13.
Ueber die graphische Darstellung imaginärer Funktionen.

(Von Herrn *Siebeck* zu Liegnitz.)

---

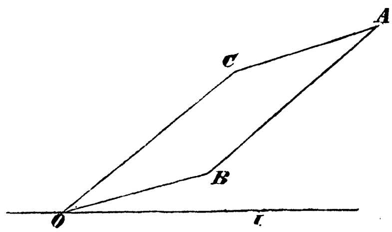
§. 1.

Die Art und Weise, nach welcher im barycentrischen Calcül Punkte wie Zahlengröfsen behandelt und unmittelbar durch Addition und Subtraction mit einander in Verbindung gesetzt werden, sowie die bedeutenden Erfolge, welche sich an diese Methode geknüpft haben, berechtigen zu der Vermuthung, dafs die Macht und Tragweite jenes Punkt-Calcüls noch gröfser sein würde, wenn es gelänge, denselben von den Fesseln, in welche er in Folge des jenem Werke eigenthümlichen Ausgangspunktes eingezwängt ist, zu befreien, und von Punkten nicht blofs Summen und Differenzen, sondern auch Produkte und Quotienten, Potenzen und Wurzeln zu bilden. Glücklicherweise ist aber das letztere Ziel durch die von *Gaufs* gegebene graphische Darstellung imaginärer Zahlen mindestens bezüglich der Punkte einer und derselben Ebene bereits erreicht und so liegt der Gedanke nahe, dafs es lohnend sein möchte, von dieser breiteren und vervollständigten Basis aus die Geometrie im Sinne des barycentrischen Calcüls zu behandeln — ein Unternehmen, welches im Fall des Gelingens aufser der Weiterbildung des barycentrischen Calcüls noch den Vortheil brächte, dafs die vielfach geahnte, aber noch nirgends durch wirkliche Erfolge documentirte Fruchtbarkeit jenes *Gaufs*schen Gedankens, sowie auch der innige Zusammenhang desselben mit den Methoden und Anschauungsweisen der neueren Geometrie nachgewiesen würde.

Dafs das eben bezeichnete Feld ein sehr dankbares ist, beabsichtigt der Verfasser dieses Aufsatzes an einer anderen Stelle ausführlicher nachzuweisen. Hier sei es ihm nur gestattet, einige Betrachtungen, die sich eben ohne eine gröfsere Reihe von Voraussetzungen anstellen lassen, auszuführen.

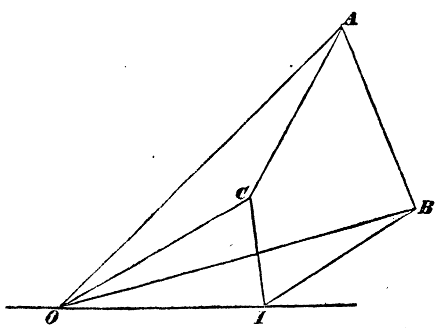
Die Art und Weise wie die Punkte einer Ebene durch imaginäre Zahlen dargestellt werden, kann zwar als allgemein bekannt vorausgesetzt werden, indessen dürfte es zum besseren Verständnifs unserer Anschauungsweise beitragen, wenn wir unseren Betrachtungen eine kurze Zusammenstellung der Hauptsachen, welche hier in Betracht kommen, einleitend vorausschicken.

Wir nehmen zu dem Ende in der gegebenen Ebene nach Belieben zwei feste Punkte an, von denen der eine durch Null, der andere durch Eins repräsentirt wird und bezeichnen diese Punkte respective durch O und I. Die nach beiden Seiten verlängerte Verbindungslinie derselben heifse die Hausptachse, der Abstand eines beliebigen Punktes der Ebene vom Nullpunkt der radius vector des betreffenden Punktes und der von dem radius vector mit der Hauptachse gebildete Winkel der Neigungswinkel. Endlich sei noch erwähnt, dafs wir, wenn zwei Linien AB und $A'B'$ gleiche Länge und einerlei (nicht entgegengesetzte) Richtung haben, dies durch $AB \equiv A'B'$ ausdrücken. Dies vorausgeschickt, beruht die graphische Darstellung imaginärer Zahlen bekanntlich auf folgenden Voraussetzungen:



1) Unter der Summe $B+C$ zweier Punkte B und C ist derjenige Punkt A zu verstehen, welcher so liegt, dafs die von ihm nach dem einen Summanden B gezogene Linie mit der von dem andern Summanden C nach dem Mittelpunkt gezogenen Linie gleiche Länge und einerlei Richtung hat. Es ist daher $A = B + C$, wenn $OC \equiv BA$ oder auch $OB \equiv CA$.

2) Unter der Differenz $A - B$ zweier Punkte A und B ist derjenige Punkt C zu verstehen, welcher so liegt, dafs die vom Nullpunkt bis zu ihm gezogene Linie mit der von B bis A gezogenen Linie gleiche Länge und einerlei Richtung hat. Es ist daher $A - B = C$, wenn $BA \equiv OC$.



3) Unter dem Produkt $B.C$ zweier Punkte B und C ist derjenige Punkt A zu verstehen, welcher so liegt, dafs Dreieck OIC ähnlich und gleichstimmig OBA, oder auch OIB ähnlich und gleichstimmig OCA sei.

4) Unter dem Quotienten $\frac{A}{B}$ zweier Punkte A und B ist derjenige Punkt C zu verstehen, welcher so liegt, dafs die Dreiecke OBA und OIC ähnlich und gleichstimmig sind.

Aus vorstehenden Voraussetzungen, deren Statthaftigkeit leicht auf ganz elementarem Wege nachgewiesen werden kann, sind sodann die den einzelnen

Punkten der Ebene zukommenden Zahlen mit leichter Mühe herzuleiten. Man gelangt so zu den bekannten Resultaten, dafs $ae^{\alpha i}$ oder $a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, wo $i = \sqrt{-1}$, denjenigen Punkt repräsentirt, dessen radius vector gleich a und dessen Neigungswinkel α ist; dafs ferner die Zahl $a+bi$ demjenigen Punkte zukommt, dessen Entfernung von der Hauptachse (in entsprechendem Sinne genommen) gleich b ist und dessen orthogonale Projektion auf die Hauptachse die Entfernung a vom Nullpunkte hat u. s. w. Wird ein Punkt unter der Form $ae^{\alpha i}$ gegeben, so werden wir $e^{\alpha i}$ den Richtungscoefficienten dieses Punktes nennen. Den Begriff der Potenz und Wurzel, welcher aus 3) leicht herzuleiten ist, übergehen wir der Kürze halber und begnügen uns, in den beiden folgenden Paragraphen noch einige einleitende Bemerkungen an Vorstehendes zu knüpfen, welche sich auf Gleichungen zwischen Punkten beziehen.

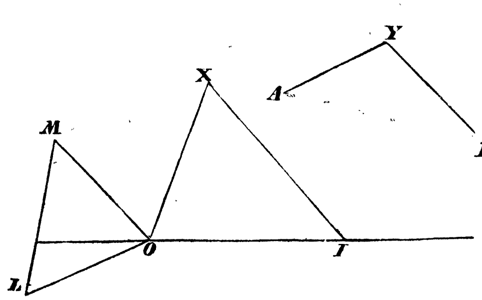
§. 2.

Jede Gleichung zwischen Punkten z. B. $A = B$ ist der Ausdruck für die Identität zweier Punkte. Da nun aber zur Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Ebene zwei metrische Bestimmungen gehören, ***so sind auch in jeder Gleichung zwischen Punkten zwei metrische Bestimmungen enthalten,*** welche daher in jedem einzelnen Falle zu entwickeln sind. Hat man z. B. die Gleichung $A - B = C - D$, so liegt hierin, dafs $AB \equiv CD$; die beiden in der gegebenen Gleichung enthaltenen metrischen Bestimmungen bestehen also darin, dafs einestheils $AB = CD$, anderntheils die Winkel, unter welchen die Linien AB und CD gegen die Hauptachse oder auch eine beliebige andere Linie geneigt sind, einander gleich sind. Um ein für spätere Untersuchungen wichtiges Beispiel anzuführen, wollen wir versuchen die beiden in der Gleichung

$$X = \frac{A-Y}{Y-B}$$

liegenden metrischen Bestimmungen zu entwickeln.

Zieht man zu dem Ende, wenn AYB in nebenstehender Figur 3 beliebige Punkte der Ebene sind, $OL \equiv YA$ und $OM \equiv BY$, so ist $L = A - Y$ und $M = Y - B$, folglich $\frac{A-Y}{Y-B} = \frac{L}{M}$. Ist daher X ein Punkt, welcher so liegt, dafs Dreieck



$LOM \sim XOI$, so ist $X = \frac{L}{M} = \frac{A-Y}{Y-B}$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt aber, dafs $\frac{OX}{OI} = \frac{OL}{OM}$, oder, da OI die Längeneinheit ist, $OX = \frac{OL}{OM}$; da aber $OL = YA$ und $OM = BY$, so ist $OX = \frac{AY}{YB}$, d. i. die eine metrische Bestimmung. Andrerseits folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, dafs $\angle IOX = \angle MOL$; es ist aber, da OL mit YA einerlei, OM mit YB entgegengesetzte Richtung hat, $\angle MOL = 2R - AYB$, folglich auch $\angle IOX = 2R - AYB$, d. i. die zweite metrische Bestimmung. *In der Gleichung* $X = \frac{A-Y}{Y-B}$ *liegen also die beiden metrischen Bestimmungen* $OX = \frac{AY}{YB}$ *und* $\angle IOX = 2R - AYB$. Man kann hieraus die Lage des Punktes X leicht ohne Hülfe der Punkte L und M ermitteln. Ist z. B. $\angle AYB = 2R$ und $AY = YB$, also Y der Mittelpunkt von AB, so ist $OX = 1$ und $\angle IOX = 0$; der Punkt X fällt also dann nach I, und es ist folglich $\frac{A-Y}{Y-B} = 1$. Aus letzterer Gleichung folgt aber wieder $Y = \frac{A+B}{2}$. Wir entnehmen hieraus, *dafs allgemein* $\frac{A+B}{2}$ *Ausdruck des Mittelpunkts der geraden Strecke* AB *ist.*

Zusatz. Aus der Gleichung $\frac{A-Y}{Y-B} = \frac{C-Z}{Z-D}$ folgen die metrischen Bestimmungen

$$(1.)\qquad \frac{AY}{YB} = \frac{CZ}{ZD},$$

$$(2.)\qquad \angle AYB = \angle CZD$$

oder $AYB \sim CZD$.

§. 3.

