenn man die ganze Reihe (5.) nach steigenden Potenzen von  $y$  ordnet (so daß die Coëfficienten Reihen nach  $x$  sind), so enthält der Coëfficient von  $y^{2k}$  nur solche Potenzen von  $x$ , deren Exponenten  $\leq 2kn-2k+1$  sind, und zwar ist die höchste, nämlich die  $2kn-2k+1$ te Potenz von  $x$  in diesem Coëfficienten von  $y^{2k}$ , mit  $\frac{K}{(2k)!}$  multiplicirt; mit andern Worten, bezeichnet man überhaupt das allgemeine Glied der Producte von Potenzen von  $x$  und  $y$  in einer Doppelreihe nach  $x$  und  $y$ , welche in Bezug auf  $x$  ungerade, in Bezug auf  $y$  gerade ist, durch  $x^{2h+1}y^{2k}$ , so daß im Allgemeinen  $h$  und  $k$  unabhängig von einander alle ganzen Werthe von 0 bis  $\infty$  erhalten können, so ist für die Reihe (5.)

$$2h+1 \leq 2kn-2k+1,$$

oder, was dasselbe besagt,

$$(\alpha.) \quad h \leq (n-1)k,$$

d. h. andere Glieder, andere Potenzproducte  $x^{2h+1}y^{2k}$  können nicht vorkommen, als solche, die der Bedingung  $(\alpha.)$  genügen; außerdem ist für  $h=(n-1)k$  der Coëfficient des Potenzproducts  $= \frac{K}{(2k)!}$ , was sich für  $n=2$  auf 1 reducirt.

Die Betrachtung der Reihe (6.) ergibt ein ähnliches Resultat. Hier muß man die Potenzen von  $t$  in  $\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$  nach (3.) in Reihen nach steigenden ungeraden Potenzen von  $x$  umsetzen, welche jedesmal mit  $\frac{x^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$  anfangen; die durch  $\mathcal{A}(y)$  dividirten ungeraden Differentialquotienten  $\frac{\partial^{2\mu+1}y}{\mathcal{A}(y)\partial u^{2\mu+1}}$

mufs man nach Anleitung von (2.) durch

$$n(2n-1)(3n-2)\dots(2\mu n-2\mu+1)y^{2\mu n-2\mu}+N,$$

d. h. durch gerade ganze Functionen von  $y$  vom jedesmaligen Grade  $2\mu n-2\mu$  ausdrücken. Faßt man nun irgend eine bestimmte Potenz von  $x$ , z. B. die  $2h+1$ te ins Auge, so wird man dieselbe nur in den ersten  $h+1$  Gliedern der Reihe (6.), welche  $\mu = 0, 1, 2$ , bis  $h$  entsprechen, finden, denn in den folgenden Gliedern fängt  $\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$  schon gleich mit höheren Potenzen von  $x$  an. Die Potenzen von  $y$ , mit welchen diese bestimmte Potenz von  $x$  multiplicirt ist, übersteigen in jenen  $h+1$  ersten Gliedern nirgends die  $(2hn-2h)$ te, und diese letztere selbst kommt nur in dem einzigen  $h+1$ ten Gliede, und zwar mit  $n(2n-1)(3n-2)\dots(2hn-2h+1)$  multiplicirt vor, so dafs das Potenzproduct  $y^{2hn-2h}x^{2h+1}$  den Quotienten aus der eben geschriebenen Zahl durch  $(2h+1)!$  zum Coëfficienten hat. In der nach  $x$  und  $y$  geordneten Reihe (6.) kommt folglich jede Potenz  $x^{2h+1}$  von  $x$  nur mit solchen Potenzen von  $y$  multiplicirt vor, deren Exponenten  $\leq 2(n-1)h$  sind; d. h. das allgemeine Potenzproduct  $x^{2h+1}y^{2k}$  der entwickelten Reihe (6.) genügt der Bedingung

$$(\beta.) \quad k \leq (n-1)h,$$

und wenn  $k = (n-1)h$ , so läßt sich der Coëfficient des Potenzproductes a priori bestimmen; für elliptische Functionen wird er  $= 1$ .

Da die beiden Doppelreihen (5.) und (6.) für jeden Werth von  $x$  und  $y$  übereinstimmen müssen und nur verschiedene Anordnungen einer und derselben Doppelreihe nach steigenden Potenzen und Potenzproducten von  $x$  und  $y$  bilden, so können auch Glieder, welche der erstern fehlen, in der zweiten nicht vorkommen, und umgekehrt. Die einzige Doppelreihe, in welche die beiden, aus Entwicklung von (5.) und (6.) hervorgehenden, verschmelzen, vereinigt demnach die beiden Bedingungen ( $\alpha.$ ) und ( $\beta.$ ) in sich, und man hat folgendes Theorem, bei welchem noch zu bemerken, dafs man aus der Entwicklung von  $\frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\Delta y}$  sofort die von  $\frac{\varphi(t+u)-\varphi(t-u)}{2\Delta(x)}$  erhält, wenn man  $t$  mit  $u$  und  $x$  mit  $y$  vertauscht, und dafs man aus diesen beiden Entwicklungen  $\varphi(t+u)$  und  $\varphi(t-u)$  selbst erhält, wenn man die erste mit  $\Delta(y)$ , die zweite mit  $\Delta(x)$  multiplicirt und addirt, resp. subtrahirt.

Theorem.

*Es sei  $x = \varphi(t)$  diejenige Function von  $t$ , welche mit  $t$  zugleich verschwindet und der Differentialgleichung  $\frac{\partial x}{\partial t} = \Delta(x)$  genügt, oder, was*

dasselbe ist, für welche

$$t = \int_0^{\frac{\partial x}{\Delta(x)}},$$

wo  $\Delta(x)$  die Quadratwurzel aus einer ganzen und geraden Function  $2n^{\text{ten}}$  Grades von  $x$  bezeichnet, in welcher wir den ersten und letzten Coëfficienten  $= 1$  annehmen. Wenn man  $\varphi(u) = y$  setzt und folgende Entwicklungen für  $\varphi(t+u)$  und  $\varphi(t-u)$  annimmt:

$$\begin{aligned}\varphi(t+u) &= \sum C_{h,k} x^{2h+1} y^{2k} \Delta(y) + \sum C_{h,k} y^{2h+1} x^{2k} \Delta(x), \\ \varphi(t-u) &= \sum C_{h,k} x^{2h+1} y^{2k} \Delta(y) - \sum C_{h,k} y^{2h+1} x^{2k} \Delta(x),\end{aligned}$$

so kommen in den Reihen, welche sich auf die ganzen positiven und Nullwerthe von  $h$  und  $k$  beziehen, nur diejenigen Werthe von  $h$  und  $k$  vor, welche gleichzeitig den beiden Bedingungen

$$h \leq (n-1)k, \quad k \leq (n-1)h$$

genügen; für alle andern Werthe von  $h$  und  $k$  wird  $C_{h,k} = 0$ . Ausserdem nimmt der Coëfficient  $C_{h,k}$  für  $h = (n-1)k$  den Werth

$$\frac{n \cdot (2n-1)(3n-2) \dots ((2k-1)n-2k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k}$$

und für  $k = (n-1)h$  den Werth

$$\frac{n \cdot (2n-1)(3n-2) \dots (2hn-2h+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2h+1)}$$

an.

Für den speciellen Fall der elliptischen Functionen, in welchem  $n = 2$  ist, werden die Bedingungen des Theorems

$$h \leq k \quad \text{und} \quad k \leq h;$$

sie reduciren sich also auf  $k = h$  und der Coëfficient  $C_{h,h}$  wird  $= 1$ ; die Reihen verwandeln sich daher in diesem Fall in einfache geometrische Reihen, welche sich summiren lassen und dann das Additionstheorem geben, nemlich:

$$\begin{aligned}\varphi(t+u) &= \sum x^{2h+1} y^{2h} \Delta(y) + \sum y^{2h+1} x^{2h} \Delta(x) = \frac{x \Delta(y) + y \Delta(x)}{1 - x^2 y^2}, \\ \varphi(t-u) &= \sum x^{2h+1} y^{2h} \Delta(y) - \sum y^{2h+1} x^{2h} \Delta(x) = \frac{x \Delta y - y \Delta x}{1 - x^2 y^2}.\end{aligned}$$

Um den Beweis unseres Theorems in ein noch helleres Licht zu setzen, will ich durch besondere Buchstaben die Entwicklungs-Coëfficienten der Differentialquotienten und der Potenzen der Integrale  $t$  und  $u$  bezeichnen. Es sei

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} &= \alpha_0^{(\mu)} x + \alpha_1^{(\mu)} x^3 + \alpha_2^{(\mu)} x^5 + \text{etc.}, \\ \frac{\partial^{2\mu+1} y}{\partial (y) \partial u^{2\mu+1}} &= \beta_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)} y^2 + \beta_2^{(\mu)} y^4 + \text{etc.}, \\ \frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} &= \gamma_0^{(\mu)} x + \gamma_1^{(\mu)} x^3 + \gamma_2^{(\mu)} x^5 + \text{etc.}, \\ \frac{u^{2\mu}}{\partial (y)(2\mu)!} &= \delta_0^{(\mu)} + \delta_1^{(\mu)} y^2 + \delta_2^{(\mu)} y^4 + \text{etc.};\end{aligned}$$

dann verschwinden, worin der Nerv des Beweises besteht,  $\alpha_\sigma^{(\mu)}$  und  $\beta_\sigma^{(\mu)}$ , sobald  $\sigma > (n-1)\mu$  wird, d. h., wenn  $(n-1)\mu < \sigma$  ist; und  $\gamma_\sigma^{(\mu)}$ ,  $\delta_\sigma^{(\mu)}$  verschwinden, wenn  $\sigma < \mu$  ist, d. h. sobald  $\mu > \sigma$  wird. Die Seiten rechts von (5.) und (6.) werden nun durch Substitution dieser Reihen:

$$\begin{aligned}(5.) \quad & \frac{\varphi(t+u) + \varphi(t-u)}{2\partial(y)} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \{ [\alpha_0^{(\mu)} x + \alpha_1^{(\mu)} x^3 + \text{etc.}] [\delta_0^{(\mu)} + \delta_1^{(\mu)} y^2 + \delta_2^{(\mu)} y^4 + \text{etc.}] \}, \\ (6.) \quad & \frac{\varphi(t+u) + \varphi(t-u)}{2\partial(y)} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \{ [\beta_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)} y^2 + \beta_2^{(\mu)} y^4 + \text{etc.}] [\gamma_0^{(\mu)} x + \gamma_1^{(\mu)} x^3 + \gamma_2^{(\mu)} x^5 + \text{etc.}] \}.\end{aligned}$$

Der Coëfficient von  $x^{2h+1}y^{2k}$  in (5.) wird folglich

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \alpha_h^{(\mu)} \delta_k^{(\mu)} = C_{h,k},$$

und der Coëfficient desselben Potenzproductes in (6.) wird

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \beta_k^{(\mu)} \gamma_h^{(\mu)} = C_{h,k}.$$

Da nun für alle Werthe von  $\mu$ , welche  $k$  übertreffen,  $\delta_k^{(\mu)}$ , und für alle Werthe von  $\mu$ , welche  $h$  übersteigen,  $\gamma_h^{(\mu)}$  verschwindet, so braucht man die beiden Summen für  $C_{h,k}$  statt von  $\mu=0$  bis  $\mu=\infty$ , nur von  $\mu=0$  bis  $\mu=k$  für die erste, und nur von  $\mu=0$  bis  $\mu=h$  für die zweite auszudehnen. Also

$$C_{h,k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} \alpha_h^{(\mu)} \delta_k^{(\mu)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \beta_k^{(\mu)} \gamma_h^{(\mu)}.$$

Da nun andererseits  $\alpha_h^{(\mu)}$  für alle Werthe von  $\mu$ , welche  $(n-1)\mu < h$  machen, und  $\beta_k^{(\mu)}$  für alle Werthe von  $\mu$ , die  $(n-1)\mu < k$  machen, verschwindet, so verschwindet die ganze erste Summe, wenn  $(n-1)k < h$  ist, und die ganze zweite Summe, wenn  $(n-1)h < k$ ; wenn  $(n-1)k = h$  ist, so reducirt sich die erste Summe auf das einzige Glied

$$\alpha_{(n-1)k}^{(k)} \delta_k^{(k)} = \frac{n(2n-1)(3n-2) \dots ((2k-1)n - 2k + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k},$$



welches  $\mu = k$  entspricht; und wenn  $(n-1)h = k$  ist, so reducirt sich die zweite Summe auf ihr letztes Glied

$$\beta_{(n-1)h}^{(h)} \gamma_h^{(h)} = \frac{n(2n-1)(3n-2) \dots (2hn-2h+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2h+1)}.$$

Im Allgemeinen wird man in der ersten Summe für  $C_{h,k}$  alle diejenigen Anfangswerthe von  $\mu$  vernachlässigen, welche  $(n-1)\mu < h$  machen, und die Summe, statt mit  $\mu = 0$ , erst mit demjenigen kleinsten Werthe von  $\mu$  anfangen lassen, welcher zuerst  $(n-1)\mu \geq h$  macht. Liegt dieses Minimum von  $\mu$  schon über  $k$  hinaus, so hat die Summe natürlich gar keine Glieder, und verschwindet: liegt dasselbe aber zwischen 0 und  $k$ , oder fällt mit  $k$  zusammen, so enthält die Summe wirklich so viele Glieder, als es ganze Zahlen von diesem Minimum an incl. bis zu  $k$  incl. giebt; nämlich für  $\mu$  sind alle ganzen Werthe zu setzen, welche

$$\frac{h}{n-1} \leq \mu \leq k$$

machen, deren Anzahl übrigens  $1 + E\left(k - \frac{h}{n-1}\right)$  beträgt; was für elliptische Functionen in 1 übergeht. In derselben Weise kann man die zweite Summe, statt von  $\mu = 0$ , erst von demjenigen kleinsten Werthe von  $\mu$  anfangen lassen, welcher zum ersten Male  $(n-1)\mu \geq k$  macht, und die Summe hat gar keine Glieder, wenn dieses Minimum von  $\mu$  schon über  $h$  hinausliegt, da die Summe sich nur bis  $h$  erstreckt; liegt dagegen dieses Minimum unter  $h$  oder fällt mit  $h$  zusammen, welches geschieht, wenn  $(n-1)h \geq k$  ist, so sind für  $\mu$  alle diejenigen Werthe zu nehmen, welche

$$\frac{k}{n-1} \leq \mu \leq h$$

machen, deren Anzahl  $1 + E\left(h - \frac{k}{n-1}\right)$  beträgt; für elliptische Functionen 1.

Nur bei einigen Folgerungen, die man aus diesen Betrachtungen ziehen kann, verweile ich einen Augenblick, die übrigen dem Leser überlassend. Ich multiplicire die Gleichung

$$C_{h,k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} \alpha_k^{(\mu)} \delta_k^{(\mu)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \beta_k^{(\mu)} \gamma_h^{(\mu)}$$

mit  $x^{2h+1}$ , summire nach  $h$  von  $h=0$  bis  $h=\infty$ , und erhalte

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=k} \delta_k^{(\mu)} \cdot \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = \sum_{h=0}^{k=\infty} \left( \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \beta_k^{(\mu)} \gamma_h^{(\mu)} \right) x^{2k+1} = \sum_{h=E\left(\frac{k}{n-1}\right)}^{h=(n-1)k} C_{h,k} x^{2h+1},$$

was sich für elliptische Functionen auf  $x^{2k+1}$  reducirt. Ich multiplicire dieselbe Gleichung mit  $\gamma^{2k}$ , summire nach  $k$  von  $k=0$  bis  $k=\infty$  und erhalte

$$\sum_{k=E\left(\frac{h}{n-1}\right)}^{k=(n-1)h} C_{h,k} y^{2k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \gamma_h^{(\mu)} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1} y}{\partial(y) \partial u^{2\mu+1}}, \text{ folglich auch}$$

$$\mathcal{A}(x) \sum_{k=E\left(\frac{h}{n-1}\right)}^{k=(n-1)h} C_{h,k} x^{2k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \gamma_h^{(\mu)} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1} x}{\partial t^{2\mu+1}},$$

was sich für elliptische Functionen links auf  $x^{2h}$  reducirt. Man vergleiche auch *Jacobi* „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum“ Seite 126.