Schliefslich sei es uns erlaubt, noch einer Methode Erwähnung zu thun, von welcher wir hie und da bei Längen- und Flächenbestimmungen Gebrauch machen werden. Ist nämlich ein zusammengesetzter Ausdruck gegeben, welcher aufser i nur reelle Zahlen enthält und den wir durch $F(i)$ bezeichnen wollen, so erhält man den diesem Ausdruck entsprechenden Punkt P durch eine Reihenfolge von Constructionen, welche die jedesmalige Beschaffenheit jenes Ausdrucks bedingt, aus lauter Punkten der Hauptachse (den Repräsentanten jener reellen Zahlen) und dem Punkte J, nämlich dem Repräsentanten von i. Setzt man nun $-i$ statt i in $F(i)$, so erhält man den Punkt $F(-i) = \overline{P}$ offenbar aus denselben Punkten der Hauptachse und aus J' (dem Repräsentanten von

$-i$), also dadurch, dafs man dieselbe Construction auf der entgegengesetzten Seite der Hauptachse ausführt. Hieraus folgt, dafs die Punkte P und $\overline{P}$ zur Hauptachse symmetrisch, nämlich in gleicher Entfernung von derselben und in ein und derselben Normalen zu ihr liegen müssen. Setzt man nun insbesondere $P = F(i) = ae^{\alpha i} = a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ und folglich $\overline{P} = F(-i) = ae^{-\alpha i} = a(\cos\alpha - i\sin\alpha)$, so sind hiedurch zugleich folgende Gleichungen bedingt:

$$(1.)\qquad P\overline{P} = a^2,$$

$$(2.)\qquad \frac{P}{\overline{P}} = e^{2\alpha i},$$

$$(3.)\qquad \frac{P+\overline{P}}{2} = a\cos\alpha,$$

$$(4.)\qquad \frac{P-\overline{P}}{2i} = a\sin\alpha.$$

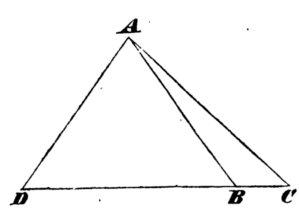
Stellen wir uns etwa die Aufgabe, wenn P und Q zwei beliebige Punkte der Ebene sind, den Flächeninhalt des Dreiecks POQ zu ermitteln, so wird derselbe, wenn $P = ae^{\alpha i}$ und $Q = be^{\beta i}$ gesetzt wird, zunächst durch $\frac{1}{2}ab\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}(a\sin\alpha . b\cos\beta - a\cos\alpha . b\sin\beta)$ ausgedrückt werden können. Setzt man hier für $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $a\sin\alpha$, $b\sin\beta$ die diesen Zahlen nach (3.) und (4.) entsprechenden Ausdrücke, so erhält man

$$\triangle POQ = \tfrac{1}{2}\left[\frac{P-\overline{P}}{2i}.\frac{Q+\overline{Q}}{2} - \frac{P+\overline{P}}{2}.\frac{Q-\overline{Q}}{2i}\right],$$

woraus man leicht erhält

$$(5.)\qquad \triangle POQ = \frac{P\overline{Q}-\overline{P}Q}{4i}.$$

Um ein zweites Beispiel der Anwendung zu geben, wollen wir uns vornehmen, den bekannten *Stewart*schen Satz zu beweisen, nach welchem, wenn B ein beliebiger Punkt der Seite DC des Dreiecks ADC ist, die Gleichung



$$AD^2.BC + AC^2.BD - AB^2.DC = DB.BC.DC$$

Statt hat.

Wir verlegen zu dem Ende D in den Nullpunkt, B und C in die Hauptachse. Es seien nun A die dem Punkte A, und 0, b, c die den Punkten D, B, C resp. zukommenden Zahlen. Alsdann ist dem Obigen gemäfs

$$A.\bar{A} \text{ Ausdruck für } DA^2,$$
$$(A-b)(\bar{A}-b) \text{ Ausdruck für } BA^2,$$
$$(A-c)(\bar{A}-c) \text{ Ausdruck für } CA^2.$$

Ferner sind b, c, $c-b$ die resp. Ausdrücke für die Längen DB, DC, BC. Es wäre also nur die Gleichung

$$A.\bar{A}(c-b)+(A-c)(\bar{A}-c)b-(A-b)(\bar{A}-b)c = bc(c-b)$$

zu beweisen, deren Identität auf der Hand liegt.

Von den geometrischen Funktionen.

I. Von den Funktionen einer Variabeln.

§. 4.

Denkt man sich einen aus den beliebig in der Ebene liegenden Punkten X, A, B, C ... beliebig zusammengesetzten Ausdruck (z. B. $A+BX+CX^2$), welchen wir allgemein durch $F(X, A, B, C\ldots)$ bezeichnen, so wird durch denselben eine Construction bedingt, mittelst deren man aus den als bekannt angenommenen Punkten X, A, B, C ... zu einem neuen Punkte gelangt, welchen wir durch Y bezeichnen wollen. Setzen wir demnach

$$Y = F(X, A, B, C\ldots)$$

und seien die Punkte A, B, C ... fest, der Punkt X aber verändere seine Lage, so wird auch Y seine Lage verändern. Beschreibt also X eine beliebige Bahn, so wird sich auch Y in einer Bahn bewegen, und zwar in einer solchen, welche abhängig ist von der vom Punkte X durchlaufenen Bahn. Wir werden daher X den sich unabhängig bewegenden Punkt, Y den sich abhängig bewegenden Punkt nennen. Jeder bestimmten Lage des Punktes X entspricht eine bestimmte Lage des Punktes Y; beschreibt daher X und folglich auch Y eine Curve, so entspricht jedem bestimmten Punkte der ersteren Curve ein bestimmter Punkt der andern Curve. Zwei sich in dieser Weise entsprechende Systeme von Punkten oder Curven nennen wir *verwandt*, und es ist unsere Absicht, den gemeinsamen Charakter aller Verwandtschaften, welche auf diese Weise dargestellt werden können, zu ermitteln. Wir bemerken hierbei noch, dafs das Abhängigkeits- (Verwandtschafts-) Verhältnifs der Punkte X und Y auch durch eine Gleichung von folgender Form $F(Y, X, A, B, C\ldots) = 0$ dargestellt werden kann, in welcher sowohl X als unabhängiger und Y als abhängiger, als auch Y als abhängiger und X als unabhängiger Punkt betrachtet werden kann. Denken wir uns nun die Verwandtschaft der beiden Systeme mit Weglassung der festen Punkte einfach durch die Gleichung $Y = F(X)$ ausgedrückt, und seien X', X'', X''' drei einander unendlich nahe, nicht in gerader Linie liegende Punkte des Systems X; Y', Y'', Y''' ... die jenen entsprechenden, also ebenfalls einander unendlich nahen Punkte des Systems Y, und bezeichnen wir den Differentialquotienten $\frac{\partial Y}{\partial X}$ durch $F'(X)$, so ist offenbar

$$Y'' - Y' = (X'' - X')F'(X'),$$
$$Y''' - Y' = (X''' - X')F'(X'),$$

folglich

$$\frac{Y''-Y'}{Y'-Y'''} = \frac{X''-X'}{X'-X'''}.$$

Aus letzterer Gleichung folgen aber (nach §. 2, Zusatz) die beiden metrischen Bestimmungen:

$$(1.) \qquad \frac{Y''Y'}{Y'Y'''} = \frac{X''X'}{X'X'''},$$

$$(2.) \qquad \angle X''X'X''' = \angle Y''Y'Y'''.$$

Demnach sind auch die Dreiecke $X'X''X'''$ und $Y'Y''Y'''$ ähnlich (und gleichstimmig). Wir gelangen somit zu folgendem allgemeinen Resultate: ***Je zwei einander nach der Gleichung $Y = F(X)$ verwandte endliche Figuren sind in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich*** *).

Dasselbe gilt natürlich auch von jeder durch die Gleichung $F(X, Y) = 0$ ausgedrückten Verwandtschaft, weil letztere Gleichung stets auf die Form $Y = F(X)$ gebracht werden kann.

Schneiden sich nun zwei zum System X gehörige Curven in einem Punkte X' und folglich die zu dem System Y gehörigen, jenen entsprechenden Curven in dem entsprechenden Punkte Y', so sind offenbar die Durchschnittswinkel der sich in X' und Y' schneidenden Curven einerlei mit denen, welche die zwei in X' oder Y' zusammenstofsenden Elemente der einen und der andern Curve mit einander machen. Da nun aber, wie eben bewiesen wurde, die einander entsprechenden Figuren in ihren kleinsten Theilen ähnlich sind, so folgt hieraus der Satz:

*) Man vergleiche hiemit: *Gaufs*, Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dafs die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird (Art. 8), in *Schumachers* astronomischen Abhandlungen, Heft 3.

Findet zwischen zwei Figuren die Verwandtschaft $Y = F(X)$ Statt, so müssen sich stets je zwei sich schneidende Curven der einen Figur unter denselben Winkeln schneiden, wie die entsprechenden Curven der andern Figur.

Wir werden daher die unter der Gleichung $Y = F(X)$ oder auch $F(X, Y) = 0$ enthaltenen Verwandtschaften *isogonale* Verwandtschaften nennen. Unter ihnen hat man überhaupt bis jetzt erst zwei in Untersuchung gezogen, nämlich die Verwandtschaft der Aehnlichkeit $(Y = A + BX)$ und die Kreisverwandtschaft $\left(Y = \frac{A+BX}{C+DX}\right)$.

Wir werden aber auf die specielle Erörterung mehrerer der einfachsten Verwandtschaften erst später eingehen können. Vorläufig bemerken wir nur, dafs diejenigen isogonalen Verwandtschaften besondere Beachtung verdienen, für welche, wenn sie durch die Gleichung $F(X, Y) = 0$ gegeben werden, $F(X, Y)$ eine symmetrische Funktion von X und Y ist. Da nämlich in solchen Funktionen die Variabeln mit einander vertauscht werden können, so ist das Entsprechen ein involutorisches. Wir werden daher solche Verwandtschaften involutorische isogonale Verwandtschaften nennen.

§. 5.

Aus der im vorigen Paragraphen gegebenen Entwicklung läfst sich zugleich die Bedeutung herleiten, welche der Differentialquotient $F'(X)$ bezüglich der Verwandtschaft $Y = F(X)$ hat. Sind nämlich wieder X' und X'' zwei einander sehr nahe Punkte in X, Y' und Y'' die ihnen entsprechenden in Y, und lassen wir X'' sich um X' in einem Kreise bewegen, so wird sich in Folge der oben bewiesenen Aehnlichkeit der kleinsten Theile auch Y'' um Y' in einem Kreise bewegen. Es ist dann fortwährend

$$F'(X') = \frac{Y''-Y'}{X''-X'}.$$

In dieser Gleichung liegen aber, wenn wir $F'(X') = P$ setzen, folgende metrische Bestimmungen

$$1)\qquad OP = \frac{Y'Y''}{X'X''},$$

d. h. ***der Radius vector des Differentialquotienten $F'(X')$ giebt für die Verwandtschaft $Y = F(X)$ das Verhältnifs der Halbmesser zweier einander entsprechenden Elementarkreise an.***

2) Ist μ die Richtungsdifferenz von $Y'Y''$ und $X'X''$, so ist

$$\angle IOP = \mu,$$

d. h. ***der Richtungscoefficient des Differentialquotienten giebt durch sein Argument den constanten Richtungsunterschied je zweier entsprechender Halbmesser in zwei entsprechenden Elementarkreisen an.***

Hieraus folgt u. A., dafs $Y = A + BX$ die Verwandtschaft der Aehnlichkeit ist, weil hier $F'(X)$ constant ist. Beschreibt daher X eine beliebige Curve, so beschreibt $A + BX$ eine ihr ähnliche Curve.

§. 6.