Ich nehme noch folgende Entwicklungen an, um sie in die Formel des Theorems zu substituiren:

$$x^{2\mu+1} = \eta_0^{(\mu)} t + \eta_1^{(\mu)} t^3 + \eta_2^{(\mu)} t^5 + \text{etc.},$$

$$x^{2\mu} \mathcal{A}(x) = \mathcal{G}_0^{(\mu)} + \mathcal{G}_1^{(\mu)} t^2 + \mathcal{G}_2^{(\mu)} t^4 + \text{etc.};$$

und die ähnlichen zwischen  $y$  und  $u$ . Setzt man diese Reihen, in welchen  $\eta_\sigma^{(\mu)}$  und  $\mathcal{G}_\sigma^{(\mu)}$  gleich Null sind, sobald  $\mu > \sigma$  ist, in die Formel

$$\varphi(t+u) = \sum C_{h,k} x^{2h+1} y^{2k} \mathcal{A}(y) + \sum C_{h,k} y^{2h+1} x^{2k} \mathcal{A}(x),$$

so erhält man

$$\varphi(t+u) = \sum C_{h,k} x^{2h+1} (\mathcal{G}_0^{(k)} + \mathcal{G}_1^{(k)} u^2 + \text{etc.}) + \sum C_{h,k} x^{2k} \mathcal{A}(x) (\eta_0^{(h)} u + \eta_1^{(h)} u^3 + \text{etc.}),$$

$$\varphi(t+u) = \sum C_{h,k} y^{2k} \mathcal{A}(y) (\eta_0^{(h)} t + \eta_1^{(h)} t^3 + \text{etc.}) + \sum C_{h,k} y^{2h+1} (\mathcal{G}_0^{(k)} + \mathcal{G}_1^{(k)} t^2 + \text{etc.});$$

ordnet man hier die erste Reihe nach Potenzen von  $u$ , die zweite nach Potenzen von  $t$  und vergleicht mit den Entwicklungen von  $\varphi(t+u)$ , welche der *Taylor*-sche Satz darbietet, so folgt

$$\frac{1}{(2\mu)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = \sum_{h,k} \mathcal{G}_\mu^{(k)} C_{h,k} x^{2h+1}, \quad \frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1} x}{\partial t^{2\mu+1}} = \sum_{h,k} \eta_\mu^{(h)} C_{h,k} x^{2k} \mathcal{A}(x),$$

$$\frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1} y}{\partial u^{2\mu+1}} = \sum \eta_\mu^{(h)} C_{h,k} y^{2k} \mathcal{A}(y), \quad \frac{1}{(2\mu)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu} y}{\partial u^{2\mu}} = \sum \mathcal{G}_\mu^{(k)} C_{h,k} y^{2h+1}.$$

In diesen Reihen verschwinden  $\eta_\mu^{(h)}$  und  $\mathcal{G}_\mu^{(k)}$ , sobald  $h > \mu$  resp.  $k > \mu$  ist, und da  $C_{h,k}$  verschwindet, sobald  $k > (n-1)h$  und sobald  $h > (n-1)k$  ist, so erhält man auf diese Weise wiederum rückwärts die Entwicklung des  $2\mu$ ten Differentialquotienten von  $x$  nach  $t$  oder von  $y$  nach  $u$  durch eine ganze Function vom Grade  $2\mu(n-1)+1$ , und die des  $2\mu+1$ ten Differentialquotienten durch das Product einer ganzen Function vom Grade  $2\mu(n-1)$  in  $\mathcal{A}(x)$ . Es läßt sich hieraus mit Leichtigkeit beweisen, daß die Eigenschaft, welche das obige allgemeine Theorem ausspricht, eine *ausschließliche* Eigenschaft der *Abelschen* Integrale bildet, so daß jede Function, welche dem Theorem Genüge leistet, nothwendig die Umkehrung eines *Abelschen* Integrals ist.

Berlin, im Februar 1847.

## V. Über die Differentialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen.

Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche *Jacobi* zur Bestimmung des Zählers und Nenners der Transformationsformeln für die elliptischen Functionen aufgestellt hat, haben mich von jeher mit dem größten Interesse erfüllt. Schon in einer frühern Arbeit versuchte ich zu denselben auf einem Wege zu gelangen, welcher von demjenigen verschieden ist, welchen *Jacobi* eingeschlagen hat \*). Wenn ich nun wiederum auf denselben Gegenstand zurückkomme, so geschieht dies, weil ich jetzt die einfachsten und wahren Principien für die Ableitung jener Differentialgleichungen gefunden zu haben glaube: Principien, welche auch bei andern Untersuchungen von Nutzen sein können, und die ich deshalb hier mittheilen will.

Wenn irgend einer Differentialgleichung zwischen zwei Variablen  $x$  und  $y$  ein algebraisches Integral genügt, so kann man dasselbe immer auf die Form  $U=0$  bringen, wo  $U$  eine ganze Function von  $x$  und  $y$  ist. Es wird angenommen, die Differentialgleichung sei selbst algebraisch, d. h. die Coefficienten der Differentiale oder der Differentialquotienten seien algebraische Verbindungen aus  $x$  und  $y$ ; man wird übrigens die Differentialgleichung immer auf eine solche Form bringen können, in welcher die Differentiale oder Differentialquotienten nur rational vorkommen und die Coefficienten in Bezug auf den einen Variablen, z. B.  $x$ , rational sind. Eliminirt man mit Hülfe der aus  $U=0$  abgeleiteten Gleichungen  $\partial U=0$ ,  $\partial^2 U=0$  u. s. w. aus der vorgelegten Differentialgleichung alle Differentiale von  $x$  und  $y$ , so wird man zu einem Resultate der Elimination  $R=0$  gelangen, in welchem  $R$  eine ganze Function von  $x$  ist, deren Coefficienten von  $y$  abhängen. Da nun die Gleichung  $R=0$  jedesmal erfüllt ist, sobald man in  $R$  statt  $x$  eine Wurzel der Gleichung  $U=0$  setzt, so hat die  $R=0$  alle Wurzeln der Gleichung  $U=0$ ; diese Wurzeln sind sämtlich Functionen von  $y$  allein, und da die Gleichung  $U=0$ , in Bezug auf  $x$  aufgelöst, keine gleichen Wurzeln haben kann, so lange  $y$  allgemein bleibt, so muß  $R$  durch  $U$  algebraisch theilbar sein;

---

\*) *Jacobi's* Beweis stützt sich auf die Theorie der Transformation der elliptischen Integrale zweiter Gattung.

setzt man also den Quotienten der Division  $= R_1$ , so hat man das Resultat

$$R = UR_1,$$

wo  $R_1$  eine neue ganze Function von  $x$  ist, deren Grad um den Grad von  $U$  niedriger ist, als der von  $R$ ; übrigens ist  $R_1$  auch in Bezug auf  $y$  ganz, sobald  $R$  diese Eigenschaft besitzt und die höchste Potenz von  $x$  in  $U$  den Coëfficienten 1 hat. Da man aus der vorgelegten Differentialgleichung durch wiederholte Differentiationen neue bilden kann, denen ebenfalls das algebraische Integral  $U=0$  genügt, so wird man unendlich viele solche Resultate der Elimination  $R=0$  erhalten können, denen jedesmal genügt wird, sobald  $U=0$  ist, und man wird unter ihnen dasjenige herausuchen, oder durch Combination mehrerer ein solches Resultat  $R=0$  zu erhalten suchen, in welchem der Grad von  $R$  und demnach auch der von  $R_1$  möglichst niedrig ist. Um nun  $R_1$  zu finden, differentiire man die Gleichung  $R=UR_1$ , in welcher  $x$  und  $y$  als unabhängige Variabeln angesehen werden können, nach  $x$  allein; dies giebt

$$R' = UR'_1 + U'R_1,$$

und für alle Werthe von  $x$ , welche  $U=0$  machen, hat man also  $R' = U'R_1$  und  $R_1 = \frac{R'}{U'}$ . Gelingt es nun mit Hülfe der vorgelegten Differentialgleichung diesen speciellen Werth von  $R_1$ , welcher in Form eines Quotienten erscheint, unter der Voraussetzung  $U=0$  durch eine ganze Function von  $x$  auszudrücken, welche ich mit  $S_1$  bezeichnen will, so sind die beiden ganzen Functionen  $R_1$  und  $S_1$  einander gleich für alle Werthe von  $x$ , die  $U=0$  machen, und es ist, für dieselben Werthe von  $x$ ,  $R_1 - S_1 = 0$ , und demnach ist  $R_1 - S_1$  für alle Werthe von  $x$  algebraisch durch  $U$  theilbar; man hat daher eine Gleichung von der Form

$$R_1 = UR_2 + S_1,$$

wo  $R_2$  wiederum ganz in Bezug auf  $x$  und von niederem Grade als  $R_1$  ist. Führt man auf diese Weise fort die Bestimmung von  $R_2$  auf die einer Function von niederem Grade, u. s. w., zurückzuführen, so gelangt man zuletzt entweder auf eine Constante in Bezug auf  $x$ , oder auf eine Function, welche sich durch andere Methoden bestimmen läßt. Wenn das Verfahren gelingt, so sieht man leicht, daß man zu einem Ausdrücke für  $R$  geführt wird, welcher gewissermaßen nach Potenzen von  $U$  geordnet ist, und da  $R$  nur aus den partiellen Differentialquotienten von  $U$  nach  $x$  und  $y$  zusammengesetzt ist, so erhält man eine partielle Differentialgleichung zur Bestimmung von  $U$ . Führt man in dieser partiellen Differentialgleichung die Differentiationen nach  $y$

wirklich aus, so erhält man eine totale Differentialgleichung in Bezug auf  $x$ , welche, da sie ganz unabhängig von dem Werthe von  $y$  gilt, in Bezug auf  $y$  gehörig zerfällt werden kann und dann eine Reihe von totalen Differentialgleichungen liefert, welche zur Bestimmung der Coëfficienten in  $U$ , als reiner Functionen von  $x$  dienen.

Um von diesen allgemeinen Betrachtungen, welche sich auch auf mehr als zwei Variabeln ausdehnen lassen, zu unserem Gegenstande zurückzukommen, sei, wenn es möglich ist,  $U=0$  ein algebraisches Integral einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{\psi(y)}},$$

wo  $\varphi(x)$  eine ganze Function von  $x$  vom Grade  $\mu$  und  $\psi(y)$  eine beliebige Function von  $y$  sein mag. Der Grad von  $U$ , in Bezug auf  $x$ , welchen ich nach *Abel's* Vorgange durch  $\delta U$  bezeichnen will, sei  $=n$ . Um die Rechnung abzukürzen, sei statt  $x$  eine neue Variable  $t$  durch die Relation  $\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \partial t$  eingeführt, so dafs unsere Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{\psi(y)}, \quad \partial y^2 = \psi(y) \partial t^2$$

wird. Die Differentiation der Gleichung  $U=0$  giebt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

und wenn man die in  $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$  enthaltene irrationale Function  $\sqrt{\varphi(x)}$  eliminirt, so erhält man

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y) \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist wirklich eine ganze Function von  $x$  vom Grade  $2n + \mu - 2$ , denn es ist  $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \varphi(x) \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ , wo  $\varphi(x)$  vom Grade  $\mu$ ,  $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$  vom Grade  $n-1$ ,  $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$  vom Grade  $2n-2$ , also  $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2$  vom Grade  $2n + \mu - 2$ , während  $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$  von demselben Grade wie  $U$ , also  $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$  vom Grade  $2n$  ist; sobald demnach  $\mu \geq 2$  ist, so ist der ganze obige Ausdruck vom Grade  $2n + \mu - 2$ . Da nun jene ganze Function

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y) \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$$

für jeden der Gleichung  $U = 0$  genügenden Werth von  $x$  verschwindet, so ist sie durch  $U$  algebraisch theilbar. Es sei

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = UV;$$

dann ist  $V$  vom Grade  $n + \mu - 2$ , nämlich  $\delta V = 2n + \mu - 2 - \delta U = n + \mu - 2$ . Um  $V$  zu finden, oder wenigstens den speciellen Werth, den  $V$  annimmt, wenn für  $x$  eine Wurzel der Gleichung  $U = 0$  gesetzt wird, differentiire man nach  $t$  allein, indem man  $y$  als constant ansieht und setze nachher  $U = 0$ ; man erhält

$$2\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - 2\psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}\right) = V\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right).$$

Um den Ausdruck zur Linken durch  $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$  dividiren zu können, muß man für  $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$  seinen Werth aus der Gleichung  $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ , oder  $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\sqrt{\psi(y)}$  setzen; man erhält so, wenn man sogleich mit  $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$  dividirt:

$$2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + 2\sqrt{\psi(y)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}\right) = V.$$

Dieser Ausdruck für den *speciellen* Werth von  $V$ , obgleich sehr einfach, kann doch nicht zum weitem Fortschritt und zur Auffindung des *allgemeinen* Werthes von  $V$  benutzt werden, denn er ist keine ganze Function von  $x$ \*); zwar ist  $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)$  eine solche, aber nicht  $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}\right)$ , was noch die Irrationalität  $\sqrt{\psi(y)}$  enthält; man muß also  $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}\right)$  durch einen andern Ausdruck ersetzen.

Differentiirt man nun die Gleichung  $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} = 0$  noch einmal nach allem  $t$ , so erhält man

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0;$$

dies von dem Ausdrucke für  $V$ ,

$$V = 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} \text{ subtrahirt, giebt}$$

$$V = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

---

\*) Allgemein ist hier ein Werth, wenn in ihm die Variablen  $x$  und  $y$  gänzlich von einander unabhängig angenommen werden können; speciell, wenn er nur in sofern gültig ist, als die Variablen  $x$  und  $y$  mit einander durch die Gleichung  $U = 0$  verknüpft werden.

Dieser Ausdruck für  $V$  ist sicher eine ganze Function von  $x$ , denn

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\varphi(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\varphi'(x)$$

ist ganz und vom Grade  $n + \mu - 2$ ;  $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$  und  $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$  sind, ebenso wie  $U$ , ganz und vom Grade  $n$ , weil die partielle Differentiation nach  $y$  in dieser Hinsicht gar nichts ändern kann; endlich  $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \psi(y)$  und  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\psi'(y)$  enthalten  $x$  gar nicht; es ist also wirklich der zuletzt aufgestellte Ausdruck für  $V$  ganz in  $x$ , und wir sehen, daß er vom Grade  $n + \mu - 2$ , also sein Grad  $= \delta V$  ist. Die Differenz zwischen dem allgemeinen  $V$  und jenem Ausdruck ist folglich, nach den im Anfange auseinandergesetzten allgemeinen Principien, durch  $U$  theilbar und man hat für jeden Werth von  $x$  und  $y$ :

$$V = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + UW,$$

wo  $W$  eine ganze Function von  $x$  ist. Der Grad von  $W$  ist leicht zu bestimmen, denn es ist  $\delta(UW) = \delta V = n + \mu - 2$ ,  $\delta U = n$ , folglich  $\delta W = \mu - 2$ ; der Grad von  $W$  ist also, was sehr wesentlich zu bemerken, gänzlich unabhängig von dem Grade von  $U$  und hängt nur von dem der Function  $\varphi(x)$  ab.