Aus dem Vorstehenden folgt, dafs zwei Punkten X'', X''' eines Elementarkreises in X, welche einander diametral gegenüberstehen, zwei eben solche Punkte Y'', Y''' in dem entsprechenden Elementarkreise entsprechen müssen. Geht daher in X ein sich geradlinig bewegender Punkt von X''' über X' nach X'', so bewegt sich der ihm in Y entsprechende Punkt von Y''' über Y' nach Y''. ***Hiervon ist jedoch der Fall ausgenommen, in welchem OP, der Radius vector von*** $F'(X')$, $=0$ ***und mithin*** $F'(X')$ ***selbst*** $=0$ ***ist.*** In diesem Falle ist nämlich der Radius des Elementarkreises in Y gleich Null, oder genauer ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung. Während nämlich die Punkte X'', X''' von X' aus nach entgegengesetzter Richtung hin liegen, liegen dann die Punkte Y'' und Y''' von Y' aus nach einerlei Richtung hin. In der That nämlich ist nach dem ***Taylor***'schen Lehrsatz:

$$Y'' = F(X') + \frac{X''-X'}{1} F'(X') + \frac{(X''-X')^2}{1.2} F''(X') + \cdots$$

$$Y''' = F(X') + \frac{X'''-X'}{1} F'(X') + \frac{(X'''-X')^2}{1.2} F''(X') + \cdots.$$

Ist nun unserer Annahme gemäfs X' der Mittelpunkt von $X''X'''$, so dafs also nach §. 2 $X' = \frac{X''+X'''}{2}$ oder $X''-X' = -(X'''-X')$, und ist $F'(X')$ ***nicht*** $=0$, so ist es erlaubt, schon das zweite Glied der Reihe zu vernachlässigen und man erhält dann durch Addition obiger Gleichungen $Y''+Y''' = 2F(X') = 2Y'$ oder $Y' = \frac{Y''+Y'''}{2}$, d. h. Y' liegt in der Mitte von $Y''Y'''$. ***Ist*** dagegen $F'(X') = 0$, so kommt das zweite Glied der ***Taylor***'schen Reihe mit in Betracht und es ist dann, da $X''-X' = -(X'''-X')$ und eben deshalb $(X''-X')^2 = (X'''-X')^2$ ist,

$$Y'' = Y'''.$$

Sonach mufs der Bewegung des X von X'' über X' nach X''', eine Bewegung des Y von Y'' nach Y' *und dann wieder zurück* nach Y'' entsprechen. Wir erhalten somit folgenden Satz: *Stehen zwei Figuren in der Verwandtschaft $Y=F(X)$, und giebt es einen in endlicher Entfernung liegenden Punkt X', für welchen $F'(X')=0$, so entspricht jeder in X durch X' gehenden geraden Linie eine solche Curve in Y, welche in dem dem X' entsprechenden Punkte $F(X')=Y'$ einen Rückkehrpunkt hat.*

Wir wollen nun jeden Punkt des Systems Y, welcher dem Vorstehenden gemäfs ein Rückkehrpunkt jeder bis zu ihm gehenden Curve ist, einen ***Brennpunkt*** des Systems Y nennen. Es versteht sich von selbst, dafs auch das System X Brennpunkte haben kann, für welche dann die Gleichung $\frac{\partial X}{\partial Y}=0$ gelten mufs. Bei jeder involutorischen isogonalen Verwandtschaft haben offenbar beide Systeme gemeinschaftliche Brennpunkte.

Beispiele. 1) Für die Verwandtschaft $Y=X^2$, welche wir eine parabolische nennen, ist $\frac{\partial Y}{\partial X}=0$, wenn $X=0$. Ist aber $X=0$, so ist auch $Y=0$. Demnach hat das System Y bei der Verwandtschaft $Y=X^2$ *einen* Brennpunkt und dieser ist der Nullpunkt. Alle Curven in Y, welche geraden Linien in X entsprechen, sind nämlich, wie gezeigt werden wird, Parabeln, welche confocal sind und den Nullpunkt zum gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

2) Für die Verwandtschaft der Aehnlichkeit $Y=A+BX$ ist $F'X=B$, also nicht $=0$, sofern nicht $B=0$, welcher Fall aber nicht statthaft ist, da sonst $Y=A$, also constant sein würde. Bei dieser Verwandtschaft giebt es daher keinen Brennpunkt.

3) Für die (involutorische) Verwandtschaft $X^2+Y^2=1$ ist $\frac{\partial Y}{\partial X}=\pm\frac{X}{\sqrt{1-X^2}}$, welcher letztere Ausdruck nur für den endlichen Werth 0 von X gleich Null wird. Für $X=0$ ist aber $Y=\pm 1$. Diese Verwandtschaft hat also zwei Brennpunkte, welche nach I und I' fallen. Je zwei einander nach dieser Verwandtschaft entsprechende Punkte sind, wie wir sehen werden, immer Endpunkte conjugirter Halbdurchmesser einer Ellipse, deren Brennpunkte nach I und I' fallen.

4) Für die Verwandtschaft $Y=\cos\operatorname{am} X$ (mod. k), ist $\frac{\partial Y}{\partial X}=-\sin\operatorname{am} X.\Delta\operatorname{am} X$. Ist nun $\sin\operatorname{am} X=0$, so ist $\cos\operatorname{am} X=\pm 1$; ist da-

gegen $\Delta \operatorname{am} X = 0$, so ist $\cos\operatorname{am} X = \pm\frac{k'i}{k}$. Diese Verwandtschaft hat also die 4 Brennpunkte $+1$, -1, $+\frac{k'i}{k}$, $-\frac{k'i}{k}$, von denen, wenn $k < 1$, nur zwei in der Hauptachse liegen. Ist $k = 0$ und folglich $Y = \cos X$, so bleiben nur noch die Brennpunkte ± 1. Diese letztere Verwandtschaft (welche man die elliptisch-hyperbolische nennen könnte) wird auf den letzten Seiten dieses Aufsatzes näher erörtert werden, der allgemeinere Fall $Y = \cos\operatorname{am} X$ (mod. k) aber besonders zu behandeln sein.

§. 7.

Setzen wir wieder die Verwandtschaft $Y = F(X)$ und nehmen an, dafs sich X in der Hauptachse bewege, also fortwährend reell sei, so wird Y die der Hauptachse entsprechende Curve beschreiben. Wir werden aber den Vorbehalt, dafs X reell bleibe, dadurch ausdrücken, dafs wir x statt X schreiben. Somit ist $F(x)$ überhaupt Ausdruck einer Curve und zwar derjenigen, welche bei der Verwandtschaft $Y = F(X)$ in dem System Y der Hauptachse in X entspricht. Sind nun $P = x$ und $P' = x + \partial x$ zwei einander unendlich nahe Punkte der Hauptachse, und entsprechen denselben die im Allgemeinen einander ebenfalls unendlich nahen Punkte $Q = F(x)$ und $Q' = F(x + \partial x)$, so können offenbar die Linien PP' und QQ' als entsprechende Halbmesser in entsprechenden Elementarkreisen betrachtet werden, und es ergiebt sich demnach aus §. 5, dafs

1) der Radius vector von $F'(x)$ für die Curve $F(x)$ das Verhältnifs der Länge eines beliebigen Curvenelements zu der Länge des ihm entsprechenden Elements der Hauptachse (nach §. 5, 1)),

2) der Richtungscoefficient von $F'(x)$ die Neigung des betreffenden Curvenelements gegen die Hauptachse, also die Tangentialrichtung (nach §. 5, 2)) angiebt.

In Bezug auf 1) bemerken wir, dafs wenn wir den unabhängig sich bewegenden Punkt x sich so in der Hauptachse bewegen lassen, dafs er im Zeitpunkte x auch die durch diese Zahl ausgedrückte Entfernung vom Nullpunkte hat, dafs also seine Geschwindigkeit constant, nämlich $= 1$ ist, und ∂x zugleich als Differenzial der Zeit betrachtet werden kann, — offenbar $F(x + \partial x) - Fx$ oder $\partial x . F'(x)$ das dem Zeitincremente ∂x entsprechende Increment der Curve und folglich $F'(x)$ die Geschwindigkeit in dem betreffenden Punkte der Curve bezeichnet. Wir werden also sagen können:

Ist $Y = F(x)$ Ausdruck einer Curve, so giebt $F'(x)$ durch seinen Radius vector die Gröfse und durch seinen Richtungscoefficienten die Richtung der Geschwindigkeit des sich abhängig bewegenden Punktes an der betreffenden Stelle der Curve an, so fern man annimmt, dafs der unabhängige Punkt x sich in der Hauptachse mit der constanten Geschwindigkeit 1 bewegt.

Hieraus läfst sich aber ableiten, dafs der Brennpunkt des Systems Y bezüglich der Verwandtschaft $Y = F(X)$ zugleich Brennpunkt der Curve $F(x)$ ist. Da nämlich der Differentialquotient $F'(x)$ durch seinen Richtungscoefficienten die Tangentialrichtung angiebt, so ist, wenn wir den von der letzteren mit der Hauptachse gebildeten Winkel durch φ bezeichnen und $F'(X)$ auf die Form $p \pm qi$ bringen, offenbar $\operatorname{tang}\varphi = \pm\frac{q}{p}$. Ist nun $F'(X') = 0$, und folglich auch $p \pm qi = 0$, so ist $\operatorname{tang}\varphi = \pm i$. Dies stimmt aber mit der von ***Plücker*** gegebenen Definition überein, wonach die Brennpunkte diejenigen Punkte in der Ebene einer Curve sind, von denen sich imaginäre Tangenten an die Curve ziehen lassen, welche mit einer beliebigen Geraden Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten den Werth $\pm i$ haben *). Wir sind sonach im Stande, auf die leichteste Weise die Brennpunkte einer gegebenen Curve zu finden. *Ist nämlich $F(x)$ die vorgegebene Curve und sind X', X'', X''' ... die Wurzeln der Gleichung $F'(X) = 0$, so sind $F(X')$, $F(X'')$, $F(X''')$ ... die Brennpunkte der Curve.* Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, dafs X', X'', X''' ... in *endlicher* Entfernung liegende Punkte sind.

Zusatz. Da uns die Untersuchung der Gleichung $\frac{\partial Y}{\partial X} = 0$ zu den Brennpunkten geführt hat **), so entsteht naturgemäfs die Frage nach dem geometrischen Orte derjenigen Punkte in Y und X, für welche der Radius vector von $\frac{\partial Y}{\partial X}$ einen bestimmten constanten Werth p hat, für welche also das Ver-

---

*) Es dürfte nicht ohne Interesse sein, die durch unsern Punktcalcül bedingte Auffassung dieses Gegenstandes mit einem Aufsatze des Herrn Prof. *Kummer* im 35ten Bande dieses Journals zu vergleichen, in welchem derselbe Gegenstand auf dem gewöhnlichen Wege der analytischen Geometrie behandelt worden ist.