Setzt man nun den jetzt gefundenen allgemeinen Werth von  $V$  in die Gleichung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = UV,$$

ersetzt  $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$  und  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  durch ihre Werthe  $\psi(y)$  und  $\frac{1}{2}\psi'(y)$ , und überträgt die Differentiationen nach  $t$ , wenn man will, auf solche nach  $x$ , so erhält man ein sehr allgemeines Theorem, nämlich eine partielle Differentialgleichung für  $U$ , welche man zerfallen kann, sobald die Zusammensetzung von  $U$  in Bezug auf  $y$  festgesetzt wird.

Es sei  $U$  von der Form  $P + Qy$ , wo  $P$  und  $Q$  von  $y$  unabhängig sind,  $\delta P = n$ ,  $\delta Q = n - 1$  und in  $P$  der Coefficient des höchsten Gliedes  $= 1$  ist; dann ist also, wenn man  $U$  nach  $x$  ordnet, der Coefficient des höchsten Gliedes  $= 1$ , und die übrigen Coefficienten sind von der Form  $a + by$ , wo  $a$  und  $b$  constant sind. Ferner seien  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  ganze Functionen vom vierten Grade. Unter diesen Voraussetzungen, welche bei der Transformation der elliptischen Integrale Statt finden, hat man  $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = Q$ ,  $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0$ ,  $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)y$ ,  $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)y$ ,  $\delta W = 2$ . Nach Ein-

setzung dieser Werthe geht die partielle Differentialgleichung in

$$(1.) \left\{ \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) y \right\}^2 - \psi(y) Q^2 = U \left\{ \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right) y - \frac{1}{2} Q \psi'(y) + UW \right\}$$

über. Man überzeugt sich leicht nach der für  $U$  festgesetzten Form, daß  $V$  sowohl als  $W$  auch in Bezug auf  $y$  ganz sein werden. Was die Grade dieser ganzen Functionen in Bezug auf  $y$  betrifft, so wird der Grad des Ausdrucks

$$\left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 - \psi(y) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2,$$

welcher  $= UV$  ist, offenbar gleich dem von  $\psi(y)$ , also  $= 4$ , mithin der von  $V$  gleich 3; von demselben Grade 3 ist offenbar auch der für  $V - UW$  gewonnene Ausdruck

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{2} Q \psi'(y);$$

denn dessen Grad in Bezug auf  $y$  ist gleich dem von  $\psi'(y)$ , weil  $\left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)$  nur vom ersten, dagegen  $\psi'(y)$  vom dritten Grade ist; folglich ist auch  $UW$  vom dritten (höchstens) und  $W$  also vom zweiten Grade in  $y$ .  $W$  ist also sowohl in  $x$  als in  $y$  vom zweiten Grade, und man kann setzen:

$$W = p + qy + ry^2,$$

wo  $p, q, r$  vom zweiten Grade in  $x$  und von  $y$  unabhängig sind. Es bleibt also nun weiter nichts zu thun, als diesen Werth von  $W$  in die Gleichung (1.) zu setzen, Alles auf beiden Seiten nach Potenzen von  $y$  zu ordnen und die Coëfficienten derselben Potenzen einander gleich zu setzen. Man erhält durch diese Zerfällung, da beide Seiten der Gleichung (1.) in Bezug auf  $y$  vom fünften Grade sind, sechs Gleichungen, von denen aber nur drei totale Differentialgleichungen für  $P$  und  $Q$  sind, während die übrigen drei zur Bestimmung der drei Functionen von  $x$ , zweiten Grades,  $p, q$  und  $r$  benutzt werden können. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes, welche keine Schwierigkeiten hat, überlasse ich dem Leser, da es mir nur darauf ankam, die Principien und die Methode so klar als möglich auseinanderzusetzen.



#### IV. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind.

##### 1.

So wie bei den Kreisfunctionen unendliche Producte vorkommen, deren Factoren dadurch definirt werden, dafs sie der Reihe nach für alle Werthe der Variabeln verschwinden, welche Glieder einer nach beiden Seiten fortgesetzten arithmetischen Folge sind, d. h. für alle Werthe von der Form  $\alpha m + \beta$ , wenn  $m$  alle ganzen (positiven, negativen und Null) Zahlen von  $-\infty$  bis  $\infty$  und  $\alpha, \beta$  Constanten vorstellen: so setzen sich die elliptischen Functionen aus unendlichen Doppelproducten zusammen, bei welchen die Wurzelwerthe der einzelnen Factoren durch die Glieder einer arithmetischen Reihe mit doppeltem Eingang bestimmt werden, d. h. durch die Glieder einer Doppelreihe, deren allgemeines Glied die Form  $\alpha m + \beta n + \gamma$  hat, wo  $m$  und  $n$  gleichzeitig und unabhängig von einander alle ganzen Werthe von  $-\infty$  bis  $\infty$  durchlaufen. Die bei den Kreisfunctionen vorkommenden unendlichen Producte sind also von der Form

$$\Pi \left\{ 1 - \frac{x}{\alpha m + \beta} \right\},$$

und die bei den elliptischen Functionen vorkommenden unendlichen Doppelproducte sind von der Form

$$\Pi \left\{ 1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma} \right\}.$$

Ehe ich zu der genauen Untersuchung dieser letztern unendlichen Doppelproducte übergehe, will ich zunächst einen Augenblick bei der Betrachtung des Ausdrucks  $\alpha m + \beta n + \gamma$  selbst verweilen, in welchem die drei Constanten  $\alpha, \beta, \gamma$  im Allgemeinen irgend welche complexe Werthe haben können. Es sei

$$\alpha m + \beta n + \gamma = u.$$

Diesen Ausdruck  $u$  kann man als eine Form ansehen, durch welche gewisse Werthe dargestellt werden können. Die Natur des Ausdrucks hängt in dieser Hinsicht offenbar hauptsächlich von dem Verhältnifs der beiden Coëfficienten  $\alpha$  und  $\beta$  ab, und  $\gamma$  spielt nur eine Nebenrolle. Wenn  $\alpha$  zu  $\beta$  in reellem und rationalem Verhältnifs steht, d. h., wenn der Quotient  $\frac{\beta}{\alpha}$  einer

reellen und rationalen Zahl gleich ist, so stellt der Ausdruck  $u$  jeden Werth, welchen er darstellt, unendlich oft dar, d. h. es giebt dann jedesmal unendlich viele zusammengehörige Paare von ganzen Werthen  $m, n$ , für welche  $u$  einen und denselben Werth annimmt; denn es sei in der That, wenn dieser Fall Statt findet,  $\frac{\beta}{\alpha}$  in den kleinsten Zahlen rational ausgedrückt  $= \frac{\nu}{\mu}$ , wo  $\mu$  und  $\nu$  ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, und man setze  $\alpha = \mu\delta$ ,  $\beta = \nu\delta$ , so wird

$$u = \delta(\mu m + \nu n) + \gamma,$$

und da hier der Ausdruck  $\mu m + \nu n$  jede ganze Zahl und jede unendlich oft darstellt, so sind die Werthe des Ausdrucks  $u$  nichts anders, als die Werthe von  $\delta m + \gamma$ , wenn man jeden derselben unendlich oft geschrieben denkt; mit andern Worten:  $u$  stellt nur die Glieder einer *einfachen* arithmetischen Reihe dar, aber jedes derselben unendlich oft; in diesem Falle würde also das unendliche Doppelproduct nichts anders sein, als ein unendliches einfaches Product, in welchem man jeden Factor unendlich oft geschrieben hätte, der Werth des Products wäre also stets unendlich groß, und deshalb ist dieser Fall unbedingt auszuschließen; aus denselben Gründen ist natürlich der Fall auszuschließen, wenn einer der beiden Coëfficienten  $\alpha, \beta$  (oder gar beide) Null wären. Wenn zweitens  $\alpha$  zu  $\beta$  in reellem, aber irrationalen Verhältnisse steht, so sei  $\beta = \omega\alpha$  und  $\omega$  reell, aber irrational; der Ausdruck  $u$  wird dann zu

$$u = \alpha(m + n\omega) + \gamma.$$

Hier kann, da  $\omega$  irrational ist, nach einem bekannten Satze,  $m + n\omega$  jeder beliebigen reellen Gröfse so nahe kommen, als man will, und zwar geschieht dies für unendlich viele Paare  $m, n$ ; es kann also auch  $u$  jedem Werthe von der Form  $\alpha k + \gamma$ , wo  $k$  beliebig reell ist, für unendlich viele ganze Werthe  $m, n$  beliebig nahe rücken. Diese Folgerung ist aber in Bezug auf das unendliche Doppelproduct ebenso wenig annehmbar, als die des ersten Falles, und deshalb der zweite Fall gleich dem ersten zu verwerfen; man müfste denn festsetzen, dafs für  $m$  und  $n$  nicht *alle* ganzen Werthe genommen werden sollen, sondern nur solche, welche noch einer gewissen Bedingung genügen, etwa der, dafs ein dem  $u$  ähnlicher Ausdruck  $\alpha'm + \beta'm + \gamma'$  oder vielmehr dessen analytischer Modul stets zwischen ganz bestimmten Grenzen eingeschlossen bleiben solle. Es bleibt noch der dritte Fall, wenn  $\alpha$  zu  $\beta$  in imaginärem Verhältnifs steht, wenn also der reelle Theil des Quotienten der beiden complexen Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  von Null verschieden ist. Dieser Fall hat nicht die Schwie-

rigkeiten der andern beiden Fälle; denn während dort die Anzahl der ganzen Werthe von  $m$  und  $n$ , für welche der analytische Modul von  $u$  zwischen bestimmten Grenzen liegt, stets unendlich groß ist, sobald sie von 0 verschieden ist, d. h. sobald nur überhaupt irgend ein Werth des Moduls von  $u$  zwischen jene Grenzen fällt: so ist hier dagegen diese Anzahl stets endlich und begrenzt. Es möge der analytische Modul einer complexen Zahl durch den Buchstaben  $M$  bezeichnet werden, so daß  $M(p+qi) = \sqrt{p^2+q^2}$ , wenn  $p$  und  $q$  reell sind; es sei ferner  $\alpha = a+a'i$ ,  $\beta = b+b'i$ ,  $\gamma = c+c'i$ . Setzt man  $am+bn+c = v$ , welches der reelle Theil von  $u$  ist, und  $a'm+b'n+c' = v'$ , welches der Coefficient von  $i$  in  $u$  ist, so erhält man  $M(u) = \sqrt{v^2+v'^2}$ ; soll nun  $M(u)$  zwischen gewissen Grenzen liegen, so müssen um so mehr  $v$  und  $v'$ , abgesehen vom Zeichen, zwischen denselben Grenzen liegen, also liegen auch  $v-c$  und  $v'-c'$  dann zwischen ganz bestimmten Grenzen, und da die Determinante  $ab'-ba'$  des linearen Systems von Gleichungen

$$\begin{aligned} am+bn &= v-c, \\ a'm+b'n &= v'-c', \end{aligned}$$

durch welches man  $m$  und  $n$  in  $v-c$  und  $v'-c'$  ausdrücken kann, in unserem Falle von 0 verschieden ist, so sind auch  $m$  und  $n$  zwischen bestimmte Grenzen eingeschlossen, und da zwischen diesen nur eine endliche Anzahl von ganzen Werthen liegen, so existirt um so mehr nur eine endliche Anzahl von ganzen Werthenpaaren  $m, n$ , für welche  $M(u)$  zwischen den gegebenen Grenzen liegt. Namentlich giebt es also nur eine endliche Anzahl von Combinationen  $m, n$ , welche den analytischen Modul von  $u$  kleiner machen, als irgend ein gegebener positiver Werth. Wir setzen demnach hier stets das Verhältniß der beiden Coefficienten  $\alpha$  und  $\beta$  als imaginär voraus. Diese Betrachtungen sind nicht neu, aber es schien mir nicht unpassend, sie hier besonders hervorzuheben.

Die Eigenschaften eines Products lassen sich am besten untersuchen, wenn man die Logarithmen der einzelnen Factoren betrachtet. Die Variable  $x$  in unserem Producte  $\Pi\left(1-\frac{x}{u}\right)$  wird als beliebig complex vorausgesetzt. Der Logarithmus von  $1-\frac{x}{u}$  läßt sich in eine convergente Reihe nach Potenzen von  $x$  entwickeln, sobald  $M(u) > M(x)$  ist; es ist daher zweckmäßig, von dem Producte vor der Hand diejenigen Factoren auszuschließen, in welchen  $M(u) \leq M(x)$  ist; die Anzahl dieser auszuschließenden Factoren ist nach

dem Vorhergehenden endlich, und es werde das Product der übrigen durch

$$\Pi' \left(1 - \frac{x}{u}\right)$$

bezeichnet, in welchen also  $m$  und  $n$  nur diejenigen ganzen Werthe durchlaufen, welche der Bedingung  $M(u) > M(x)$  genügen. Unter dieser Voraussetzung ist

$$\log \left(1 - \frac{x}{u}\right) = -\frac{x}{u} - \frac{x^2}{2u^2} - \frac{x^3}{3u^3} - \frac{x^4}{4u^4} - \text{etc.},$$

folglich der Logarithmus des ganzen Productes

$$(1.) = -x \sum' \frac{1}{u} - \frac{x^2}{2} \sum' \frac{1}{u^2} - \frac{x^3}{3} \sum' \frac{1}{u^3} - \frac{x^4}{4} \sum' \frac{1}{u^4} - \text{etc.};$$

die Summen mit accentuirtem Zeichen  $\sum'$  erstrecken sich ebenfalls nur über diejenigen ganzen Werthe von  $m$  und  $n$ , welche der Bedingung  $M(u) > M(x)$  genügen, und die Anordnung der Werthe von  $u$  in diesen Doppelsummen, d. h. die Reihenfolge, in welcher die Glieder addirt werden, ist dieselbe, als diejenige, in welcher die Factoren des Products multiplicirt werden sollen. Diese Umformung des Logarithmen des Productes ist statthaft, sobald man zeigen kann, daß die Summen, welche die Coëfficienten der Reihe (1.) bilden, convergent sind, und daß die Reihe (1.) selbst convergirt, unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder; also auch dann noch, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt. Was nun zunächst die Coëfficienten der Reihe betrifft, so werde ich beweisen, daß sie vom dritten ab inclusive, also die Coëfficienten von  $x^3$ ,  $x^4$ ,  $x^5$ , in inf. nicht bloß convergiren, sondern sogar gänzlich unabhängig von der Anordnung der Werthe  $u$  sind und stets ganz bestimmte und immer dieselben Werthe annehmen, in welcher Reihenfolge man auch die Glieder der Summen beim Addiren auf einander folgen läßt; die Coëfficienten von  $x$  und  $x^2$  dagegen, nämlich die Summen  $\sum' \frac{1}{u}$  und  $\sum' \frac{1}{u^2}$  können zwar convergent sein, wenn man ihre Glieder in passender Reihenfolge addirt, aber sie sind weder stets convergent, bei jeder Reihenfolge, noch behalten sie immer denselben Werth, wenn man von einer Anordnung der Glieder, bei welcher sie convergiren, zu einer andern übergeht. Es convergiren nämlich die Summen