**) Auch die Betrachtung des zweiten Differentialquotienten führt zu bemerkenswerthen Eigenschaften der sogenannten Verwandtschaften. Der Raum gestattet mir nicht, folgendes neue allgemeine Gesetz herzuleiten: *Schneiden sich mehrere confocale Curven derselben Art in einem Punkte, so haben die Krümmungskreise jener Curven in diesem Punkte aufser letzterem noch einen Punkt gemein und bilden also ein System von Chordalkreisen.*

hältnifs der entsprechenden Elementarkreise ein und dasselbe ist. Sei daher eine Verwandtschaft durch die Gleichung

$$U = F(X, Y) = 0$$

gegeben, so folgt zunächst aus ihr, dafs

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y}.\frac{\partial Y}{\partial X} = 0.$$

Soll nun der Radius vector von $\frac{\partial Y}{\partial X}$ constant sein, so brauchen wir nur $\frac{\partial Y}{\partial X} = pe^{vi}$ zu setzen, wo p constant und v veränderlich angenommen wird. Es werden daher alle Punkte in X und Y, welche gleichzeitig den Gleichungen

$$\text{(I.)} \qquad U = 0,$$

$$\text{(II.)} \qquad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y}.pe^{vi} = 0$$

entsprechen, die Eigenschaft haben, dafs das Verhältnifs der Halbmesser entsprechender Elementarkreise in diesen Punkten $= p$ ist. Liegen daher diese Punkte in stetigen Curven, wie es in der That der Fall ist, so müssen auch je zwei entsprechende Bogen dieser Curven in dem constanten Verhältnifs p stehen. Man erhält aber offenbar jene Curven, wenn man X und Y aus den Gleichungen (I.) und (II.) entwickelt, wodurch man Ausdrücke von der Form

$$X = \varphi(pe^{vi}),$$
$$Y = \psi(pe^{vi})$$

erhält, in welchen v variabel zu denken ist. Wir erhalten somit folgenden zu einer Menge merkwürdiger Relationen führenden Satz:

Ist U eine complexe Funktion von X und Y, und entwickelt man X und Y aus den Gleichungen

$$U = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y}.pe^{vi} = 0,$$

so dafs man Ausdrücke von der Form

$$X = \varphi(pe^{vi}),$$
$$Y = \psi(pe^{vi})$$

erhält, so sind φ und ψ, wenn man p als constant und v als variabel annimmt, Ausdrücke solcher Curven, deren entsprechende Bogen in dem constanten Verhältnifs $1 : p$ stehen.

Die betreffenden Curven sind im allgemeinen geschlossene Curven, welche in beiden Systemen um die Brennpunkte (für welche $p=0$ und $p=\infty$) herumgehen. Beispiele hierzu können für jetzt noch nicht gegeben werden.

§. 8.

Nach dem vorhin Gesagten stellt, wenn $Y=F(x)$ und $Y'=F(x+\partial x)$ und mithin $\frac{Y'-Y}{\partial x}=F'(x)=P$ gesetzt wird, OP die Gröfse und Richtung der Geschwindigkeit von Y dar. P ist aber selbst ein sich nach dem Gesetze $P=F'(x)$ bewegender Punkt, und wenn dieser am Ende der Zeit $x+\partial x$ sich in P' befindet, so hat man $P'=F'(x+\partial x)$, folglich $\frac{P'-P}{\partial x}=F''(x)$, und es ist, wenn man diesen neuen Punkt $F''(x)=Q$ setzt, OQ die Richtungsgröfse der Geschwindigkeit von P, d. i. der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Gröfse und Richtung der Geschwindigkeit von Y ändert; folglich drückt Q die ***Beschleunigung*** von Y aus. Setzt man dieses Räsonnement fort, so gelangt man ebenso zu dem Resultate, dafs $F'''x$ die Richtungsgröfse der Geschwindigkeit der Beschleunigung $Q=F''(x)$ ausdrückt etc. Wir können dies (vergl. in dieser Beziehung den Aufsatz von ***Möbius*** im 36[sten] Bande dieses Journals: „über die phoronomische Deutung des ***Taylor***schen Theorems) so ausdrücken: Ist $F(x)$ der Ausdruck für die Bewegung eines sich in der Ebene bewegenden Punktes Y, so ist $F'(x)$ die Gröfse und Richtung der ersten Geschwindigkeit, $F''(x)$ die Gröfse und Richtung der zweiten Geschwindigkeit etc., $F^N(x)$ die Gröfse und Richtung der n^{ten} Geschwindigkeit des Punktes Y.

Entwickelt man daher den Ausdruck $F(x'+x)$ nach dem ***Taylor***schen Lehrsatz in eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe und bricht man diese Reihe mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab, so erhält man den Ausdruck derjenigen Bewegung, welche der Punkt Y annimmt, wenn am Ende der Zeit x' die n^{te} Geschwindigkeit auf einmal constant wird. Ist $n=2$, so erhält man auf diese Weise $F(x')+x.F'(x')$ als Ausdruck einer gleichförmigen Bewegung in der im Punkte $F(x')$ an die Curve gelegten Tangente.

§. 9.

Sowohl zum besseren Verständnifs des Vorhergehenden, als auch weil es der Gang der Untersuchung erfordert, wollen wir jetzt einige der einfachsten Funktionen discutiren. Wir bemerken aber vorher, dafs ein und dieselbe Curve auf verschiedenartige Weise ausgedrückt werden kann. Ist nämlich

$f(x)$ eine beliebige reelle Funktion, so sind offenbar $F(x)$ und $F(f(x))$ zwei Ausdrücke einer und derselben Curve. Denn setzen wir $f(x) = z$, und folglich $F(f(x)) = F(z)$, so beschreibt der unabhängige Punkt z in $F(z)$ dieselbe Linie wie der unabhängige Punkt x in $F(x)$. Demnach mufs auch der durch die Funktion F ausgedrückte abhängige Punkt in beiden Fällen ein und dieselbe Curve beschreiben. Diese Bemerkung ist aber für die Curven sehr wichtig, weil aus ihr hervorgeht, dafs man ein und dieselbe Curve als zu den verschiedenartigsten isogonalen Verwandtschaften gehörig auffassen kann. Es ist nämlich $F(x)$ Ausdruck derjenigen Curve, welche bei der Verwandtschaft $Y = F(X)$ für das System Y der Hauptachse in X entspricht. Dagegen ist $F(f(x))$ Ausdruck derjenigen Curve, welche bei der Verwandtschaft $Y = F(f(X))$, wo also $f(X)$ nicht mehr reell zu sein braucht, bezüglich Y der Hauptachse in X entspricht. Je nachdem also die Curve als zu der einen, oder der andern Verwandtschaft gehörig betrachtet wird, werden sich verschiedene Eigenschaften derselben offenbaren. So ist z. B. e^{xi} Ausdruck des mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises. Er entspricht also bei der Verwandtschaft $Y = e^{Xi}$ in Y der Hauptachse in X, oder auch, wenn man will, bei der Verwandtschaft der Identität $Y = X$ dem mit der Längeneinheit als Halbmesser um den Nullpunkt beschriebenen Kreise. Setzt man nun in

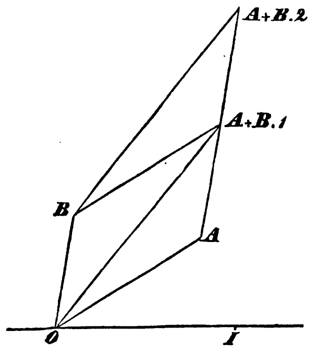
$$e^{xi} = \cos x + i \sin x = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2} + 2i \operatorname{tang} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2}}$$

einfach x statt $\operatorname{tang} \frac{x}{2}$, so erhält man $\frac{1 - x^2 + 2xi}{1 + x^2}$ oder $\frac{1 - xi}{1 + xi}$ als Ausdruck desselben Kreises. Demnach ist der mit OI um O beschriebene Kreis zugleich derjenige, welcher bei der Kreisverwandtschaft $Y = \frac{1 - Xi}{1 + Xi}$ bezüglich Y der Hauptachse in X entspricht.

Läfst man übrigens x zugleich die Zeit bedeuten, so entspricht der Transformation $F(x)$ in $F(f(x))$, oder auch der Transformation $F(f(x))$ in $F(\varphi(x))$, wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ reelle Funktionen sind, offenbar eine Veränderung der Geschwindigkeit des die Curve beschreibenden Punktes.

§. 10.

Aufgabe. Gegeben sei eine algebraische rationale ganze Funktion vom 1sten Grade $A + Bx$ (wo A und B beliebige feste Punkte der Ebene sind); man soll die durch diese Funktion dargestellte Bewegung ermitteln.



Auflösung. Man setze $A+Bx=Y$, so ist $\frac{\partial Y}{\partial x}=B$; also ist die Geschwindigkeit von Y nach Gröfse und Richtung constant und wird durch OB vorgestellt. Da nun aufserdem Y in A ist, wenn x in O, so bewegt sich der Punkt Y in der Parallelen, welche durch A mit OB gezogen werden kann, und zwar ist der am Ende der Zeit x durchlaufene Weg $=OB.x$.

Zusatz 1. Da mittelst der Form $A+Bx$ alle in der Ebene liegenden geraden Linien ausgedrückt werden können, so ist, wenn F eine beliebige Funktion bedeutet, $F(A+Bx)$ der allgemeine Ausdruck aller derjenigen Curven, welche bei der Verwandtschaft $Y=F(X)$ in dem System Y geraden Linien in X entsprechen.

Da man nun die Brennpunkte der Curve $F(A+Bx)$ findet, wenn man die Wurzeln der Gleichung $\frac{\partial F(A+BX)}{\partial X}=0$ in $F(A+Bx)$ für x einsetzt und da man offenbar dieselben Punkte erhält, wenn man die Wurzeln der Gleichung $\frac{\partial F(X)}{\partial X}=0$ in $F(X)$ einsetzt, weil $\frac{\partial F(A+Bx)}{\partial (A+Bx)}.B=\frac{\partial F(A+Bx)}{\partial x}$ ist, so müssen die Brennpunkte des Systems Y bezüglich der Verwandtschaft $Y=F(X)$ identisch sein mit den Brennpunkten der Curve $F(A+Bx)$. Wir erhalten somit den Satz:

Stehen zwei Figuren in der isogonalen Verwandtschaft $Y=F(X)$, so sind alle Curven der einen Figur, welche geraden Linien der andern Figur entsprechen, confocal und zwar haben sie die zu dieser Verwandtschaft gehörigen Brennpunkte zu ihren Brennpunkten,
wobei zugleich daran erinnert werden kann, dafs auch die Winkel, unter denen sich die confocalen Curven schneiden, gleich sein müssen den Winkeln, unter welchen sich die entsprechenden Geraden schneiden.

Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, dafs sich das vorstehende Räsonnement auf *alle* in X gezogenen Curven ausdehnen läfst; so dafs wir zu dem scheinbaren Paradoxon gelangen: *Alle Curven in Y, welche beliebigen Curven in X nach der Verwandtschaft $Y=F(X)$ entsprechen, sind confocal.*

Zusatz 2. Ist $f(x)$ eine beliebige reelle Funktion, so ist (nach §. 9) auch $A+B.f(x)$ Ausdruck einer geradlinigen Bewegung und zwar ist der am Ende der Zeit x durchlaufene Weg gleich $OB.f(x)$.

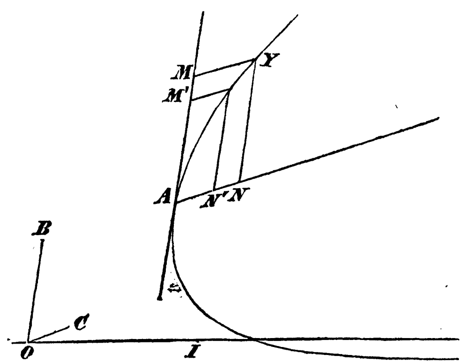
§. 11.

Aufgabe. Es soll die durch die Funktion $A+Bx+Cx^2$ ausgedrückte Bewegung ermittelt werden.

Auflösung. Man setze $A+Bx=M$, $A+Cx^2=N$, aufserdem aber $A+B.1=M'$, $A+C.1^2=N'$, so ist

1) M ein in der Geraden AM' begriffener und in ihr sich bewegender Punkt, so dafs $AM'.x=AM$ (nach §. 10).

2) N ein in der Geraden AN' sich bewegender Punkt, so dafs $AN'.x^2=AN$ (nach §. 10, Zusatz 2).