$$\sum' \frac{1}{u^\mu}$$

unabhängig von der Anordnung der Glieder, und auch dann noch, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt, so oft der Exponent  $\mu > 2$



welche jenen Bedingungen genügen offenbar  $2^{k_1} \cdot 2^{k_2} \dots 2^{k_r} = 2^{\Sigma k} = 2^{2\pi}$ , wenn durch  $z = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_r}{r}$  das arithmetische Mittel aller  $k$  bezeichnet wird; dies ist die Anzahl der Glieder der Partialreihe. Was die Glieder selbst betrifft, so zieht man aus den obigen Ungleichungen die folgende:

$$\Sigma 2^{2k} \leq m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \dots + m_r^2 < \Sigma 2^{2k+2},$$

folglich um so mehr  $2^{2\pi} \leq \Sigma m^2$ , da  $z$  nicht gröfser als wenigstens eine der Zahlen  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , also  $2^{2\pi} < \Sigma 2^{2k}$  ist; und hieraus wiederum

$$\frac{1}{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \dots + m_r^2)^\mu} \leq \frac{1}{2^{2\pi\mu}};$$

folglich sind sämtliche einzelne Glieder der Partialreihe nicht gröfser als  $\frac{1}{2^{2\pi\mu}}$ , und da ihre Anzahl, wie schon bemerkt,  $2^{2\pi}$  beträgt, so ist die Summe aller Glieder der Partialreihe nicht gröfser als

$$\frac{2^{2\pi}}{2^{2\pi\mu}} = \frac{1}{2^{\pi(2\mu-1)}} = \frac{1}{2^{\frac{2\mu-1}{r}k_1}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{2\mu-1}{r}k_2}} \dots \frac{1}{2^{\frac{2\mu-1}{r}k_r}};$$

die Summe aller Partialreihen, für welche  $k_1, k_2, \dots, k_r$  sämtlich nicht gröfser als die bestimmte Zahl  $k$  sind, ist mithin nicht gröfser als

$$\sum_{k_1=0}^{k_1=k} \sum_{k_2=0}^{k_2=k} \dots \sum_{k_r=0}^{k_r=k} \frac{1}{2^{\frac{2\mu-1}{r}k_1}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{2\mu-1}{r}k_2}} \dots \frac{1}{2^{\frac{2\mu-1}{r}k_r}} \\ = \left\{ 1 + \frac{1}{2^{\frac{2\mu-1}{r}}} + \frac{1}{2^{\frac{2\mu-1}{r}}} + \frac{1}{2^{\frac{2\mu-1}{r}}} + \dots + \frac{1}{2^{k\frac{2\mu-1}{r}}} \right\}^r.$$

Diese geometrische Reihe convergirt für  $k = \infty$ , sobald  $2\mu - 1$  positiv, also  $\mu > \frac{1}{2}$  ist, und hat dann zur Summe

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\frac{2\mu-1}{r}}}} = \frac{2^{\frac{2\mu-1}{r}}}{2^{\frac{2\mu-1}{r}} - 1}.$$

Es ist also die Summe aller dieser Partialsummen, d. h. die Summe aller Glieder der vorgelegten Reihe, für welche die Indices den Bedingungen genügen,

$$0 < m_1 < 2^{k+1}, \quad 0 < m_2 < 2^{k+1}, \quad 0 < m_3 < 2^{k+1}, \quad \dots \quad 0 < m_r < 2^{k+1}$$

kleiner als  $\left\{ \frac{2^{\frac{2\mu-1}{r}}}{2^{\frac{2\mu-1}{r}} - 1} \right\}^r = \frac{2^{2\mu-1}}{(2^{\frac{2\mu-1}{r}} - 1)^r}$ , so grofs auch  $k$  genommen wird, wenn

nur der Exponent  $\mu$  gröfser als die halbe Ordnung der Reihe  $\frac{1}{2}r$  ist. Da man nun, wenn die Summationen in der vorgelegten Reihe sich von  $m_1 = 1$  bis

$m_1 = M_1, m_2 = 1$  bis  $m_2 = M_2, \dots m_\tau = 1$  bis  $m_\tau = M_\tau$  erstrecken, immer  $k$  so groß annehmen kann, daß  $2^{k+1}$  größer als die größte der Zahlen  $M_1, M_2, \dots M_\tau$  wird, so ist hiermit die Convergenz der Reihe erwiesen und zugleich, daß ihre Summe  $\leq \frac{2^{2\mu-\tau}}{(2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}} - 1)^\tau}$  ist. Für negative Werthe der In-

dices erhält die Reihe denselben Werth, als für positive, da in ihr nur die Quadrate der Indices vorkommen. Es bleibt noch der Fall, wenn einer oder einige der Indices, z. B.  $\sigma$  derselben, wo  $0 < \sigma < \tau$  ist, den Werth Null haben, d. h. es bleiben noch diejenigen Glieder der ursprünglich vorgelegten Reihe zu betrachten, in welchen  $\sigma$  Indices den Werth Null erhalten. Dieser Theil der Reihe kann als eine  $(\tau - \sigma)$ fache Summe von derselben Form als die vorgelegte und mit den  $\tau - \sigma$  nicht verschwindenden übrigen Indices angesehen werden, welche nach dem vorhergehenden sicher convergirt, da ja um so mehr  $\mu > \frac{1}{2}(\tau - \sigma)$  ist, wenn schon  $\mu > \frac{1}{2}\tau$  war. Da also auf diese Weise die ursprüngliche Reihe aus einer endlichen Anzahl von convergirenden Reihen zusammengesetzt wird, so convergirt sie ebenfalls. Man könnte übrigens ebenso leicht zeigen, daß sie nothwendig divergirt, sobald  $\mu \leq \frac{1}{2}\tau$  ist. Auf dieselbe Weise könnte man auch den noch allgemeineren Satz nachweisen, daß die  $\tau$ fache Reihe  $\sum \frac{1}{(m_1^\nu + m_2^\nu + \dots + m_\tau^\nu)^\mu}$  convergirt oder divergirt, je nachdem  $\mu > \frac{\tau}{\nu}$  oder  $\leq \frac{\tau}{\nu}$  ist; nur muß man bemerken, daß die Summe nur positive Werthe der Indices umfassen darf, wenn  $\nu$  ungerade ist.

Der eben bewiesene Satz über die Convergenz einer Gattung von rein numerischen Reihen dient nur als Hülfsatz, um die Convergenz einer allgemeineren Gattung darzuthun, welche eine große Anzahl von constanten Coefficienten in sich schließt.

Denn man nehme irgend ein System von  $\tau^2$  *reellen* Constanten  $a$  an, wie:

$$(A.) \quad \begin{cases} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & a_1^{(3)}, & \dots & a_1^{(\tau)}, \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & a_2^{(3)}, & \dots & a_2^{(\tau)}, \\ a_3^{(1)}, & a_3^{(2)}, & a_3^{(3)}, & \dots & a_3^{(\tau)}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_\tau^{(1)}, & a_\tau^{(2)}, & a_\tau^{(3)}, & \dots & a_\tau^{(\tau)}, \end{cases}$$

welche der einzigen Bedingung unterworfen sind, daß die aus dem System gebildete Determinante von Null verschieden sein soll, und formire mit Hülfe dieser Constanten als Coefficienten  $\tau$  lineare und homogene Verbindungen  $w$  der  $\tau$  Indices  $m_1, m_2, \dots m_\tau$ , nämlich







bei die eben erwähnte Verschiedenartigkeit der Form, so erhält man

$$\sum \varepsilon_\sigma b^{(\sigma)} k_\sigma + p \leq \sum \varepsilon_\sigma b^{(\sigma)} M(w_\sigma + c_\sigma) \leq \sum \varepsilon_\sigma b^{(\sigma)} k_\sigma + q,$$

wo  $p$  die Summe aller negativen und  $q$  die Summe aller positiven Glieder der Reihe

$$\varepsilon_1 b^{(1)}, \varepsilon_2 b^{(2)}, \varepsilon_3 b^{(3)}, \dots, \varepsilon_\tau b^{(\tau)}$$

bezeichnet. Subtrahirt man in dieser letzteren Ungleichheit von allen Gliedern die Gröfse  $\sum b^{(\sigma)} c_\sigma$ , so wird das zwischen den Zeichen  $\leq$  stehende nach dem Obigen der Werth von  $m$ , und man erhält

$$\sum b^{(\sigma)} (\varepsilon_\sigma k_\sigma - c_\sigma) + p \leq m \leq \sum b^{(\sigma)} (\varepsilon_\sigma k_\sigma - c_\sigma) + q.$$

Wenn eine ganze Zahl  $m$ , wie hier, zwischen zwei reelle Grenzen eingeschlossen ist, oder mit diesen zusammenfällt, so kann die Anzahl ihrer Werthe nie gröfser sein als die um eine Einheit vermehrte Differenz der Grenzen; hier ist die Differenz der Grenzen offenbar  $= q - p$ , d. h. gleich der Summe der absoluten Werthe der Gröfssen  $\varepsilon_1 b^{(1)}, \varepsilon_2 b^{(2)}, \varepsilon_3 b^{(3)}, \dots, \varepsilon_\tau b^{(\tau)}$ , folglich  $= \sum M(b^{(\sigma)})$ , und die Zahl der Werthe von  $m$ , welche zwischen diesen Grenzen eingeschlossen sind, oder mit ihnen zusammenfallen, ist daher höchstens  $= 1 + \sum M(b^{(\sigma)})$ . Die Ungleichung, durch welche  $m$  zwischen bestimmte Grenzen eingeschlossen wird, steht für  $\tau$  Ungleichheiten, welche aus ihr hervorgehen, wenn man  $m$  und die  $b$  nach und nach mit jeder der Zahlen aus der Reihe ( $t$ .) als unterem Index versieht; es ist folglich die Anzahl der Werthe von  $m_1$ , von  $m_2$ , von  $m_3$ , u. s. w., welche diesen Bedingungen der Reihe nach genügen, höchstens und respective

$$= 1 + \sum M(b_1^{(\sigma)}), = 1 + \sum M(b_2^{(\sigma)}), = 1 + \sum M(b_3^{(\sigma)}), \text{ u. s. w. f.};$$

die Anzahl der Combinationen von ganzen Werthen  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_\tau$ , welche allen diesen  $\tau$  Bedingungen zugleich genügen, ist demnach höchstens gleich dem Producte

$$[1 + \sum M(b_1^{(\sigma)})][1 + \sum M(b_2^{(\sigma)})][1 + \sum M(b_3^{(\sigma)})] \dots [1 + \sum M(b_\tau^{(\sigma)})],$$

und da diese Schlüsse für jede der  $2^\tau$  Zeichen-Combinationen gelten, durch welche die Werthe von  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\tau$  bestimmt werden, und deren jeder ein solches System von Ungleichheiten für  $m_1, m_2, \dots, m_\tau$  entspricht, so ist im Ganzen die Anzahl aller Combinationen von ganzen Werthen  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , welche den Bedingungen ( $K$ .) genügen, gewifs nie gröfser als

$$2^\tau \prod_{\sigma'=1}^{\sigma'=\tau} \left\{ 1 + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} M(b_\sigma^{(\sigma')}) \right\}.$$

Wird dieses letztere Product durch  $C$  bezeichnet, so kann also jene Anzahl



gativen ganzen Werthe durchlaufen läßt, so erschöpft man offenbar durch die Totalität aller der unendlich vielen hieraus hervorgehenden Partialreihen alle Glieder der Reihe  $\Sigma \frac{1}{\Omega^\mu}$ , und es ist folglich

$$\Sigma \frac{1}{\Omega^\mu} = \Sigma(k_1, k_2, \dots k_r),$$

wenn in der zweiten Summe  $k_1, k_2, \dots k_r$  alle ganzen Werthe von 0 bis  $\infty$  durchlaufen. Von der andern Seite ergeben sich aus den Ungleichheiten ( $K$ ) die folgenden:

$$\begin{aligned} k_1^2 &\leq (w_1 + c_1)^2 < (k_1 + 1)^2, \quad k_2^2 \leq (w_2 + c_2)^2 < (k_2 + 1)^2, \quad \text{u. s. w., mithin} \\ k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2 &\leq (w_1 + c_1)^2 + (w_2 + c_2)^2 + \dots + (w_r + c_r)^2 \\ &< (k_1 + 1)^2 + (k_2 + 1)^2 + \dots + (k_r + 1)^2, \end{aligned}$$

und wenn nicht alle  $k$  der Null gleich sind, so folgt hieraus

$$\frac{1}{(w_1 + c_1)^2 + (w_2 + c_2)^2 + \text{etc.}} \leq \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2}, \quad \frac{1}{\Omega^\mu} \leq \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2)^\mu}.$$

Es sind folglich, mit Ausschluss der Partialreihe  $(0, 0, \dots 0)$ , alle Glieder der Partialreihe  $(k_1, k_2, \dots k_r)$  nicht gröfser als  $\frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2)^\mu}$ , und da die Anzahl der Glieder dieser Partialreihe nicht gröfser ist, als die Constante  $C$ , welche für alle Partialreihen dieselbe bleibt, so ist die Summe aller Glieder der Partialreihe nicht gröfser als  $\frac{C}{(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2)^\mu}$ ; dieses Resultat gilt für alle Partialreihen mit Ausschluss der einzigen  $(0, 0, \dots 0)$ ; zerlegt man daher die Reihe  $\Sigma \frac{1}{\Omega^\mu}$  in die Partialreihe  $(0, 0, \dots 0)$  und in die Summe aller übrigen Partialreihen und wendet auf jede dieser übrigen das eben gefundene Resultat an, indem man besonders bemerkt, dafs  $C$  für alle Partialreihen denselben Werth hat, so erhält man

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{1}{\Omega^\mu} &= \Sigma(k_1, k_2, \dots k_r) = (0, 0, \dots 0) + \Sigma(k_1, k_2, \dots k_r) + (0, 0, \dots 0) \\ &\leq (0, 0, \dots 0) + C \Sigma \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2)^\mu}, \end{aligned}$$

wo  $+$  ein Ausschlusszeichen ist; da nun die Reihe  $(0, 0, \dots 0)$  nur eine endliche Anzahl, nämlich nicht mehr als  $C$  Glieder enthält und die Reihe  $\Sigma \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2)^\mu}$ , in welcher die Indices  $k_1, k_2, \dots k_r$  alle nicht negativen ganzen Werthe mit Ausschluss der einen Combination  $0, 0, \dots 0$

durchlaufen, nach der weiter oben angestellten Untersuchung convergirt, wenn  $\mu > \frac{1}{2}\tau$  ist, so ist hiermit auch die Convergenz der Reihe  $\Sigma \frac{1}{\Omega^\mu}$  für den Fall  $\mu > \frac{1}{2}\tau$  nachgewiesen.