Zieht man nun MY und NY so, dafs $AMYN$ ein Parallelogramm ist, so ist $Y=M+(N-A)=A+Bx+Cx^2$, also Y der Punkt, dessen Bewegung zu bestimmen ist.

Da aber $AMYN$ ein Parallelogramm ist, so wird AN als Abscisse und AM als Ordinate des Punktes Y in demjenigen Coordinatensystem zu betrachten sein, dessen Abscissenachse AN' und dessen Ordinatenachse AM' ist. Es folgt nun aber aus 1) und 2), dafs

$$\frac{AM'^2}{AN'}=\frac{AM^2}{AN}.$$

Da nun $\frac{AM'^2}{AN'}$ constant ist, so ist auch $\frac{AM^2}{AN}$ constant. Demnach ist die Bewegung von Y so beschaffen, dafs das Quadrat der Ordinate des Punktes Y der Abscisse proportional ist. Die von Y durchlaufene Bahn ist daher eine Parabel. Diese Parabel mufs durch A gehen, weil Y in A, wenn x in O ist; und es mufs AN' ein Durchmesser, AM' aber eine Tangente derselben sein.

Setzen wir nun den zu dem Durchmesser AN' gehörigen Parameter $=p$, so ist offenbar $p=\frac{AM'^2}{AN'}$. Nun ist aber, da $M'=A+B$, $AM'=OB$; ferner, da $N'=A+C$, $AN'=OC$. Folglich ist $p=\frac{OB^2}{OC}$. Die Parabel ist mithin vollständig bestimmt.

Zusatz. Die phoronomische Bedeutung der Constanten A, B, C ist nach §. 8 folgende: A ist der Ausgangspunkt der Bewegung, OB die Geschwindigkeit im Ausgangspunkte, $2OC$ die Beschleunigung im Ausgangspunkte, bei-des nach Gröfse und Richtung. Will man den Ausgangspunkt verlegen, so braucht man nur $x' + x$ für x zu setzen und erhält so den Ausdruck

$$A + B(x' + x) + C(x' + x)^2 = A' + B'x + Cx^2,$$

wo alsdann

$A' = A + Bx' + Cx'^2$ der neue Ausgangspunkt,

$B' = B + 2Cx'$ die Geschwindigkeit in diesem Punkte,

$C = C$ die Beschleunigung im neuen Ausgangspunkte

ist. Man ersieht hieraus, dafs die Beschleunigung in allen Punkten der Parabel dieselbe ist, wodurch das Bewegungsgesetz als mit der Wurfbewegung zusammenfallend hinlänglich charakterisirt ist. Für die Tangente in einem beliebigen, etwa dem Werthe x' der Variabeln entsprechenden Punkte erhalten wir (s. §. 8 am Schlufs) den Ausdruck

$$A + Bx' + Cx'^2 + (B + 2Cx')x.$$

§. 12.

Um einige Anwendungen des Vorstehenden zu zeigen, bemerken wir nur so viel:

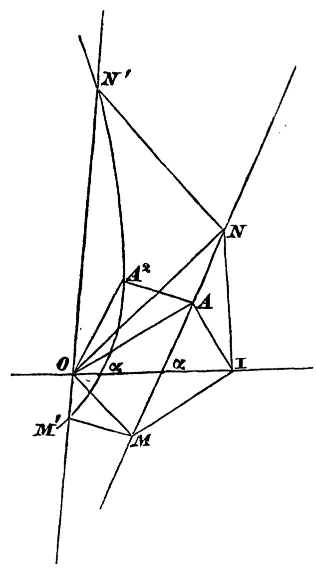
Man kann die Parabel $A + Bx + Cx^2$ zunächst bezüglich der Verwandtschaft $Y = A + BX + CX^2$ als diejenige Curve betrachten, welche im System Y der Hauptachse in X entspricht. Ist nun $P + Qx$ eine beliebige Gerade im System X und also $Y_1 = A + B(P + Qx) + C(P + Qx)^2$ die ihr im System Y entsprechende Curve, so mufs Y_1 offenbar selbst wieder eine Parabel sein, da der Ausdruck für Y_1 wieder vom zweiten Grade ist. Wir gelangen somit bei Berücksichtigung von §. 10, Zusatz, zu dem Resultate:

Stehen zwei Figuren X und Y in der Verwandtschaft $Y = A + BX + CX^2$, so entsprechen alle Geraden in X nur Parabeln in Y; die letzteren sind daher sämmtlich confocal und ihre Durchschnittswinkel sind gleich den Durchschnittswinkeln der Geraden, welchen sie entsprechen.

Um den Brennpunkt der Verwandtschaft, also auch den von $A + Bx + Cx^2$ zu ermitteln, setzen wir den der Gleichung $F'(X) = B + 2CX = 0$ entsprechenden Werth, also $-\frac{B}{2C}$ in $A + BX + CX^2$ für X ein und erhalten somit $\frac{4AC - B^2}{4C}$ als *Ausdruck des Brennpunkts.* Letzterer fällt in den Nullpunkt, wenn $4AC = B^2$, d. h. wenn $A + Bx + Cx^2$ ein vollständiges Quadrat ist. Wir entnehmen hieraus, dafs $(A + Bx)^2$ Ausdruck einer Parabel ist, deren Brennpunkt in den Nullpunkt fällt, und welche zugleich die Parabel x^2, die mit der Hauptachse zusammenfällt, unter demselben Winkel schneiden mufs, unter welchem die Gerade $A+Bx$ die Hauptachse x schneidet, weil die parabolischen Bewegungen $(A+Bx)^2$ und x^2 als solche betrachtet werden können, welche bei der isogonalen Verwandtschaft $Y=X^2$ in Y den Bewegungen $A+Bx$ und x in X entsprechen. Hieraus lassen sich mit Leichtigkeit die Eigenschaften der Brennpunkte der Parabel herleiten. Um nur Einiges hierüber zu zeigen, bemerken wir:

1) Es ist $(A+Bx)^2$ das Quadrat der Geraden $A+Bx$. Hieraus folgt der Satz:

Denkt man sich zwei Ecken O und I eines Dreiecks fest und läfst die dritte Ecke A sich auf einer beliebigen Geraden AM bewegen, denkt man sich ferner während der Bewegung fortwährend über OA ein Dreieck OAA^2, welches mit OIA ähnlich und gleichstimmig ist, so wird die Ecke A^2 des letzteren Dreiecks eine Parabel beschreiben, deren Brennpunkt O ist und welche OI unter demselben Winkel schneidet als die Gerade AM (und zwar in beiden Durchschnittspunkten).



2) Denkt man sich zwei confokale Parabeln $(A+Bx)^2$ und $(C+Dx)^2$, so ersieht man aus den entwickelten Ausdrücken $A^2+2ABx+B^2x^2$ und $C^2+2CDx+D^2x^2$, dafs B^2 und D^2 die Beschleunigungen und folglich B^2OI und D^2OI die respectiven Winkel sind (s. §. 11, Zusatz), welche die Achsen der Parabeln mit der Hauptachse bilden. Folglich ist B^2OD^2 gleich dem Winkel, den die beiden Achsen selbst unter einander bilden. Andrerseits bilden aber die Geraden $A+Bx$ und $C+Dx$ selbst einen Winkel, welcher gleich BOD ist; folglich schneiden sich die Parabeln, da sie jenen Geraden gemäfs der isogonalen Verwandtschaft $Y=X^2$ entsprechen, ebenfalls unter dem Winkel BOD. Nun ist aber offenbar $B^2OD^2=B^2OI-D^2OI=2BOI-2DOI=2BOD$. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Sind zwei Parabeln confocal, so ist der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, halb so grofs, als der Winkel, unter welchem sich ihre Achsen schneiden.

3) Denkt man sich (s. die letzte Figur) zwei durch O gehende, die Gerade $A+Bx$ in den Punkten M und N schneidende Gerade, welche sich um O so drehen, dafs sie fortwährend auf einander senkrecht stehen, so ist bekanntlich $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ während der Drehung constant. Sind nun M' und N' die den Punkten M und N respective entsprechenden Punkte der Parabel $(A+Bx)^2$, und folglich $M'=M^2$ und $N'=N^2$, so folgt aus letzteren Gleichungen, dafs einestheils $OM'=OM^2$ und $ON'=ON^2$, anderntheils der Winkel $M'ON'$ doppelt so grofs als der Winkel MON, also gleich $2R$ ist. Da nun $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ constant ist, so mufs auch $\frac{1}{OM'}+\frac{1}{ON'}$ constant sein. Hieraus folgt der Satz:

Dreht sich eine durch den Brennpunkt O einer Parabel gehende und die Parabel in M' und N' schneidende Gerade um den Brennpunkt, so ist während der Drehung $\frac{1}{OM'}+\frac{1}{ON'}$ ***constant, nämlich*** $=\frac{1}{OQ}$, ***wenn Q der Scheitel der Parabel ist.***

4) Setzt man $A^2=A'$, $2AB=B'$, $B^2=C'$ in dem Ausdruck $(A+Bx)^2$, so ist $B'^2=4A'C'$ oder

$$\frac{B'}{4C'}=\frac{A'}{B'}.$$

In dieser Gleichung liegen aber die beiden metrischen Bestimmungen $\frac{OB'}{4OC'}=\frac{OA'}{OB'}$ und $\angle B'OI-\angle C'OI=\angle A'OI-\angle B'OI$, oder $B'OC'=A'OB'$. Aus der ersteren folgt: ***das Quadrat der Geschwindigkeit des die Parabel beschreibenden Punktes ist gleich dem doppelten Produkte aus der constanten Beschleunigung in den Radius vector des betreffenden Punktes.*** Aus der letzteren: ***Jede Tangente der Parabel bildet mit dem nach ihrem Berührungspunkt gehenden Radius vector und mit dem Durchmesser gleiche Winkel.***

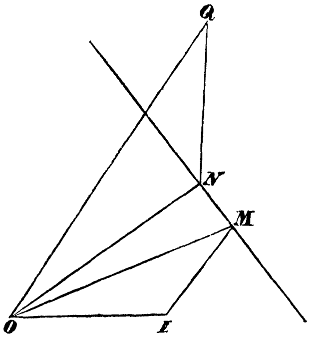
5) Für die Tangente der Parabel $(A+Bx)^2$ in dem dem Werthe x' der Variabeln entsprechenden Punkte erhalten wir den Ausdruck

$$F(x')+xF'(x')=(A+Bx')^2+2B(A+Bx')x.$$

Für letzteren Ausdruck kann man aber auch schreiben $(A+Bx')(A+B(x'+2x))$ oder, wenn man x für $x'+2x$ setzt (also die Geschwindigkeit für die Tangente ändert)

$$(A+Bx')(A+Bx).$$

Aus der Produktform dieses Ausdrucks, welcher für die verschiedenen Werthe von x' alle möglichen Tangenten der Parabel giebt, folgern wir den Satz:



Hat man zwei feste Punkte O und 1 und eine feste Gerade MN, denkt man sich ferner in letzterer einen festen Punkt M und einen sich in derselben bewegenden Punkt N, und über ON ein Dreieck ONQ construirt, welches dem festen Dreieck O1M ähnlich und gleichstimmig ist, so wird Q eine gerade Linie beschreiben, welche immer Tangente einer und derselben Parabel ist, wo man auch den festen Punkt M in der Geraden annehmen mag. Der Brennpunkt dieser Parabel aber ist in O.