Die Doppelreihe  $\Sigma \frac{1}{\{(am+bn+c)^2+(a'm+b'n+c')^2\}^\mu}$ , welche sich von der andern, in welcher  $\Sigma'$  vor demselben allgemeinen Gliede steht, nur durch das Hinzutreten einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern unterscheidet, ist offenbar unter den eben betrachteten Reihen enthalten, wenn man  $\tau=2$  setzt und die Bedingung hinzufügt, daß die Determinante  $ab'-ba'$  von 0 verschieden sein soll; diese letztere Bedingung ist aber erfüllt, sobald vorausgesetzt wird, wie wir es schon aus anderen Gründen angenommen haben, daß der Quotient

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+a'i}{b+b'i} = \frac{(a+a'i)(b-b'i)}{b^2+b'^2} = \frac{ab+a'b'}{b^2+b'^2} - i \cdot \frac{ab'-a'b}{b^2+b'^2}$$

keiner *reellen* Zahl gleich sein soll. Es convergirt mithin die Reihe

$$\Sigma' \frac{1}{\{(am+bn+c)^2+(a'm+b'n+c')^2\}^\mu} = \Sigma' \frac{1}{M(u)^{2\mu}}, \text{ sobald } \mu > 1 \text{ ist,}$$

und es convergirt folglich auch die ursprüngliche Reihe  $\Sigma' \frac{1}{u^\mu}$ , so wie die Reihe  $\Sigma \frac{1}{u^\mu}$ , in welcher  $m$  und  $n$  alle ganzen Werthe ohne Beschränkung durchlaufen können, *unabhängig von der Anordnung der Glieder*, sobald  $\mu > 2$ ; wenn aber  $\mu \leq 2$  ist, so convergiren diese letzteren beiden Reihen, selbst wenn sie überhaupt convergiren, doch sicher nie unabhängig von der Anordnung der Glieder; denn es fällt nicht schwer, durch Hülfe der obigen Principien auch die Divergenz der Reihen von der Form  $\Sigma \frac{1}{\Omega^\mu}$  in allen den Fällen nach-

zuweisen, wenn  $\mu \leq \frac{1}{2}\tau$  ist. Es bleibt indessen hier noch eine Lücke: es entsteht nämlich die Frage, ob der umgekehrte Satz eines bekannten Satzes richtig ist, ob nämlich eine von der Anordnung der Glieder unabhängig convergirende Reihe stets convergent bleibt, wenn man statt aller Glieder der Reihe deren analytische Moduln nimmt, ob man daher daraus, daß eine Reihe in eine divergente übergeht, wenn man statt der Glieder deren analytische Moduln schreibt, nothwendig schliessen darf, daß die Reihe in ihrer ursprünglichen Form nicht unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren könne. Wenn alle Glieder der Reihe reell sind, so muß für sich allein die Summe aller positiven, so wie die Summe aller negativen Glieder eine convergente Reihe bilden,

und deshalb convergirt dann auch die Summe der absoluten Werthe aller Glieder; wenn aber die Glieder complex (imaginär) sind, so bringe man das allgemeine Glied auf die Form  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , wo  $r$  der Modul des Gliedes ist: dann müssen auch die beiden Reihen, deren allgemeine Glieder  $r \cos \varphi$  und  $r \sin \varphi$  sind, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, und da in ihnen die Glieder reell sind, so müssen sie diese Eigenschaft auch behalten, wenn für  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  stets nur der absolute Werth gesetzt wird; da nun abgesehn vom Zeichen  $\cos \varphi < 1$ ,  $\sin \varphi < 1$  und deshalb  $\cos \varphi^2 < \cos \varphi$ ,  $\sin \varphi^2 < \sin \varphi$  ist, so müssen um so mehr die Reihen, deren allgemeine Glieder  $r \cos \varphi^2$  und  $r \sin \varphi^2$  sind, in demselben Sinne convergiren, denn sie entstehen durch Verkleinerung des numerischen Werthes aller Glieder aus den beiden vorhergehenden. Jene Reihen, welche nun aus lauter positiven Gliedern  $r \cos \varphi^2$ ,  $r \sin \varphi^2$  zusammengesetzt sind, geben durch Addition eine ebenfalls convergente Reihe, deren allgemeines Glied  $= r(\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2) = r$  ist, nämlich gleich dem analytischen Modul des allgemeinen Gliedes der ursprünglichen Reihe, und somit ist also der angezogene Satz aufser Zweifel gestellt. Die strenge Sonderung der Reihen, welche ihre Convergenz einer besondern Anordnung verdanken und welche bei einer Änderung dieser Anordnung theils divergent werden, theils ihre Summe ändern können, von denen, welche ganz unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren und stets dieselbe Summe behalten, in welcher Reihenfolge man auch die Glieder aufeinander folgen lasse, ist wohl hauptsächlich *Dirichlet* zu verdanken, welcher in seiner vortrefflichen Abhandlung über die Arithmetische Progression in sehr interessante Details über diesen Gegenstand eingeht.

## 2.

Nachdem das eine der drei Probleme, auf welche die Reihe (1.) führt, absolvirt ist, nämlich der Nachweis, daß die Reihen von der Form  $\sum' \frac{1}{u^\mu}$  und  $\sum \frac{1}{u^\mu}$ , wenn der Exponent  $\mu > 2$  ist, unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder convergiren, gehe ich zu dem Beweise der Convergenz der Reihe (1.) selbst über, welche auch dann noch Statt findet, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt. Zunächst kann man beliebig viele Anfangsglieder der Reihe weglassen, da diese zur Convergenz oder Divergenz nichts beitragen können; es ist für die folgenden Schlüsse nur nöthig, die beiden ersten Glieder wegzulassen. Ferner kann man die numerischen Multiplikatoren  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ , . . . . der einzelnen Glieder ebenfalls weglassen, da diese

Multiplicatoren die Convergenz, wenn sie Statt findet, nicht vermindern. Es handelt sich also darum, die Convergenz der folgenden Reihe nachzuweisen:

$$(Mx)^3 M\left(\sum' \frac{1}{u^3}\right) + (Mx)^4 M\left(\sum' \frac{1}{u^4}\right) + (Mx)^5 M\left(\sum' \frac{1}{u^5}\right) + \text{in inf.},$$

deren allgemeines Glied

$$M(x)^\mu M\left(\sum' \frac{1}{u^\mu}\right)$$

ist, und wo  $\mu$  alle ganzen positiven Werthe von 3 bis  $\infty$  durchläuft. Nach einem bekannten Satze, welcher bei der geometrischen Repräsentation der complexen Zahlen (imaginären Gröfßen) nichts anderes besagt, als dafs eine Seite eines Polygons kleiner ist, als die Summe aller übrigen, oder dafs die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Puncten ist, weifs man, dafs der analytische Modul einer Summe kleiner ist (oder wenigstens nicht gröfser) als die Summe der analytischen Moduln aller einzelnen Summanden; man hat folglich

$$M\left(\sum' \frac{1}{u^\mu}\right) < \sum' \frac{1}{M(u)^\mu},$$

und wenn daher die Reihe convergirt, deren allgemeines Glied

$$M(x)^\mu \sum' \frac{1}{M(u)^\mu}$$

ist, so wird die vorgelegte Reihe *a fortiori* convergiren; denn da man alle Glieder der vorgelegten Reihe verkleinert, sobald man  $\sum' \frac{1}{M(u)^\mu}$  statt  $M\left(\sum' \frac{1}{u^\mu}\right)$  substituirt, so wird die vorgelegte Reihe gewifs convergiren, sobald die neue Reihe diese Eigenschaft besitzt. Die Convergenz dieser letztern Reihe kann man nach den bekannten Methoden auf zwei Arten beweisen, indem man entweder zeigt, dafs der Quotient aus dem  $\mu + 1$ ten Gliede durch das  $\mu$ te Glied mit wachsendem  $\mu$  gegen eine Grenze convergirt, die unter der Einheit liegt, oder indem man zeigt, dafs die  $\mu$ te Wurzel aus dem  $\mu$ ten Gliede für wachsende  $\mu$  ebenfalls gegen eine Grenze  $< 1$  convergirt. Nach der oben festgesetzten Bedeutung des Zeichens  $\sum'$  erhalten in der Summe  $\sum' \frac{1}{M(u)^\mu}$  die Indices  $m$  und  $n$  nur solche Werthe, welche  $M(u) > M(x)$  machen; es sei  $M_0$  der kleinste der Werthe, welche unter dieser Beschränkung der stets positive Ausdruck  $M(u)$  für alle ganzen Werthe der Indices annehmen kann und  $C$  sei die Anzahl der Combinationen  $m, n$ , für welche  $M(u) = M_0$  wird; diese Anzahl ist nach dem Obigen endlich; ferner sei  $M_1$  der der Gröfse nach auf diesen  $M_0$  folgende Werth von  $M(u)$ , d. h. es sei  $M_1$  der kleinste Werth,

welchen  $M(u)$  für alle ganzen Werthe der Indices unter der Beschränkung  $M(u) > M_0$  annimmt; die drei Größen  $M(x)$ ,  $M_0$  und  $M_1$  genügen dann der Ungleichheit

$$M(x) < M_0 < M_1,$$

und der Reihe  $\sum' \frac{1}{M(u)^\mu}$  kann man, wenn man die  $C$  Anfangsglieder, für welche  $M(u) = M_0$  ist, herauszieht, die Form

$$\sum' \frac{1}{M(u)^\mu} = \frac{C}{M_0^\mu} + \sum'' \frac{1}{M(u)^\mu}$$

geben, wo die zweite Summe sich über alle diejenigen ganzen Werthe von  $m$  und  $n$  erstreckt, für welche  $M(u) \geq M_1$  wird, für welche also auch

$$\frac{1}{M(u)} \leq \frac{1}{M_1}$$

ist. Wählt man eine bestimmte Zahl  $\nu$ , welche  $> 2$  ist, z. B.  $\nu = 3$ , erhebt die eben geschriebene Ungleichheit, welche sich auf alle Glieder der Reihe  $\sum''$  bezieht, auf beiden Seiten zur Potenz  $\mu - \nu$ , welches für ein hinlänglich großes  $\mu$  (z. B.  $\mu > 3$ ) stets positiv ist, und multiplicirt dann beide Seiten mit  $\frac{1}{M(u)^\nu}$ , so leitet man aus jener Ungleichheit die folgende ab:

$$\frac{1}{M(u)^\mu} \leq \frac{1}{M_1^{\mu-\nu}} \cdot \frac{1}{M(u)^\nu},$$

und diese liefert, wenn man über alle der Bedingung genügenden Combinationen der Indices summirt:

$$\sum'' \frac{1}{M(u)^\mu} < \frac{1}{M_1^{\mu-\nu}} \sum'' \frac{1}{M(u)^\nu}.$$

Letztere Summe  $\sum'' \frac{1}{M(u)^\nu}$  ist eine ganz bestimmte Constante, welche von  $\mu$  nicht abhängt; man hat demnach folgende obere Grenze für  $\sum \frac{1}{M(u)^\mu}$  gefunden, nämlich, wenn man die Constante

$$M_1^\nu \sum'' \frac{1}{M(u)^\nu}, \text{ für welche man z. B.}$$

$$M_1^3 \sum'' \frac{1}{M(u)^3} \text{ wählen kann, durch } \delta \text{ bezeichnet, so ist}$$

$$\sum' \frac{1}{M(u)^\mu} < \frac{C}{M_0^\mu} + \frac{\delta}{M_1^\mu}.$$

Als untere Grenze für dieselbe Summe bietet sich unmittelbar der Ausdruck  $\frac{C}{M_0^\mu}$  dar, und man hat demnach:



$$\frac{C}{M_0^\mu} < \sum' \frac{1}{M(u)^\mu} < \frac{C}{M_0^\mu} + \frac{\delta}{M_1^\mu};$$

wenn man hier  $\mu+1$  statt  $\mu$  setzt, so ergibt sich

$$\frac{C}{M_0^{\mu+1}} < \sum' \frac{1}{M(u)^{\mu+1}} < \frac{C}{M_0^{\mu+1}} + \frac{\delta}{M_1^{\mu+1}}.$$

Für den Quotienten der in diesen beiden Ungleichheiten zwischen den Zeichen  $<$  stehenden Summen

$$\frac{\sum' \frac{1}{M(u)^{\mu+1}}}{\sum' \frac{1}{M(u)^\mu}}$$

erhält man demnach eine untere Grenze, wenn man die untere Grenze in der zweiten Ungleichheit durch die obere Grenze in der ersten dividirt, und man erhält für denselben Quotienten eine obere Grenze, wenn man die obere in der zweiten durch die untere in der ersten dividirt; nach einer einfachen Reduction werden diese beiden Grenzen des Quotienten der beiden Summen resp.

$$\frac{C}{CM_0 + \delta M_0 \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^\mu} \quad \text{und} \quad \frac{C + \delta \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{\mu+1}}{CM_0};$$

da nun wegen  $M_0 < M_1$  die Potenz  $\left(\frac{M_0}{M_1}\right)^\mu$  für  $\mu = \infty$  verschwindet, so convergiren beide Grenzen für  $\mu = \infty$  gegen dieselbe Gröfse  $\frac{C}{CM_0} = \frac{1}{M_0}$ , und folglich convergirt auch der obige Quotient gegen dieselbe Grenze  $\frac{1}{M_0}$ . Bei der Reihe, deren Convergenz wir untersuchen und deren allgemeines Glied

$$M(x)^\mu \sum' \frac{1}{M(u)^\mu}$$

ist, wird nun der Quotient aus dem  $\mu+1$ ten durch das  $\mu$ te Glied gleich dem eben betrachteten Quotienten multiplicirt mit  $M(x)$ , also wird die Grenze jenes Quotienten für  $\mu = \infty$ ,

$$= \frac{M(x)}{M_0},$$

also offenbar  $< 1$ , weil  $M_0 > M(x)$  war, folglich u. s. w. Man könnte auf dieselbe Art nachweisen, daß die  $\mu$ te Wurzel aus  $\sum' \frac{1}{M(u)^\mu}$  stets zwischen zwei Grenzen liegt, welche beide für  $\mu = \infty$  gegen  $\frac{1}{M_0}$  convergiren, und es

würde daraus ebenfalls die Convergenz der in Rede stehenden Reihe hervorgehen; ich will mich aber hierbei nicht aufhalten, sondern gehe zur Lösung des dritten Problems, nämlich zur Betrachtung der Summen  $\sum' \frac{1}{u}$  und  $\sum' \frac{1}{u^2}$  über, indem ich untersuche, bei welcher Reihenfolge der Glieder sie convergiren und welche Modificationen sie erleiden, wenn man von einer Anordnung zu einer andern übergeht.

## 3.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, dafs das unendliche Product  $\Pi' \left(1 - \frac{x}{u}\right)$  convergiren und sein Logarithmus durch die Reihe (1.) ausgedrückt sein wird, sobald man bei der successiven Heranziehung der Factoren zur Bildung des Products unter den Werthen von  $u$  dieselbe Reihenfolge beobachtet, welche sie bei den beiden Summen  $\sum' \frac{1}{u}$  und  $\sum' \frac{1}{u^2}$  einnehmen müssen, damit letztere beiden convergiren. Da ferner die Coëfficienten von  $x^3$ ,  $x^4$ , u. s. w. in der Reihe des Logarithmen von der Anordnung der Glieder *unabhängige* Summen sind, so kann jede Modification, welche durch ein verändertes Arrangement der Factoren des Products eintreten sollte, nur die beiden ersten Glieder der Entwicklung des Logarithmen, nämlich die Coëfficienten von  $x$  und  $x^2$  treffen; bezeichnet man demnach die Zuwachse, welche  $\sum' \frac{1}{u}$  und  $\sum' \frac{1}{u^2}$  erlangen können, wenn man von einem Arrangement der Glieder zu einem andern übergeht, resp. durch  $p$  und  $q$ , so erlangt der Logarithmus des Products bei dieser Veränderung einen Zuwachs von der Form  $-px - \frac{1}{2}qx^2$ , wo  $p$  und  $q$  von  $x$  unabhängig sind und nur von  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  abhängen; das Product selbst erlangt also einen Factor von der Form

$$e^{-px - \frac{1}{2}qx^2}.$$

Man kann die Form von  $p$  und  $q$  als Functionen von  $\gamma$  a priori angeben. Durch das Zeichen  $\nabla$  sei die Modification angegeben oder der Zuwachs, welchen eine Reihe bei der Veränderung der Anordnung ihrer Glieder erleidet, wenn die Convergenz dieser Reihe wesentlich von der Reihenfolge der Glieder abhängt; ist die Reihe unabhängig von der Anordnung der Glieder, so ist  $\nabla$  stets  $= 0$ . Was die einfachsten Operationen mit dem Zeichen  $\nabla$  betrifft, so kann man zunächst offenbar bei einer Summe, vor welcher es steht, eine beliebige endliche Anzahl von Anfangsgliedern hinzufügen oder fortlassen; denn

die Summe dieser endlichen Anzahl von Gliedern kann durch Permutation der Glieder keine Modification erleiden; aus demselben Grunde kann man ferner auch eine Gruppe von unendlich vielen Gliedern fortlassen oder hinzufügen, wenn diese Gruppe eine Reihe constituirt, welche unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt. Bei der Berechnung von  $\nabla \Sigma' \frac{1}{u}$  und  $\nabla \Sigma' \frac{1}{u^2}$  kann man folglich die, eine Anzahl Anfangsglieder ausschließende Bedingung  $M(u) > M(x)$  fortlassen, und statt ihrer die andere  $M(\alpha m + \beta n) > M(\gamma)$  festsetzen, wodurch man zuerst eine gewisse Anzahl von Anfangsgliedern hinzufügt und dann wiederum eine andere ebenfalls endliche Anzahl von Anfangsgliedern ausschließt. Unter der Bedingung  $M(\alpha m + \beta n) > M(\gamma)$  lassen sich die allgemeinen Glieder der beiden Reihen, deren beide Modificationen man sucht, in convergente Reihen nach Potenzen von  $\gamma$  entwickeln; man erhält

$$\frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \frac{1}{\alpha m + \beta n} - \frac{\gamma}{(\alpha m + \beta n)^2} + \frac{\gamma^2}{(\alpha m + \beta n)^3} - \text{in inf.},$$

$$\frac{1}{(\alpha m + \beta n + \gamma)^2} = \frac{1}{(\alpha m + \beta n)^2} - \frac{2\gamma}{(\alpha m + \beta n)^3} + \frac{3\gamma^2}{(\alpha m + \beta n)^4} - \text{in inf.}$$

Mit Hülfe dieser Umformungen lassen sich obige Reihen, deren allgemeine Glieder hier entwickelt sind, selbst in Reihen nach Potenzen von  $\gamma$  entwickeln; die Convergenz dieser letztern Reihen folgt unmittelbar aus denselben Principien; durch welche ich oben in §. 2. die Convergenz der Reihe (1.) bewies; in der That sind sie in dieser Beziehung genau von derselben Form, wie die Reihe (1.) und gehen aus derselben hervor, wenn man dort  $\gamma = 0$  setzt und die numerischen Multiplicatoren  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ , etc., welche auf die Convergenz keinen Einfluss üben, durch andere Multiplicatoren ersetzt, welche eben so wenig die Convergenz weder vermehren noch vermindern. Die Coëfficienten in diesen Reihen nach Potenzen von  $\gamma$  werden Reihen von der Form  $\Sigma \frac{1}{(\alpha m + \beta n)^\mu}$ , welche unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, sobald  $\mu > 2$  wird, wie in §. 1. bewiesen worden ist; man kann daher bei der Bestimmung von  $\nabla$  in den Reihen nach Potenzen von  $\gamma$  diejenigen Potenzen von  $\gamma$  weglassen, welche Coëfficienten von jener Form haben, in denen  $\mu > 2$  ist; dies gestattet also bei der Reihe für  $\Sigma' \frac{1}{u}$  die Fortlassung aller Glieder bis auf die beiden ersten, und bei der für  $\Sigma' \frac{1}{u^2}$  die Fortlassung aller Glieder bis auf das einzige erste.

Man erhält demnach

$$\nabla \sum' \frac{1}{u} = \nabla \sum \frac{1}{\alpha m + \beta n} *) - \gamma \nabla \sum \frac{1}{(\alpha m + \beta n)^2}, \text{ und}$$

$$\nabla \sum' \frac{1}{u^2} = \nabla \sum \frac{1}{(\alpha m + \beta n)^2}.$$

Obleich die Indices in denjenigen Summen, vor welchen hier zur Rechten das Zeichen  $\nabla$  steht, noch der Beschränkung  $M(\alpha m + \beta n) > M(\gamma)$  unterworfen sind, so kann man doch diese Beschränkung wiederum fortlassen und braucht nur die einzige Combination  $m=0$ ,  $n=0$  auszuschließen. Thut man dies und setzt der Kürze wegen für der Augenblick die sowohl von  $x$  als von  $\gamma$  unabhängigen Constanten

$$\nabla \sum \frac{1}{\alpha m + \beta n} = a \quad \text{und} \quad \nabla \sum \frac{1}{(\alpha m + \beta n)^2} = b,$$

so wird  $p = a - b\gamma$ ,  $q = b$ , und der ganze Zuwachs des Logarithmen von  $\Pi\left(1 - \frac{x}{u}\right)$  wird von der Form  $-(a - b\gamma)x - \frac{1}{2}bx^2 = -ax - \frac{1}{2}bx^2 + b\gamma x$ ; der Factor, welcher zu dem Producte selbst hinzutreten kann, wenn man von einem convergenten Arrangement der Factoren zu einem anderen ebenfalls convergenten übergeht, ist folglich stets von der Form

$$e^{-(a-b\gamma)x - \frac{1}{2}bx^2},$$

wo die beiden Constanten  $a$ ,  $b$  einzig von  $\alpha$  und  $\beta$  abhängen.

Es wird der Gegenstand des folgenden Paragraphen sein, nachzuweisen, daß die Reihen  $\sum \frac{1}{(\alpha m + \beta n)^e}$ , in welchen  $e = 1$  oder  $= 2$  sein kann, convergiren, sobald man die Glieder in der Reihenfolge so auf einander folgen läßt, daß man erst nach dem einen Index  $m$  summirt, indem man je zwei entgegengesetzte Werthe  $\pm m$  zusammenfaßt, und dann das Resultat der Summation nach  $m$  wiederum nach dem andern Index  $n$  summirt, indem man ebenfalls je zwei entgegengesetzte Werthe desselben  $\pm n$  unmittelbar nach einander nimmt. Hier dagegen will ich für einige der einfachsten und wichtigsten Änderungen dieses Arrangements der Glieder die Werthe der Modificationen  $\nabla \sum \frac{1}{(\alpha m + \beta n)^e}$  zu bestimmen suchen.

---

\*) Es ist hier sehr unwesentlich, zu bemerken, daß  $\sum \frac{1}{\alpha m + \beta n}$  bei einem gewissen Arrangement der Glieder den Werth Null hat; man muß aber deshalb nicht glauben, daß diese Reihe stets den Werth Null hätte.

Wenn man in irgend einer Doppelsumme oder einem unendlichen Doppelproducte eine *durchgreifende* Vertauschung der Glieder anbringen will, d. h. eine solche, welche sich nicht blofs auf einen *endlichen* Theil der Summe oder des Products bezieht: so kann man dies am einfachsten dadurch erreichen, dafs man statt der Indices  $m$  und  $n$  neue Indices  $m'$  und  $n'$  einführt, welche mit den ersteren durch Relationen von solcher Form verknüpft sind, dafs jeder Combination von ganzen  $m, n$  eine und nur eine Combination von ganzen  $m', n'$  und umgekehrt entspricht; d. h. man wird zwei solche Gleichungen zwischen  $m, n$  und  $m', n'$  annehmen, dafs die Werthe von  $m'$  und  $n'$ , welche sich aus diesen Gleichungen in  $m$  und  $n$  ausgedrückt finden, stets eindeutig und ganz sind, wenn für  $m$  und  $n$  ganze Zahlen angenommen werden; und dafs ebenso, wenn man umgekehrt vermittlels derselben Gleichungen oder durch deren Auflösung  $m$  und  $n$  in  $m'$  und  $n'$  ausdrückt, sich zu ganzen Werthen von  $m'$  und  $n'$  ebenfalls vollkommen bestimmte und ganze Werthe von  $m$  und  $n$  ergeben. Die Werthe der neuen Indices können sodann im Allgemeinen bei der Addition oder Multiplication in derselben Folge herangezogen werden, welche zuvor für die früheren Indices festgesetzt oder willkürlich angenommen worden war.

Es giebt zwei Arten solcher Transformationen der Indices, welche eine besondere Beachtung verdienen. Die erste Art besteht darin, dafs man irgend zwei constante ganze Zahlen  $\lambda$  und  $\nu$  wählt und die Gleichungen

$$m = m' + \lambda, \quad n = n' + \nu$$

setzt, aus welchen

$$m' = m - \lambda, \quad n' = n - \nu$$

folgt. Wenn hier  $m$  und  $n$  alle ganzen Werthe von  $-\infty$  bis  $\infty$  durchlaufen, so durchlaufen  $m'$  und  $n'$  dieselben Werthe; jeder Combination  $m, n$  entspricht eine und nur eine Combination  $m', n'$ , und umgekehrt; nur dafs der jedesmalige Werth von  $m'$  hinter dem von  $m$  um  $\lambda$  Einheiten und der von  $n'$  hinter dem von  $n$  um  $\nu$  Einheiten zurückbleibt. Bei der zweiten Art von Transformationen der Indices nimmt man zwischen den alten und den neuen Indices ein System von linearen und homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} m &= \lambda m' + \mu n', \\ n &= \nu m' + \rho n' \end{aligned}$$

an, wo die Coëfficienten  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  ganze Zahlen sind und ein Transformationssystem

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$$

bilden, dessen Determinante  $\lambda\rho - \mu\nu = \varepsilon = \pm 1$  ist. Diese Gleichungen genügen offenbar den obigen Bedingungen; denn zunächst sind  $m$  und  $n$  wirklich in  $m'$ ,  $n'$  ganzzahlig ausgedrückt, und da die Determinante des Systems der positiven oder negativen Einheit gleich ist, so erhält man durch Auflösung der obigen Gleichungen:

$$m' = \frac{\rho m - \mu n}{\lambda\rho - \mu\nu} = \varepsilon\rho \cdot m - \varepsilon\mu \cdot n,$$

$$n' = \frac{-\nu m + \lambda n}{\lambda\rho - \mu\nu} = -\varepsilon\nu \cdot m + \varepsilon\lambda \cdot n:$$

ein System, durch welches wiederum  $m'$  und  $n'$  ganzzahlig in  $m$  und  $n$  ausgedrückt sind. Als ein specieller Fall dieser zweiten Art von Transformation ist Dasjenige anzusehen, was man gewöhnlich die *Vertauschung* der beiden Indices in einem Progressus von zwei Dimensionen zu nennen pflegt; denn diese Vertauschung kommt darauf hinaus,  $m = n'$  und  $n = m'$  zu setzen, d. h. in obigem Systeme  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $\nu = 1$ ,  $\rho = 0$  zu nehmen; was eine uneigentliche Transformation giebt, wenn man die Transformationen dieser Art in eigentliche und uneigentliche eintheilen will, je nachdem  $\lambda\rho - \mu\nu = +1$  oder  $\lambda\rho - \mu\nu = -1$  ist.

Die Summen, auf welche die Entwicklung des Logarithmen des in dieser Abhandlung betrachteten Products führt, sind sämmtlich von der Form

$$\Sigma f(\alpha m + \beta n + \gamma) = \Sigma f(u),$$

während das Product selbst von der Form  $\Pi f(\alpha m + \beta n + \gamma) = \Pi f(u)$  ist. Durch Einführung der ersten Art von Transformation geht  $\alpha m + \beta n + \gamma$  in  $\alpha m' + \beta n' + \gamma + \lambda\alpha + \nu\beta$  über, welcher Ausdruck in Bezug auf die neuen Indices genau dieselbe Form hat, wie der vorhergehende, wenn man nur

$\gamma' = \gamma + \lambda\alpha + \nu\beta$  an die Stelle von  $\gamma$  gesetzt sich vorstellt. In dem Falle also, wo obige Summen unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren (was wirklich für alle nach dem zweiten folgenden Coëfficienten der Reihe (1.) Statt findet), hat man stets die Gleichung

$$\Sigma f(\alpha m + \beta n + \gamma) = \Sigma f(\alpha m' + \beta n' + \gamma').$$

Diese beiden Summen repräsentiren eine und dieselbe Function, die eine von  $\gamma$ , die andere von  $\gamma'$ ; es hat also diese Function die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man  $\gamma'$  an die Stelle von  $\gamma$  setzt, d. h. wenn man  $\gamma$  um  $\lambda\alpha + \nu\beta$ , nämlich um ein beliebiges (positives oder negatives) Vielfache von  $\alpha$  und um ein beliebiges Vielfache von  $\beta$  vermehrt; alle Reihen also, von der

obigen Form, welche unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, sind, als Functionen von  $\gamma$  betrachtet, *doppelt periodische Functionen*, welche die beiden *Moduln* der Periodicität  $\alpha$  und  $\beta$  haben; ich nenne nämlich einen *Modul der Periodicität* jede Gröfse, wie hier  $\alpha$  und  $\beta$ , um welche das Argument einer Function geändert werden kann, ohne dafs die Function sich ändert; Dasselbe, was *Jacobi* den *Index der Periodicität* nennt; das Wort *Modul*, welches schon eine ganz ähnliche Bedeutung in der Arithmetik bei der Theorie der Congruenzen gewonnen hat, scheint mir diesen Begriff weit besser auszudrücken, als das Wort *Index*, welches den Summationsbuchstaben oder den Stellenzeiger einer Reihe bezeichnet: in der That, eine Congruenz bleibt ungeändert, wenn man die Variabeln oder unbestimmten Zahlen um Vielfache des Moduls ändert; Dasselbe geschieht bei einer periodischen Function; die Einführung des Wortes Modul in dem eben angegebenen Sinne ist *Gaußs* zuzuschreiben, der es, wenn auch nicht ausdrücklich in seinen gedruckten Werken, so doch in einem an mich gerichteten Briefe über die lemniscatischen Functionen in dieser Bedeutung gebraucht.