6) Nimmt man in der Tangente $(A+Bx')(A+Bx)$ einen bestimmten Punkt an $(A+Bx')(A+Bx'')$, so liegt derselbe sowohl in $(A+Bx')(A+Bx)$ als auch in $(A+Bx'')(A+Bx)$, ist also der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten der Parabel, welche ihre Berührungspunkte in $(A+Bx')^2$ und $(A+Bx'')^2$ haben. Aus dieser Bemerkung lassen sich aber mit Leichtigkeit eine grofse Anzahl von Eigenschaften der Parabel herleiten. Setzen wir z. B. $x'=0$, so erhalten wir $A(A+Bx'')$ als Durchschnittspunkt derjenigen Tangenten, welche ihre Berührungspunkte respective in A^2 und $(A+Bx'')^2$ haben. Bezeichnen wir daher jenen Durchschnittspunkt durch P, jene Berührungspunkte respective durch P' und P'', so dafs also $P=A(A+Bx'')$, $P'=A^2$, $P''=(A+Bx'')^2$, so ist

$$P^2 = P'.P''.$$

Diese Gleichung giebt folgende zwei metrische Bestimmungen

$$(1.)\quad OP^2 = OP'.OP'',$$

d. h. *das Quadrat der Entfernung eines aufserhalb der Parabel liegenden Punktes von dem Brennpunkte ist gleich dem Produkte aus den Radien vectoren, welche sich nach den Berührungspunkten der von jenem Punkte ausgehenden Tangenten ziehen lassen.*

$$(2.)\quad 2PO1 = P'O1+P''O1$$

oder

$$POP' = POP'',$$

d. h. je zwei Tangenten einer Parabel werden vom Brennpunkte aus unter gleichen Winkeln gesehen; u. s. w.

§. 13.

Aufgabe. Es soll die durch die Funktion $\frac{A+Bx}{Q+Px}$ ausgedrückte Bewegung ermittelt werden.

Auflösung. Zunächst läfst sich die gegebene Funktion stets durch Division mit Q auf die Form $\frac{A+Bx}{1+Px}$, letztere aber durch Substitution von BP für B auf die Form $\frac{A+BPx}{1+Px}$ bringen. Wir wollen uns daher nur mit der letztgenannten Form beschäftigen.

Setzen wir nun $Y=\frac{A+BPx}{1+Px}$, so ist Y in A, wenn $x=0$, ferner Y in B, wenn $x=\infty$. Demnach mufs die fragliche Curve durch A und B gehen.

Aus der Gleichung $Y=\frac{A+BPx}{1+Px}$ folgt aber ferner die folgende

$$Px = \frac{A-Y}{Y-B},$$

welche die beiden metrischen Bestimmungen

$$(1.)\qquad x.OP = \frac{AY}{YB},$$

$$(2.)\qquad \angle IOP = 2R - AYB$$

involvirt, und zwar nach §. 2, wenn man sich dort Px für X gesetzt denkt.

Da nun $\angle IOP$ constant ist, so mufs nach (2.) auch AYB constant sein. Der Punkt $Y=\frac{A+BPx}{1+Px}$ mufs daher für ein veränderliches x sich so in der Ebene bewegen, dafs der Winkel AYB immer dieselbe Gröfse behält. ***Die fragliche Curve ist somit ein Kreis*** und zwar derjenige Kreis, in welchem AB Sehne und der zu dieser Sehne gehörige Peripheriewinkel AYB gleich dem Supplementwinkel von IOP ist. Auch folgt aus 1), dafs am Ende der Zeit x $\frac{AY}{YB}=OP.x$ ist. Die Bewegung des Punktes Y geht für ein von 0 bis x wachsendes x von A nach B und zwar auf dem einen der beiden zwischen A und B liegenden Kreisbogen für ein positives, auf dem andern für ein negatives x. Ist unserer bisherigen Annahme entsprechend OI von links nach rechts gerichtet und J über der Hauptachse, wird also die Drehungsrichtung ( ) als positiv genommen, so ist die Kreisbewegung

$\frac{A+BPx}{1+Px}$ für ein positives zunehmendes x ( ), also negativ, wenn IOP kleiner als $2R$, positiv, wenn IOP gröfser als $2R$. Ob zwei Kreisbewegungen $\frac{A+BPx}{1+Px}$ und $\frac{A'+B'P'x}{1+P'x}$ einstimmig oder entgegengesetzt sind, läfst sich hiernach leicht beurtheilen.

Ist $IOP=0$ oder $=2R$, so ist der Peripheriewinkel AYB im ersteren Falle $=2R$, im anderen Falle $=0$. In beiden Fällen erhält man eine gerade Linie und zwar ist $OP.x$ gleich dem Schnittverhältnifs $\frac{AY}{YB}$. *Sonach ist allgemein, wenn p eine reelle Zahl ist, $\frac{A+Bpx}{1+px}$ Ausdruck einer geraden Linie, in welchem px das Schnittverhältnifs angiebt, nach welchem die Strecke AB durch den die Linie beschreibenden Punkt Y getheilt wird.* So lange px positiv ist, befindet sich Y zwischen A und B, so lange px negativ ist, in der Verlängerung von AB. Für den Mittelpunkt von AB hat man $px=1$ und für den unendlich entfernten Punkt $px=-1$ zu setzen. Die Punktpaare $\frac{A+Bpx}{1+px}$ und $\frac{A-Bpx}{1-px}$ bilden eine Involution, deren Hauptpunkte A und B sind, etc. Wie man sieht, stimmt dies mit dem barycentrischen Calcül überein.

§. 14.

Betrachten wir den Kreis $\frac{A+BPx}{1+Px}$ in seiner Beziehung zu der isogonalen Verwandtschaft $Y=\frac{A+BPX}{1+PX}$, nach welcher er diejenige Curve ist, welche im System Y der Hauptachse in X entspricht. Lassen wir den unabhängigen Punkt X sich, anstatt in der Hauptachse, selbst in einem Kreise $\frac{A'+B'P'x}{1+P'x}$ bewegen, setzen wir also letzteren Ausdruck für x in $\frac{A+BPx}{1+Px}$ ein, so erhalten wir

$$Y=\frac{A+BPA'+(A+BB'P)P'x}{1+PA'+(1+B'P)P'x},$$

also *ebenfalls eine Kreisbewegung,* welche durch die Punkte $\frac{A+BPA'}{1+PA'}$ und $\frac{A+BPB'}{1+PB'}$ geht. Findet also zwischen zwei Figuren die isogonale Verwandtschaft $Y=\frac{A+BPX}{1+PX}$ Statt, *so entspricht jedem Kreise in Y ein Kreis in X, und* (wie sich durch Umkehrung der Gleichung $Y=\frac{A+BPX}{1+PX}$ leicht zeigen läfst) *jedem Kreise in X ein Kreis in Y.* (Vergl. *Möbius* Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung, Leipzig 1855.)

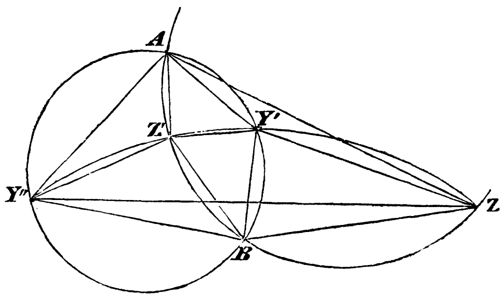
Brennpunkte hat diese Verwandtschaft nicht. Denn setzen wir $F'(X) = \frac{(B-A)P}{(1+PX)^2} = 0$, so genügt dieser Gleichung nur ein unendlich grofser Werth von X*). Da uns ein tieferes Eingehen auf diese Verwandtschaft hier nicht gestattet ist, so erlauben wir uns wenigstens die nachstehenden Bemerkungen, da sie weiterhin von Belang sind.

Betrachten wir die Verwandtschaft $Y = \frac{A+BX}{1+X}$, nach welcher umgekehrt $X = \frac{A-Y}{Y-B}$, so liegen in letzterer Gleichung die metrischen Bestimmungen $OX = \frac{AY}{YB}$ und $\angle IOX = 2R - \angle AYB$. Bewegt sich daher X in einer beliebigen durch O gehenden Geraden, so dafs also IOX constant bleibt, so mufs sich Y so bewegen, dafs $\angle AYB$ constant bleibt, also in einem durch A und B gehenden Kreise, was mit dem eben Gesagten übereinstimmt. Einem System von Geraden in X, welche sämmtlich durch O gehen, entspricht daher ein System von Chordalkreisen, welche AB zur Chordale haben. Lassen wir anderentheils X sich in einem um O beschriebenen Kreise bewegen, so dafs also OX constant ist, so mufs Y sich so bewegen, dafs $\frac{AY}{YB}$ constant bleibt. Die der letzteren Bewegung entsprechende Curve mufs aber ein Kreis sein, weil sie für Y einem in X um O beschriebenen Kreise entspricht. Auch mufs, da der um O beschriebene Kreis auf allen durch O gehenden Geraden senkrecht steht, der entsprechende Kreis in Y auf allen Chordalkreisen, welche AB zur Chordale haben, senkrecht stehen. Wir gelangen somit in leichtester Weise zu den Eigenschaften der Orthogonalkreise. Ich will aber hier noch gelegentlich einen leicht abzuleitenden Satz erwähnen, da er wenig oder gar nicht bekannt zu sein scheint.

Denkt man sich in X einen nicht durch O gehenden festen Kreis und eine sich um O drehende Gerade, welche den Kreis in X' und X'' schneidet, so ist bekanntlich $OX'.OX''$ während der Drehung constant. Dieser Figur in X entspricht aber in Y ein nicht durch A gehender (da A in Y dem O

*) Hieraus folgt aber noch nicht, dafs die den geraden Linien in X entsprechenden Kreise in Y keine Brennpunkte haben. Vielmehr kann ein solcher Kreis Brennpunkte zeigen und zeigt sie, wenn man ihn als Glied einer andern isogonalen Verwandtschaft darstellt. Letzteres geschieht durch Transformation des betreffenden Ausdrucks (nach §. 9).

in X entspricht) fester und ein sich fortwährend ändernder Kreis, welcher aber stets durch A und B geht und jenen festen Kreis in Y' und Y'' schneidet. In Folge der Gleichungen $OX' = \frac{AY'}{Y'B}$ und $OX'' = \frac{AY''}{Y''B}$ mufs nun auch das Produkt $\frac{AY'}{Y'B} \cdot \frac{AY''}{Y''B}$ constant sein. Wir können diesen Satz so ausdrücken:



Sind A, B, Y', Y'', Z', Z'' die sechs Durchschnittspunkte dreier Kreise (s. nebenstehende Figur), ***so findet die Gleichung***

$$\frac{AY'.AY''}{Y'B.Y''B} = \frac{AZ'.AZ''}{Z'B.Z''B},$$

und folglich auch ebenso die Gleichungen $\frac{Y'Z'.Y'Z''}{Z'Y''.Z''Y''} = \frac{Y'A.Y'B}{AY''.BY''}$ ***und*** $\frac{Z'Y'.Z'Y''}{Y'Z''.Y''Z''} = \frac{Z'A.Z'B}{AZ''.BZ''}$ ***Statt.***

Die Anwendungen, welche dieser Satz gestattet, können wir hier nicht anführen.

Schliefslich wollen wir noch auf die involutorische Kreisverwandtschaft hinweisen, deren einfachster Ausdruck $XY = 1$ ist. Da hier X die reciproke Zahl zu Y ist, so werden wir Curven, welche sich nach dieser Verwandtschaft entsprechen, reciproke Curven nennen.