Auf die beiden Reihen

$$\sum \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma} \quad \text{und} \quad \sum \frac{1}{(\alpha m + \beta n + \gamma)^2},$$

deren Summe von der Anordnung der Glieder abhängt, kann man die obigen, aus der Transformation der Indices hervorgehenden Schlüsse nicht anwenden; man kann dagegen die Modificationen oder den Zuwachs erforschen, welchen diese Reihen durch die Transformation der Indices erleiden, und wenn dieser Zuwachs  $\nabla$  eine einfache Form annimmt, wie es sich in der That zeigen wird, so hat man Functionen von  $\gamma$ , welche bei der Vermehrung des Arguments um  $\lambda\alpha + \nu\beta$  zwar nicht ungeändert bleiben, jedoch nur eine leichte und a priori angebbare Modification erleiden; man kann solche Functionen *uneigentlich-periodische* nennen. Bei jeder Transformation der Indices ist, wie wir weiter oben gesehen haben, der Zuwachs der ersten jener beiden Reihen von der Form  $a - b\gamma$ , wo  $a$  und  $b$  von  $\gamma$  unabhängig sind, und der Zuwachs der zweiten Reihe ist dann  $= b$ ; man braucht deshalb nur den Zuwachs der ersten zu suchen, weil der der zweiten unmittelbar daraus hervorgeht, wenn man in jenem Zuwachse den Coefficienten von  $\gamma$  mit entgegengesetztem Zeichen nimmt. Die Summe der Reihe  $\sum \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma}$ , deren allgemeines Glied  $\frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma}$  der Kürze wegen durch  $\varphi(m, n)$  bezeichnet sein

mag, wird als die Grenze der endlichen Doppelreihe

$$\sum_{m=-k}^{m=k} \sum_{n=-l}^{n=l} \varphi(m, n)$$

betrachtet, wenn man zuerst  $k$  und dann  $l$  in infinitum wachsen läßt, und stellt insofern eine ganz bestimmte Function von  $\gamma$  dar. Damit nun die aus der Transformation der Indices hervorgehende neue Reihe dieselbe Function von  $\gamma'$  gebe, muß dieselbe als die Grenze der folgenden angesehen werden:

$$\sum_{m'=-k}^{m'=k} \sum_{n'=-l}^{n'=l} \varphi(m' + \lambda, n' + \nu) = \sum_{m=-k}^{m=k} \sum_{n=-l}^{n=l} \varphi(m + \lambda, n + \nu),$$

welche auch so geschrieben werden kann:

$$\sum_{m=-k+\lambda}^{m=k+\lambda} \sum_{n=-l+\nu}^{n=l+\nu} \varphi(m, n),$$

und in welcher ebenfalls erst  $k$ , dann  $l$  gegen die Grenze  $\infty$  convergiren muß. Die Differenz zwischen dieser Summe und der vorhergehenden ist  $= \nabla$ ; diese Differenz vereinfacht sich dadurch bedeutend, daß beide Summen einen großen Theil von Gliedern gemeinschaftlich haben, nämlich alle die, für welche gleichzeitig

$$-k + \lambda \leq m \leq k, \quad -l + \nu \leq n \leq l$$

ist, wenn z. B.  $\lambda$  und  $\nu$  beide positiv sind, und ähnliche Systeme von gleicher Anzahl der Glieder, wenn  $\lambda$  und  $\nu$  irgend eine der vier Zeichencombinationen darbieten; man darf demnach nur die Differenz derjenigen Theile bilden, welche resp. bei der ersten und zweiten Summe nach Ausschließung des gemeinschaftlichen Theils verbleiben. Bei der geometrischen Darstellung der zusammengehörigen Werthe der beiden Indices durch die Durchschnittspuncte zweier auf einander senkrechten Systeme von Parallelen, welche in gleichen, als Einheit geltenden Entfernungen von einander abstehen, mit Annahme von zweien dieser Parallelen als auf einander senkrechten Null-Axen, wird der Übergang von der einen Summe zur andern, welcher bei der hier angewandten Transformation der Indices Statt findet, durch die Verschiebung eines Rechtecks ausgedrückt, von welchen zwei gegenüberstehende Ecken den beiden Combinationen resp.  $(-k, -l)$  und  $(k, l)$  entsprechen, und welches nach der Axe der  $m$  um  $\lambda$  und nach der Axe der  $n$  hin gleichzeitig um  $\nu$  Einheiten fortrückt. Diese beiden Lagen  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  des Rechtecks \*) haben den Theil  $EBFD'$  (Fig. 2.) gemeinschaftlich; man hat also von der Summe

\*) S. Fig. 1., wo  $AD$  der Axe der  $m$ ,  $AB$  derjenigen der  $n$  parallel läuft und die Punkte  $A, B, C, D$  resp. den Combinationen  $(-k, -l)$ ,  $(-k, l)$ ,  $(k, l)$ ,  $(k, -l)$ , die Punkte  $A', B', C', D'$  den Combinationen  $(-k + \lambda, -l + \nu)$ ,  $(-k + \lambda, l + \nu)$ ,  $(k + \lambda, l + \nu)$ ,  $(k + \lambda, -l + \nu)$  entsprechen.



der den Theilen  $A'B'GE$  und  $BGCF$  entsprechenden Reihen die Summe der den Theilen  $HFCD$  und  $AED'H$  entsprechenden Reihen zu subtrahiren, um  $\nabla$  zu finden. Wenn man also durch die Flächenräume zugleich die Reihen ausdrückt, deren Indices die in diesen Flächenräumen enthaltenen Combinationen durchlaufen, so kann man sehr bequem schreiben:

$$\nabla = A'B'GE + BGC'F - HFCD - AED'H.$$

Wenn nun  $k$  in infinitum wächst, so dehnen sich die beiden Rechtecke nach beiden Seiten immer mehr in die Breite  $AD$ ,  $A'D'$  aus, während ihre Höhe  $AB$ ,  $A'B'$  dieselbe bleibt; die durch die Stücke  $A'B'GE$  und  $HFCD$  zur Linken und zur Rechten dargestellten Theile von  $\nabla$  nähern sich dabei über alle Grenzen der Null, wegen der Convergenz der vorgelegten Reihe nach  $m$ ; die durch die Stücke  $BGC'F$  und  $AED'H$  oben und unten repräsentirten Theile verwandeln sich dagegen, indem sich die Stücke immer mehr nach rechts und links ausziehen, in unendliche Reihen, welche sich auf den Index  $m$  von  $m = -\infty$  bis  $m = \infty$  beziehen\*); der erste Theil geht nämlich offenbar in die Summe von  $\nu$  Reihen ( $\nu$  ist in der Figur positiv) über, deren jede die Form

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m + \beta l + \xi}$$

hat, wo  $\xi$  eine Anzahl  $\nu$  constanter, um die Differenz  $\beta$  unterschiedener Werthe bekommt; der zweite Theil verwandelt sich in  $\nu$  ähnliche Reihen von der Form

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m - \beta l + \xi}$$

Um die Grenzen dieser Reihen für  $l = \infty$  zu finden, kann man dieselben durch Exponentialfunctionen für ein endliches  $l$  summiren und dann in diesen Functionen  $l = \infty$  setzen; man kann auch diese Grenzen unmittelbar durch bestimmte Integrale ausdrücken, deren Werth sich leicht finden läßt. Es ist nach einer bekannten Formel, welche übrigens im folgenden Paragraphen abgeleitet wird:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m \pm \beta l + \xi} = \frac{\pi}{\alpha} \cotang \frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi = \frac{\pi i}{\alpha} \cdot \frac{e^{\frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i} + e^{-\frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i}}{e^{\frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i} - e^{-\frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i}}.$$

Nun convergirt eine Exponentialfunction, wie  $e^{u+vi}$ , entweder gegen 0 oder gegen  $\infty$ , je nachdem  $u$  gegen  $-\infty$  oder gegen  $\infty$  convergirt, während  $v$  gar keinen Einfluß darauf hat. Von den vier Exponentialfunctionen

$$e^{\frac{\beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i}, \quad e^{-\frac{\beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i}, \quad e^{\frac{-\beta l - \xi}{\alpha} \cdot \pi i}, \quad e^{-\frac{-\beta l - \xi}{\alpha} \cdot \pi i},$$

\*) S. die Bemerkung am Schlusse dieser Abhandlung.

in welchen das Zeichen des reellen Theils des Exponenten für wachsende  $l$  offenbar durch das Zeichen des Coëfficienten von  $i$  in dem Quotienten  $\frac{\beta}{\alpha}$  bestimmt wird, convergiren demnach entweder die erste und vierte, oder die zweite und dritte gegen Null, je nachdem der Coëfficient von  $i$  in  $\frac{\beta}{\alpha}$  positiv oder negativ ist. Da sich hiernach die beiden Exponentialfunctionen, deren Summe im Zähler und deren Differenz im Nenner des obigen Ausdrucks für die Cotangente steht, bald auf die erste, bald auf die zweite von beiden allein reduciren, indem die andere für  $l = \infty$  verschwindet, so erhält man als Grenze bald  $\frac{\pi i}{\alpha}$ , bald  $-\frac{\pi i}{\alpha}$ , und zwar

$$\lim_{l=\infty} \sum \frac{1}{\alpha m + \beta l + \xi} = \frac{-\pi i}{\alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{\pi i}{\alpha} \quad \text{und}$$

$$\lim_{l=\infty} \sum \frac{1}{\alpha m - \beta l + \xi} = \frac{\pi i}{\alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{-\pi i}{\alpha},$$

je nachdem der Coëfficient von  $i$  in  $\frac{\beta}{\alpha}$  positiv oder negativ ist; setzt man je nach diesen beiden Fällen  $\delta = -1$  oder  $= +1$ , so hat man in allen Fällen

$$\lim_{l=\infty} \sum \frac{1}{\alpha m \pm \beta l + \xi} = \pm \frac{\delta \pi i}{\alpha},$$

und dann ist  $\delta = +1$  oder  $= -1$ , je nachdem der Coëfficient von  $i$  in  $\frac{\alpha}{\beta}$  positiv oder negativ ist, denn der Coëfficient von  $i$  in  $\frac{\alpha}{\beta}$  hat stets das entgegengesetzte Zeichen von dem in  $\frac{\beta}{\alpha}$ . Durch bestimmte Integrale erhält man dasselbe Resultat, wenn man das allgemeine Glied der Reihen unter der Form

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\alpha \frac{m}{l} \pm \beta + \frac{\xi}{l}}$$

schreibt; man sieht dann leicht, dafs die Reihe

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\alpha \frac{m}{l} \pm \beta + \frac{\xi}{l}}$$

mit wachsenden  $l$  gegen das bestimmte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial x}{\alpha x \pm \beta}$$

convergiert, welches, durch die bekannten Methoden behandelt, den Werth  $\pm \frac{\pi i}{\alpha}$  oder

$\mp \frac{\pi i}{\alpha}$  liefert, je nachdem der Coëfficient von  $i$  in  $\frac{\alpha}{\beta}$  positiv oder negativ ist. Da nun alle die  $\nu$  Reihen, welche addirt werden sollten, dieselbe Grenze  $\frac{\delta \pi i}{\alpha}$  haben, und da auch die andern  $\nu$  Reihen, welche subtrahirt werden sollten, ebenfalls alle dieselbe und der vorigen entgegengesetzte Gröfse  $-\frac{\delta \pi i}{\alpha}$  zur Grenze haben, so wird die Summe der  $\nu$  Reihen weniger der Summe der  $\nu$  andern Reihen, für  $l = \infty$ ,  $= \delta \frac{2\nu \pi i}{\alpha}$ . Dies ist also der Werth von  $\nabla$ , nämlich

$$\nabla \sum \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \delta \frac{2\nu \pi i}{\alpha} = \pm \frac{2\nu \pi i}{\alpha} = a - b\gamma,$$

und obwohl dieses Resultat nur für ein positives  $\nu$  bewiesen zu sein scheint, so überzeugt man sich doch leicht, dafs jede Lage der beiden Rechtecke  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  zu einander zu demselben Resultate führen mufs und dafs obige Gleichung für jeden ganzen Werth von  $\nu$ , so wie auch für jeden ganzen Werth von  $\lambda$  gilt. Da der gefundene Ausdruck  $\pm \frac{2\nu \pi i}{\alpha}$  von  $\gamma$  unabhängig ist, so folgt daraus  $a = \pm \frac{2\nu \pi i}{\alpha}$  und  $b = 0$ , und aus  $b = 0$  folgt

$$\nabla \sum \frac{1}{(\alpha m + \beta n + \gamma)^2} = 0.$$

Letztere Reihe, als Function von  $\gamma$  betrachtet, ist daher ebenfalls eine *doppelt periodische Function*, ebenso wie diejenigen oben betrachteten Reihen, welche von der Anordnung der Glieder unabhängig waren. Dieses Resultat lehrt aber nur, dafs diese specielle Art von Transformation, welche dem Übergange von  $\gamma$  zu  $\gamma' = \gamma + \lambda\alpha + \nu\beta$  entspricht, die Summe der Reihe nicht modificirt, während immer noch eine andere Art von Transformation die Summe nichts desto weniger ändern kann und ändern mufs. Die Function  $\sum \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma}$  ändert sich nicht, wenn  $\gamma$  blofs um  $\lambda\alpha$  wächst, also  $\nu = 0$  ist; sie ist daher immer noch einfach periodisch und hat den Modul  $\alpha$ ; diese Function wächst dagegen um  $\delta \frac{2\nu \pi i}{\alpha}$ , wenn  $\gamma$  um  $\nu\beta$  wächst; man kann daher  $\beta$ , und allgemein  $\lambda\alpha + \nu\beta$ , wenn  $\nu$  von Null verschieden ist, für diese Function als Modul einer *uneigentlichen Periodicität* ansehen, oder kürzer als *uneigentlichen Modul der Periodicität*. Da endlich die ganze Reihe (1.) in §. 1. bei dieser Transformation den Zuwachs

$$-(a - b\gamma)x - \frac{1}{2}bx^2 = -\delta \frac{2\nu \pi i}{\alpha}x$$

erlangt, so tritt zu dem Producte  $\prod\left(1-\frac{x}{u}\right)$ , wenn es als Grenze des folgenden

$$\prod_{n=-l}^{n=l} \prod_{m=-k}^{m=k} \left(1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma}\right), \quad k = \infty, \quad l = \infty$$

betrachtet wird, die Exponentialgröße  $e^{-\delta \frac{2\pi i}{\alpha} x}$  bei der Transformation als Factor hinzu \*), und wenn man das unendliche Doppelproduct als Function  $\psi(\gamma)$  von  $\gamma$  betrachtet, so ist

$$\psi(\gamma + \lambda\alpha + \nu\beta) = e^{-\delta \frac{2\pi i}{\alpha} x} \psi(\gamma) = e^{\pm \frac{2\pi i}{\alpha} x} \psi(\gamma),$$

wo im Exponenten das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Coefficient von  $i$  in  $\frac{\beta}{\alpha}$  (resp.  $\frac{\alpha}{\beta}$ ) positiv (negativ) oder negativ (positiv) ist. Das unendliche Doppelproduct, in obigem Sinne verstanden, ist demnach in Bezug auf den Modul  $\alpha$  eine eigentlich periodische, in Bezug auf den Modul  $\beta$  eine uneigentlich periodische Function von  $\gamma$ .

Ich gehe jetzt zu der Anwendung der zweiten der beiden oben hervorgehobenen Transformationsarten der Indices über.

Auch bei dieser zweiten Art von Transformation, bei welcher vier ganze Zahlen  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  der Bedingung  $\lambda\rho - \mu\nu = \varepsilon = \pm 1$  genügend angenommen und

$$m = \lambda m' + \mu n', \quad n = \nu m' + \rho n'$$

gesetzt werden, verwandelt sich  $u = \alpha m + \beta n + \gamma$  in einen analogen Ausdruck in Bezug auf die neuen Indices; nur bleibt  $\gamma$  unverändert, wogegen an die Stelle von  $\alpha$  und  $\beta$  andere Werthe treten, während bei der vorhergehenden Art von Transformation umgekehrt  $\alpha$  und  $\beta$  ungeändert blieben und  $\gamma$  in  $\gamma'$  überging. Man erhält

$$\begin{aligned} \alpha m + \beta n + \gamma &= \alpha(\lambda m' + \mu n') + \beta(\nu m' + \rho n') + \gamma \\ &= (\lambda\alpha + \nu\beta)m' + (\mu\alpha + \rho\beta)n' + \gamma. \end{aligned}$$

Wenn man daher

$$\alpha' = \lambda\alpha + \nu\beta, \quad \beta' = \mu\alpha + \rho\beta$$

setzt, so geht

$$\alpha m + \beta n + \gamma \text{ in } \alpha' m' + \beta' n' + \gamma \text{ über.}$$

\*) Die in §. 1. durch die Bedingung  $M(u) > M(x)$  abgetrennten Factoren haben natürlich auf die durch Transformation der Indices entstehende Modification keinen Einfluss; und da sie ohnedies bei beiden Arrangements dieselben sind, so können sie nachher bei beiden wiederum willkürlich hinzugefügt werden; es erleiden daher die in §. 1. durch  $\Pi$  und durch  $\Pi'$  bezeichneten unendlichen Producte beide genau dieselbe Modification.

Man schließt hieraus zunächst, daß diejenigen Summen von der Form

$$\Sigma f(\alpha m + \beta n + \gamma),$$

welche von der Anordnung der Glieder unabhängig sind, unverändert bleiben, wenn man  $\alpha'$  und  $\beta'$ , welche durch obige Formeln gegeben sind, an die Stelle von  $\alpha$  resp.  $\beta$  setzt: eine sehr wichtige und interessante Eigenschaft, welche diese Functionen mit der schon erwiesenen der doppelten Periodicität in Bezug auf  $\gamma$  verbinden. Um die Modificationen zu finden, welche die beiden von der Anordnung der Glieder abhängigen Summen bei dieser Transformation erleiden, könnte man ein demjenigen bei der ersten Art von Transformation analoges Verfahren anwenden; aber man würde zu sehr mühsamen und complirten Betrachtungen geführt werden; es lassen sich auf kürzerem Wege diese Modificationen aus den schon gefundenen Resultaten wie folgt ableiten. Man setze

$$\Sigma \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \varphi(\gamma) \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{1}{\alpha' m + \beta' n + \gamma} = \varphi'(\gamma),$$

wo in den Summen erst  $m$  und dann  $n$  die Werthe  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  durchläuft. Nach dem oben Gefundenen genügt die Function  $\varphi(\gamma)$  der Relation

$$\varphi(\gamma + g\alpha + h\beta) = \varphi(\gamma) + \delta \frac{2h\pi i}{\alpha}$$

wenn  $g$  und  $h$  irgend zwei ganze Zahlen sind; es muß daher auch  $\varphi'(\gamma)$  der analogen Relation

$$\varphi'(\gamma + g\alpha' + h\beta') = \varphi'(\gamma) + \delta' \frac{2h\pi i}{\alpha'}$$

genügen, wo  $\delta'$  durch das Zeichen des Coëfficienten von  $i$  in  $\frac{\alpha'}{\beta'}$  bestimmt wird; denn die beiden Functionen  $\varphi'(\gamma)$  und  $\varphi(\gamma)$  haben dieselbe Art und unterscheiden sich nur durch die Werthe ihrer Moduln der Periodicität. Aus den Gleichungen  $\alpha' = \lambda\alpha + \nu\beta$ ,  $\beta' = \mu\alpha + \varrho\beta$ , welche, wegen  $\lambda\varrho - \mu\nu = \pm 1$ , durch Auflösung zu den folgenden für den Rückweg von  $\alpha'$ ,  $\beta'$  zu  $\alpha$ ,  $\beta$  führen, sind:  $\alpha = \varepsilon\varrho\alpha' - \varepsilon\nu\beta'$ ,  $\beta = -\varepsilon\mu\alpha' + \varepsilon\lambda\beta'$ , ersieht man, daß jeder Ausdruck von der Form  $g\alpha' + h\beta'$ , wo  $g$  und  $h$  ganze Zahlen sind, zugleich von der Form  $g\alpha + h\beta$  ist, und umgekehrt; man zieht in der That aus jenen Gleichungen:

$$\begin{aligned} g\alpha' + h\beta' &= (\lambda g + \mu h)\alpha + (\nu g + \varrho h)\beta, \\ g\alpha + h\beta &= (\varepsilon\varrho g - \varepsilon\mu h)\alpha' + (-\varepsilon\nu g + \varepsilon\lambda h)\beta'. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Übertragung läßt sich irgend eine der beiden obigen Relationen für die Functionen  $\varphi$  und  $\varphi'$  so umformen, daß der Zuwachs von  $\gamma$  auf der linken Seite in ihr derselbe wird, wie der Zuwachs von  $\gamma$  in der an-

den Relation. Man erreicht diesen Zweck, indem man entweder in der ersten Relation (für  $\varphi$ ) die neuen ganzen Zahlen  $\lambda g + \mu h$ , und  $\nu g + \varrho h$  an die Stelle von  $g$  resp.  $h$  schreibt, oder, indem man in der zweiten (für  $\varphi'$ ) die neuen ganzen Zahlen  $\varepsilon \varrho g - \varepsilon \mu h$  und  $-\varepsilon \nu g + \varepsilon \lambda h$  statt  $g$  und  $h$  nimmt. Im ersten Falle erhält man die beiden Relationen

$$\varphi(\gamma + g\alpha' + h\beta') = \varphi(\gamma) + \delta \frac{2(\nu g + \varrho h)\pi i}{\alpha},$$

$$\varphi'(\gamma + g\alpha' + h\beta') = \varphi'(\gamma) + \delta' \frac{2h\pi i}{\alpha'},$$

im zweiten Falle die beiden folgenden:

$$\varphi(\gamma + g\alpha + h\beta) = \varphi(\gamma) + \delta \frac{2h\pi i}{\alpha},$$

$$\varphi'(\gamma + g\alpha + h\beta) = \varphi'(\gamma) + \delta' \frac{2(-\varepsilon \nu g + \varepsilon \lambda h)\pi i}{\alpha'}.$$

Bemerkt man nun, daß die Differenz  $\varphi'(\gamma) - \varphi(\gamma)$ , welche der Werth von  $\nabla \Sigma \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma}$  ist, nach dem früher Bewiesenen von der Form  $a - b\gamma$  sein muß, so erhält man durch Subtraction der beiden Relationen in jedem der eben geschriebenen beiden Systeme:

$$a - b(\gamma + g\alpha' + h\beta') = a - b\gamma + \delta' \frac{2h\pi i}{\alpha'} - \delta \frac{2(\nu g + \varrho h)\pi i}{\alpha} \quad \text{und}$$

$$a - b(\gamma + g\alpha + h\beta) = a - b\gamma + \delta' \frac{2(-\varepsilon \nu g + \varepsilon \lambda h)\pi i}{\alpha'} - \delta \frac{2h\pi i}{\alpha};$$

folglich zwei Gleichungen zur Bestimmung von  $b$ , nämlich:

$$b(g\alpha' + h\beta') = \delta \frac{2(\nu g + \varrho h)\pi i}{\alpha} - \delta' \frac{2h\pi i}{\alpha'},$$

$$b(g\alpha + h\beta) = \delta \frac{2h\pi i}{\alpha} - \delta' \frac{2(-\varepsilon \nu g + \varepsilon \lambda h)\pi i}{\alpha'};$$

welche wegen der Unbestimmtheit der ganzen Zahlen  $g$  und  $h$ , deren jede man der Null gleich setzen kann, in die vier folgenden zerfallen:

$$b\alpha' = \delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha}, \quad b\beta' = \delta \frac{2\varrho\pi i}{\alpha} - \delta' \frac{2\pi i}{\alpha'},$$

$$b\alpha = \varepsilon\delta' \frac{2\nu\pi i}{\alpha'}, \quad b\beta = \delta \frac{2\pi i}{\alpha} - \varepsilon\delta' \frac{2\lambda\pi i}{\alpha'}.$$

Diese vier Gleichungen geben die Constante  $b$  in vier verschiedenen Formen ausgedrückt, welche sich übrigens leicht auf einander reduciren lassen. Die erste und vierte Gleichung lehren noch, daß immer

$$\delta' = \varepsilon\delta$$

ist, d. h., daß der Coëfficient von  $i$  in  $\frac{\alpha'}{\beta'}$  dasselbe, oder das entgegengesetzte Zeichen mit dem Coëfficienten von  $i$  in  $\frac{\alpha}{\beta}$  hat, je nachdem  $\varepsilon = +1$ , oder  $\varepsilon = -1$  ist; und in der That, wenn man die den complexen Werthen  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  conjugirten complexen Werthe durch  $\alpha_1, \beta_1, \alpha'_1, \beta'_1$  bezeichnet, so hat der Coëfficient von  $i$  in  $\frac{\alpha}{\beta}$ , nämlich  $\frac{1}{2i}(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha_1}{\beta_1})$ , dasselbe Zeichen mit der Determinante  $\frac{\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1}{2i}$  und der in  $\frac{\alpha'}{\beta'}$ , nämlich  $\frac{1}{2i}(\frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha'_1}{\beta'_1})$ , hat dasselbe Zeichen mit der Determinante  $\frac{\alpha'\beta'_1 - \beta'\alpha'_1}{2i}$ . Nun finden, da  $\lambda, \mu, \nu, \varrho$  reell sind, zwischen den conjugirten Werthen dieselben Gleichungen Statt, wie zwischen  $\alpha', \beta'$  und  $\alpha, \beta$ : mithin ist das System  $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{pmatrix}$  aus den beiden folgenden zusammengesetzt:

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \varrho \end{pmatrix},$$

und deshalb findet zwischen den Determinanten dieser Systeme die Relation  $\alpha'\beta'_1 - \beta'\alpha'_1 = (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)(\lambda\varrho - \mu\nu)$  Statt; folglich u. s. w. Der einfachste Ausdruck für  $b$  ist offenbar der aus der ersten der vier Gleichungen hervorgehende

$$b = \delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}.$$

Die Constante  $a$  entschlüpft den obigen Rechnungen, aber man überzeugt sich leicht, daß sie den Werth Null hat; denn es ist

$$a = \nabla \sum \frac{1}{\alpha m + \beta n} = \sum \frac{1}{\alpha' m + \beta' n} - \sum \frac{1}{\alpha m + \beta n},$$

und diese Summen, deren Differenz den Werth von  $a$  giebt, verschwinden offenbar beide bei der Reihenfolge, in welcher wir in ihnen die Glieder geordnet annehmen. Wir finden hiernach

$$\nabla \sum \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma} = -\delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'} \gamma, \quad \nabla \sum \frac{1}{(\alpha m + \beta n + \gamma)^2} = \delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}.$$

Der Zuwachs der Reihe (1.) ist

$$-(a - b\gamma)x - \frac{1}{2}bx^2 = \delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'} (\gamma x - \frac{1}{2}x^2),$$

und das unendliche Doppelproduct erlangt den Exponentialfactor

$$e^{\frac{\delta}{\alpha\alpha'} \frac{2\pi i}{\alpha} (\gamma x - \frac{1}{2} x^2)}$$

Bei der bloßen Vertauschung der Indices, für welche  $\lambda = \varrho = 0$ ,  $\mu = \nu = 1$  ist, wird dieser hinzutretende Exponentialfactor:

$$= e^{\frac{\delta}{\alpha\beta} \frac{2\pi i}{\alpha} (\gamma x - \frac{1}{2} x^2)}$$

Hiernach kann man das Verhältniß angeben, in welchem die einfachen unendlichen Producte stehen, welche in der Notiz S. 285 des 27. Bandes dieses Journals aus dem unendlichen Doppelproduct dadurch abgeleitet sind, daß man abwechselnd die Multiplication zuerst nach dem einen und dann nach dem andern Index ausgeführt hat. In jener Notiz vom Februar 1844, welche nur als eine flüchtige Andeutung zu betrachten ist \*), habe ich nur die speciellen Fälle des unendlichen Doppelproducts

$$\Pi \left( 1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma} \right)$$

betrachtet, welche den Werthen  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{\beta}{2}$  und  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  entsprechen (mit Übertragung der dort angenommenen Buchstaben auf die hier gewählten); auch habe ich dort auf die Modificationen keine Rücksicht genommen, welche durch die Vertauschung der Multiplicationen entstehen, und welche Modificationen hier ausführlich und von einem viel allgemeineren Gesichtspuncte aus erörtert worden sind; die gegenwärtige Abhandlung kann daher zum Theil als eine Ergänzung und weitere Ausführung der frühern, eben erwähnten angesehen werden; und in der That sollen im folgenden Paragraphen allgemein die Relationen zwischen einfachen unendlichen Producten betrachtet werden, welche sich aus dem unendlichen Doppelproduct ergeben: nicht allein dadurch, daß man die Ordnung der beiden Multiplicationen vertauscht, sondern überhaupt dadurch, daß man auf die Indices irgend eine Transformation von der Form

$$\begin{aligned} m &= \lambda m' + \mu n' \\ n &= \nu n' + \varrho n', \quad \lambda \varrho - \mu \nu = \pm 1 \end{aligned}$$

anwendet, wovon die Umkehrung der Ordnung der Multiplicationen, wie schon bemerkt, nur ein specieller Fall ist.

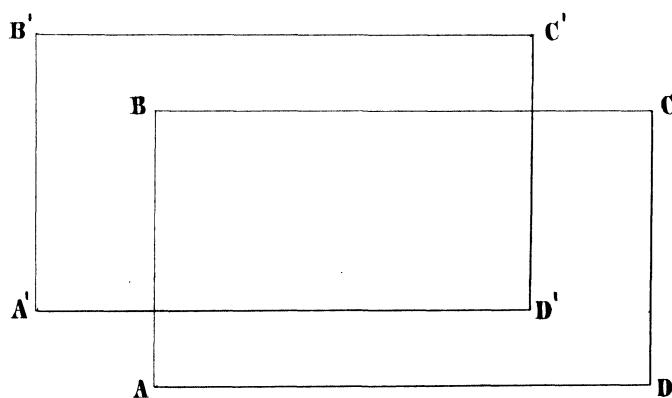
(Die Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

---

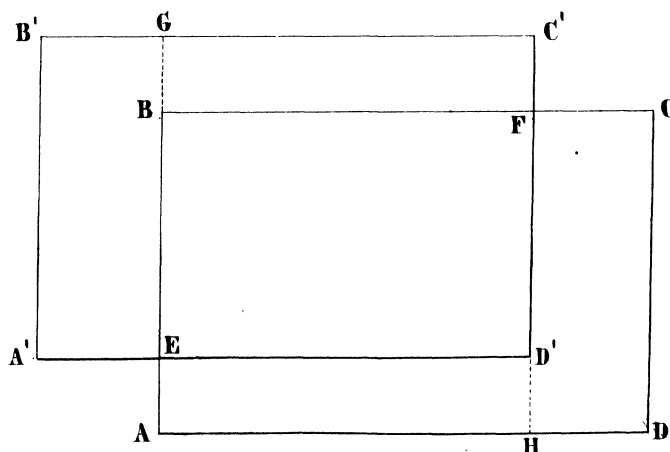
\*) In der That wurde jene Notiz während des Drucks anderer Abhandlungen zum Manuscripte hinzugefügt.



1.



2.





*Fac-simile einer Handschrift von J. F. Pfaff.*

Galle, J. 8. Decemb. 1815

In in dem Etat angeführt nicht  
betreffende Angabe von 12  $\pi$  für  
den Aufseher ist zum Lehrer der  
Herrnseite selbst und ihre Leitung  
notwendig. Für List und Führung  
würde, wenn ein Observator regelmäßig  
besteht, in unfernt unfernt  
sagen, als bisher fürwahr konnte,  
in der Professor der Mathematik,  
(ein nach Langsaufseher der Umstände  
nicht wohl anders sein konnte),  
mit in einzelnen Jahren fallen  
Lehrstunden anstellen, und die  
Herrnseite bei Abrechnung bringen.

Für Lehrer und angestrichen, müßte  
um so notwendiger sein, da die  
für den Unterricht - Bibliothek in  
mathematischen Teil überführt sehr  
dünn ist.

In Angabe für die Institution  
ist, wie aus dem bereits gesagten  
sich ergibt, nicht als ein alle Tage  
auf dieselbe Art wiederholend anzusehen.

J. F. Pfaff,

Professor der Mathematik.