§. 15.

Aufgabe. Die durch $\frac{A + Bpe^{xi}}{1 + pe^{xi}}$ ausgedrückte Bewegung zu ermitteln.

Auflösung. Setzen wir $Y = \frac{A + BX}{1 + X}$ und $X = pe^{xi}$, so dafs also Y sich in der zu ermittelnden Curve bewegt, so mufs in Folge der Gleichungen $p = OX = \frac{AY}{YB}$ und $x = IOX = 2R - AYB$, da p constant ist, Y sich so bewegen, dafs das Verhältnifs $\frac{AY}{YB}$ constant ist. Mit Bezugnahme auf das im vorigen §. Gesagte mufs daher Y einen der Orthogonalkreise zu dem System der durch A und B gehenden Chordalkreise beschreiben und zwar denjenigen Orthogonalkreis, für welchen das Verhältnifs $\frac{AY}{YB}$ den constanten Werth p hat. Auch ist am Ende der Zeit x $\angle AYB = 2R - x$.

Die Durchschnittspunkte dieses Kreises mit AB entsprechen den Werthen 0 und π, sind daher $\frac{A \pm Bp}{1 \pm p}$, also harmonische Punkte zu A und B. Ist p und also auch das Verhältnifs $\frac{AY}{YB} = 1$, so beschreibt Y eine Gerade, welche auf AB im Mittelpunkte normal steht.

Die Richtung der Kreisbewegung $\frac{A + Bpe^{xi}}{1 + pe^{xi}}$ ist positiv oder negativ, je nachdem $p < 1$ oder > 1. Hiernach läfst sich leicht beurtheilen, ob zwei unter dieser Form gegebene Kreisbewegungen einstimmig oder entgegengesetzt sind.

Die Punkte A und B sind conjugirte Pole des Kreises $\frac{A + Bpe^{xi}}{1 + pe^{xi}}$. Ist nun $p = 0$ und $B = \infty$, aber so, dafs Bp einen endlichen Werth B hat, so erhält man $Y = A + Be^{xi}$. Hier ist A Mittelpunkt und OB Halbmesser. Fällt also der eine von zwei conjugirten Polen eines Kreises in's Unendliche, so ist der andere im Mittelpunkt.

Anmerkung. Der Gegensatz zwischen den beiden Formen für die geradlinige Bewegung $\frac{A + Bpx}{1 + px}$ und $\frac{A + Be^{xi}}{1 + e^{xi}}$ ist sehr bemerkenswerth. Wir können diese Ausdrücke noch übereinstimmender machen, wenn wir $\frac{A + Be^{\mu + x}}{1 + e^{\mu + x}}$ und $\frac{A + Be^{(\mu + x)i}}{1 + e^{(\mu + x)i}}$ schreiben. In dem ersteren bedeutet $\mu + x$ den Logarithmus eines Schnittverhältnisses, in dem zweiten einen Winkel.

§. 16.

Aufgabe. Es soll die durch $\cos(x + \alpha i)$ ausgedrückte Bewegung ermittelt werden.

Auflösung. Es ist zunächst

$$\text{(I.)} \qquad Y = \cos(x + \alpha i) = \tfrac{1}{2}(e^{xi - \alpha} + e^{\alpha - xi}).$$

Bringt man diesen Ausdruck auf die Form $p + qi$, so erhält man

$$Y = a \cos x + ib \sin x,$$

wo $a = \frac{1}{2}(e^{-\alpha} + e^{\alpha})$ und $b = \frac{1}{2}(e^{-\alpha} - e^{\alpha})$.

Hieraus folgt aber, dafs, wenn η und ξ die respectiven Abstände des Punktes Y von der Hauptachse und der zu ihr durch O gezogenen Normalen sind, $\xi = a \cos x$ und $\eta = b \sin x$ ist. Da nun aber $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, so ist auch $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$, folglich bewegt sich Y in einer *Ellipse*, welche ihren Mittelpunkt im Nullpunkt hat und deren grofse Achse in die Hauptachse der Ebene fällt. Die grofse Achse ist $2a = e^{-\alpha} + e^{\alpha}$, die kleine Achse $2b = e^{-\alpha} - e^{\alpha}$.

Um die Brennpunkte zu erhalten, brauchen wir nur

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\sin(x + \alpha i) = 0$$

zu setzen. Aus letzterer Gleichung folgt aber $\cos(x + \alpha i) = \pm 1$. Die Brennpunkte fallen somit in I und I'.

Um das Bewegungsgesetz zu ermitteln, bemerken wir, dafs in Folge der Gleichung (I.) Y die Mitte der Verbindungslinie der beiden reciproken Punkte $e^{xi-\alpha}$ und $e^{\alpha-xi}$ ist. Durch letztere Punkte werden aber, wenn x sich ändert, Kreise beschrieben, welche respective Halbmesser von der Länge $e^{-\alpha}$ und e^{α} haben; und zwar geschehen beide Kreisbewegungen nach entgegengesetzter Richtung und mit der Winkelgeschwindigkeit 1. Wir haben uns also vorzustellen, dafs die vom Nullpunkt ausgehenden Halbmesser $r = e^{-\alpha}$ und $\varrho = e^{\alpha}$ (im Anfange der Bewegung) auf einander liegen und sich sodann um O nach entgegengesetzter Richtung mit gleicher Winkelgeschwindigkeit drehen. Alsdann beschreibt die Mitte der Verbindungslinie der Endpunkte dieser Halbmesser die Ellipse $\cos(x + \alpha i)$.

Die Bewegung $\cos(x + \alpha i)$ ist einstimmig mit der des Endpunkts des gröfseren Kreishalbmessers, also einstimmig mit $e^{\alpha-xi}$, wenn α positiv ist. Den einem bestimmten Bogen der Ellipse entsprechenden Drehungswinkel der beiden Kreishalbmesser, also die diesem Bogen entsprechende Zunahme von x wollen wir die Amplitude des Bogens nennen.

§. 17.

Versucht man es aus obigen Ausdruck Eigenschaften der Ellipse zu entwickeln, so ereignet sich das Merkwürdige, dafs jede der bekannten goniometrischen Formeln, wie z. B. $\cos^2\mu + \sin^2\mu = 1$, sofern blofs cosinus und sinus in derselben vorkommen, so gedeutet werden kann, dafs sie eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Ellipse giebt. Folgende Beispiele werden dies klar machen.

1) Es ist

$$\frac{\partial \cos(x + \alpha i)}{\partial x} = -\sin(x + \alpha i) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \alpha i\right).$$

Nun ist aber, wenn wir $\cos(x + \alpha i) = P$ setzen, $\frac{\partial \cos(x + \alpha i)}{\partial x}$ die Richtungsgröfse der Geschwindigkeit im Punkte P der Ellipse. Anderntheils ist, wenn wir $Q = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \alpha i\right)$ setzen, Q ein so in der Ellipse liegender Punkt, dafs die Amplitude des Ellipsenbogens $PQ = \frac{\pi}{2}$ ist. In obiger Gleichung liegen nun aber folgende beide metrische Bestimmungen:

a) die Richtung von OQ kommt mit der Geschwindigkeits-, d. i. Tangentialrichtung in P überein; OQ und OP sind daher conjugirte Halbdurchmesser. Wir können dies so aussprechen: ***Wird ein Ellipsenbogen durch die Endpunkte zweier conjugirten Halbdurchmesser begränzt, so ist die Amplitude dieses Bogens gleich $\frac{\pi}{2}$.***

b) Die Länge von OQ ist gleich der Geschwindigkeit in P. Also: ***Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte ist gleich dem Halbdurchmesser, welcher dem nach dem ersteren Punkte gehenden Halbdurchmesser conjugirt ist.***

Zusatz. Es sind $\cos(x + \alpha i)$ und $\sin(x + \alpha i)$ für jeden beliebigen Werth von x stets die Endpunkte conjugirter Halbdurchmesser. Daher ist $\sin(x + \alpha i)$ ebenfalls Ausdruck einer Ellipse, nämlich derselben, welche durch $\cos(x + \alpha i)$ ausgedrückt wird.

2) Es ist

$$\frac{\partial^2 \cos(x + \alpha i)}{\partial x^2} = -\cos(x + \alpha i).$$

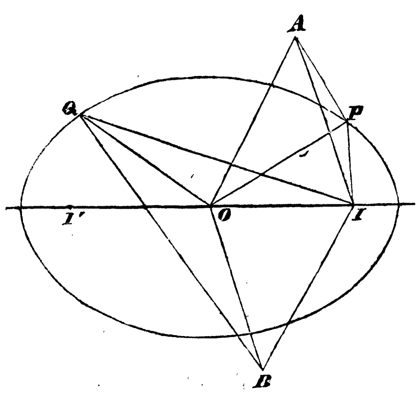
Hieraus folgt unmittelbar: ***die Beschleunigung ist gleich dem Halbmesser und hat mit ihm entgegengesetzte Richtung.***

3) Es ist

$$\cos^2(x + \alpha i) + \sin^2(x + \alpha i) = 1.$$

Setzen wir $P = \cos(x + \alpha i)$ und $Q = \sin(x + \alpha i)$, so sind, da

$$\sin(x + \alpha i) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2} + \alpha i\right)$$



ist, (nach 1) Zusatz) P und Q die Endpunkte conjugirter Halbdurchmesser. Da nun nach obiger Gleichung $P^2 + Q^2 = 1$ ist, so erhalten wir den Satz:

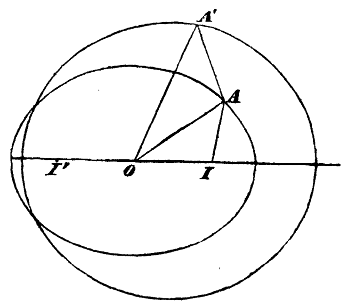
Ist O der Mittelpunkt, I ein Brennpunkt einer Ellipse, sind ferner P und Q die Endpunkte zweier conjugirten Halbdurchmesser und errichtet man über jedem der letztern ein Dreieck OPA und OQB, so dafs $OPA \sim OIP$ und $OQB \sim OIQ$, so ist $OBIA$ ein Parallelogramm.

Zugleich folgt aus $P^2+Q^2=1$ das Wesen der involutorischen isogonalen Verwandtschaft $X^2+Y^2=1$. Sind nämlich X und Y zwei einander nach dieser Verwandtschaft entsprechende Punkte der Ebene, so sind sie die Endpunkte zweier conjugirten Halbdurchmesser einer Ellipse, welche ihre Brennpunkte in ± 1 hat (vergl. oben).

4) Es ist

$$\cos^2(x+\alpha i) = \frac{1+\cos(2x+2\alpha i)}{2}.$$

Um diese Gleichung zu deuten, bemerken wir zunächst, dafs $\cos(2x+2\alpha i)$ offenbar selbst der Ausdruck einer Ellipse ist, da man nur (mit Aenderung der Geschwindigkeit) $2x$ für x zu setzen braucht, um einen Ausdruck von der Form $\cos(x+\alpha i)$ zu erhalten. Da aber die beiden Curven $\cos(2x+2\alpha i)$ und $\frac{1+\cos(2x+2\alpha i)}{2}$ in der Verwandtschaft $Y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}X$ stehen, und dies eine Aehnlichkeitsverwandtschaft ist, so ist $\frac{1+\cos(2x+2\alpha i)}{2}$ ebenfalls Ausdruck einer Ellipse, und zwar liegen ihre Brennpunkte, da $\cos(2x+2\alpha i)=\pm 1$ ist, wenn der Differentialquotient jenes Ausdrucks, nämlich $-\sin(2x+2\alpha i)=0$ gesetzt wird, in $\frac{1\pm 1}{2}$ d. h. in O und I. Die im Eingang dieser Nummer aufgestellte goniometrische Gleichung liefert also folgenden merkwürdigen Satz:



Denkt man sich zwei Ecken O und I eines Dreiecks OIA, von denen die eine O der Mittelpunkt, die andere I ein Brennpunkt einer Ellipse ist, fest, und läfst die dritte Ecke A sich auf der Ellipse bewegen, denkt man sich ferner fortwährend über OA ein Dreieck OAA′ construirt, so dafs OIA ∾ OAA′, so wird die Ecke A′ dieses letzteren sich ebenfalls in einer Ellipse bewegen, welche den Mittelpunkt O und den Brennpunkt I der gegebenen Ellipse zu Brennpunkten hat.

Wächst die Amplitude in $\cos(x+\alpha i)$ um eine bestimmte Gröfse ξ, so wächst offenbar die entsprechende Amplitude in $\frac{1+\cos(2x+2\alpha i)}{2}$ um 2ξ. Wir folgern hieraus, dafs, wenn AB und $A'B'$ entsprechende Bogen beider Ellipsen sind, die Amplitude von $A'B'$ doppelt so grofs ist, als die von AB. Durchläuft also z. B. A auf der zuerst gegebenen Ellipse den zwischen den Endpunkten zweier conjugirten Halbdurchmesser liegenden Bogen, so durchläuft

A' die halbe Ellipse. Andere merkwürdige Beziehungen aufzuführen, müssen wir hier unterlassen.

5) Es ist

$$\cos(x-\alpha i)\sin(x+\alpha i)-\sin(x-\alpha i)\cos(x+\alpha i) = \sin 2\alpha i.$$

Um diese Gleichung zu deuten, nehmen wir an, es seien P und Q zwei einander sehr nahe Punkte der Ellipse $\cos(x+\alpha i)$, also $P=\cos(x+\alpha i)$ und $Q=\cos(x+\partial x+\alpha i)=P-\sin(x+\alpha i).\partial x$. Alsdann ist nach §. 3 der Flächeninhalt des unendlich kleinen Sektors $POQ=\frac{1}{4i}(P\overline{Q}-\overline{P}Q)$, da er als ein Dreieck betrachtet werden kann.

Setzt man in letzterem Ausdruck demnach $P=\cos(x+\alpha i)$ und folglich $\overline{P}=\cos(x-\alpha i)$, $Q=P-\sin(x+\alpha i).\partial x$ und demnach $\overline{Q}=\overline{P}-\sin(x-\alpha i).\partial x$, so erhält man mit Berücksichtigung der im Eingange dieser Nummer aufgestellten Gleichung

$$POQ = \frac{\sin 2\alpha i}{4i}\cdot\partial x = \frac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{8}\,\partial x.$$

Bezeichnen wir nun den von OP und der halben grofsen Achse eingeschlossenen Sektor durch F, und somit POQ durch ∂F, so erhalten wir aus der letzteren Gleichung die folgende:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{8}.$$

Da folglich der Differentialquotient $\frac{\partial F}{\partial x}$ constant ist, so ersehen wir, dafs *je zwei Sektoren der Ellipse den Amplituden der zugehörigen Bogen proportional sind.* Hierdurch ist aber das Bewegungsgesetz für den Ausdruck $\cos(x+\alpha i)$ charakterisirt. *Es ist nämlich* $\cos(x+\alpha i)$ *derjenige Ausdruck einer elliptischen Bewegung, nach welchem der Halbdurchmesser, welcher zu dem die Ellipse beschreibenden Punkte gehört, in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume überstreicht.*

Der Leser wird nun im Stande sein, selbst goniometrische Gleichungen, wie die obigen, zu deuten. Er wird dann z. B. finden, dafs mit Berücksichtigung von §. 3 aus der Gleichung

$$\cos(x+\alpha i)\cos(x-\alpha i)+\sin(x+\alpha i)\sin(x-\alpha i) = \cos 2\alpha i$$

ohne Weiteres hergeleitet werden kann, dafs die Summe der Quadrate je zweier conjugirten Halbdurchmesser einer Ellipse constant ist; ferner aus der Gleichung

$$\sin(x+\alpha i)\cos(x-\alpha i)-\cos(x+\alpha i)\sin(x-\alpha i) = \sin 2\alpha i,$$

dafs der Inhalt des von zwei conjugirten Halbdurchmessern und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte eingeschlossenen Dreiecks constant ist; ferner aus den Gleichungen

$$(1+\cos(x+\alpha i))(1+\cos(x-\alpha i)) = 4\cos^2\tfrac{1}{2}(x+\alpha i)\cos^2\tfrac{1}{2}(x-\alpha i),$$
$$(1-\cos(x+\alpha i))(1-\cos(x-\alpha i)) = 4\sin^2\tfrac{1}{2}(x+\alpha i)\sin^2\tfrac{1}{2}(x-\alpha i),$$

dafs die Summe der Verbindungslinien eines Punktes der Ellipse mit den beiden Brennpunkten constant ist, u. s. w. Wobei wir zugleich bemerken, dafs alle diese Sätze unter der Formel

$$\cos(x\pm y+\alpha i\pm\beta i) = \cos(x+\alpha i)\cos(y+\beta i)\mp\sin(x+\alpha i)\sin(y+\beta i)$$

und folglich auch unter dem aus letzterer abzuleitenden allgemeinen Satze, durch welchen eine Beziehung zwischen drei confocalen Ellipsen $\cos(x+\alpha i)$, $\cos(y+\beta i)$ und $\cos(z+\alpha i+\beta i)$ oder $\cos(z+\alpha i-\beta i)$ ausgedrückt wird, enthalten sein müssen. Dieser umfassende Satz dürfte aber erst bei einer späteren Gelegenheit zu erörtern sein.

§. 18.

Aufgabe. ***Es soll die durch die Funktion*** $\cos(\alpha+xi)$ ***ausgedrückte Bewegung ermittelt werden.***

Auflösung. Es ist zunächst

$$Y = \cos(\alpha+xi) = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha i-x}+e^{x-\alpha i}),$$

woraus hervorgeht, dafs Y als die Mitte der Verbindungslinie der Punkte $M=e^{\alpha i-x}$ und $N=e^{x-\alpha i}$ zu denken ist. Diese Punkte beschreiben aber offenbar gerade Linien, welche durch den Nullpunkt gehen, und zwar ist stets $\angle IOM=\alpha$ und $\angle ION=-\alpha$, und somit $MON=2\alpha$. Ferner ist $OM=e^x$ und $ON=e^{-x}$, folglich $OM.ON=1$. Aus letzterer Gleichung folgt aber ohne Weiteres, dafs der in der Mitte zwischen M und N befindliche Punkt Y eine ***Hyperbel*** beschreiben mufs und dafs die Punkte M und N sich in den Asymptoten derselben bewegen. Der von den Asymptoten eingeschlossene Winkel ist daher $=2\alpha$, woraus hervorgeht, dafs $\cos\left(\frac{\pi}{4}+xi\right)$ der Ausdruck einer gleichseitigen Hyperbel ist. Die Brennpunkte fallen natürlich, da wir es hier wieder mit der Verwandtschaft $Y=\cos X$ zu thun haben, wieder nach ± 1. Die Ellipse $\cos(x+\alpha i)$ und die Hyperbel $\cos(\alpha'+xi)$ sind daher confocal.

Dem Leser mufs es überlassen bleiben, hier auf analoge Weise, wie wir es bei der Ellipse gethan haben, durch Anwendung goniometrischer Glei-

chungen Eigenschaften dieser hyperbolischen Bewegung zu ermitteln. Dafs confocale Ellipsen und Hyperbeln auf einander senkrecht stehen, folgt einfach daraus, dafs beide, bei der Verwandtschaft $Y = \cos X$, Geraden im System X entsprechen, welche auf einander senkrecht stehen (nämlich den Geraden $x + \alpha i$ und $\alpha' + xi$).

§. 19.

Aufgabe. Es soll die durch $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+xi\right)}$ ausgedrückte Bewegung ermittelt werden.

Auflösung. Setzen wir wieder $Y = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+xi\right)}$, so wird der Gleichung $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ genügt, wenn $\sin\left(\frac{\pi}{4}+xi\right) = 0$, also $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+xi\right)} = \pm 1$ ist. Die Brennpunkte der fraglichen Curve fallen somit in I und I'. Sei nun P ein beliebiger Punkt der Curve, so ist (nach §. 3)

$$PI^2 = \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+xi\right)} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-xi\right)} - 1\right),$$

$$PI'^2 = \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+xi\right)} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-xi\right)} + 1\right).$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen und zweckentsprechende Reduction erhalten wir

$$PI . PI' = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+xi\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-xi\right)$$

oder, da $\frac{\pi}{4}+xi$ und $\frac{\pi}{4}-xi$ Complementswinkel sind,

$$PI . PI' = 1.$$

Die vorgegebene Curve hat somit die Eigenschaft, dafs das Produkt der Abstände eines beliebigen Punktes derselben von den beiden Brennpunkten constant ist, nämlich gleich dem Quadrate der halben gegenseitigen Entfernung der Brennpunkte. Sie ist demnach eine *Lemniscate.*

Zugleich ersehen wir, da $\cos\left(\frac{\pi}{4}+xi\right)$ der Ausdruck einer gleichseitigen Hyperbel ist, dafs *die Lemniscate die reciproke Curve einer gleichseitigen Hyperbel ist.* Da hiernach diese beiden Curven in involutorischer Kreisverwandtschaft stehen, so läfst sich hieraus eine grofse Anzahl merkwürdiger Eigenschaften der Lemniscate ohne Mühe entwickeln, worauf wir hier um so mehr verzichten müssen, als wir vielleicht später Gelegenheit nehmen werden, die Lemniscate unter einem allgemeineren Gesichtspunkte zu betrachten.

Indem ich diese Betrachtungen einstweilen abbreche, bemerke ich noch, dafs es kein Befremden erregen darf, wenn hier zusammengehörige Curven, wie die Parabel und die Ellipse mittelst scheinbar ganz heterogener Ausdrücke behandelt worden sind. Alle hier vorgebrachten Ausdrücke von Kegelschnitten können auf eine gemeinsame Form gebracht werden, unter welcher auch der im barycentrischen Calcül behandelte Kegelschnitt-Ausdruck

$$\frac{Al+2Bmx+Cnx^2}{l+2mx+nx^2}$$

enthalten ist. Vorläufig galt es nur, nach Aufstellung des Begriffs der isogonalen Verwandtschaft, dem Leser die einfachsten Ausdrücke von Curven vorzuführen, und zugleich gelegentlich an diesen Beispielen zu zeigen, dafs mittelst des Punktcalcüls schon in den ersten Anfängen Bemerkenswerthes geleistet werden kann. Eine vollständige, alle bei den Curven in Betracht kommenden Momente enthaltende Theorie kann erst dann aufgestellt werden, wenn die Lehre von den nicht isogonalen Verwandtschaften, welche auf den Funktionen zweier reellen Variabeln beruhen, abgehandelt sein wird.

Liegnitz, im Juni 1857.