Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung.

Von

M. Noether in Erlangen.

Von den Flächen vierter Ordnung, deren Coordinaten als rationale Functionen zweier Parameter dargestellt werden können, sind bis jetzt, ausser solchen mit vielfachen Curven, nur die Fläche mit einem dreifachen Knotenpunkt und die Fläche mit einem Selbstberührungspunkt

$$F_4^{(1)} \equiv x_4^2 x_1^2 + x_4 x_1 f_2(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3) = 0$$

bekannt*). Die Abbildung der letzteren auf die Ebene geschieht durch ∞^3 Curven 6^{ter} Ordnung:

$$C_6(a_1^2, a_2^2, \ldots a_7^2, b_1, \ldots b_4),$$

wobei die Punkte $a_1, \ldots a_7, b_1, \ldots b_4$ auf einer Curve 3^{ter} Ordnung liegen.

Aber ich habe gefunden, dass noch zwei, und nur zwei, weitere Arten von rationalen Flächen 4^{ter} Ordnung mit einem singulären Punkte existiren. Die eine, $F_4^{(2)}$ wird auf die Ebene abgebildet mittels ∞^3 Curven 7^{ter} Ordnung

$$C_7(a^3, b_1^2, b_2^2 \ldots b_9^2),$$

wo $a, b_1, b_2 \ldots b_9$ in besonderer Lage auf einer C_3 sind; die zweite, $F_4^{(3)}$, wird abgebildet mittels ∞^3 Curven 9^{ter} Ordnung

$$C_9(a_1^3, a_2^3, \ldots a_8^3, b_1^2, b),$$

wo wiederum $a_1, a_2, \ldots a_8, b_1, b$ auf einer C_3 sind**). Der Nachweis

---

*) S. meine Note in den Göttinger Nachrichten vom 7. Juni 1871. Ein spezieller Fall der Fläche $F_4^{(1)}$ war von Herrn Cremona ebendaselbst, 3. Mai 1871 mitgetheilt worden. Eine ausführliche Behandlung der allgemeinen $F_4^{(1)}$ hat Herr Cremona unter dem Titel: „Sopra una certa superficie di quart' ordine" in den „Collectanea mathem. in commemor. di Dom. Chelini", Hoepli, Milano 1881, gegeben.

**) Dieses System der C_9 findet sich in Herrn Jung's Aufsatz: „Ricerche sui sistemi lineari di curve algebr. etc.", Annali di Mat. Ser. II, t. 15, 1887. Eine Anfrage der Herren Jung und Segre, ob die zugehörige F_4 schon discutirt sei — Herr Segre hatte die C_9 schon auf die Eigenschaft hin, ob sie eine F_4 in der That eindeutig bestimmen, untersucht —, bot die Veranlassung zur Ausarbeitung und Veröffentlichung des vorliegenden Aufsatzes.

des Gesagten und die Discussion der genannten Flächenarten bildet den Inhalt des folgenden Aufsatzes.

§ 1.

Reduction des Problems.

Eine Fläche 4ter Ordnung ohne vielfachen Punkt kann nicht rational-eindeutig auf die Ebene abbildbar sein, da sie nicht das Flächengeschlecht 0 hat. Man hat daher nur die F_4 mit einem Doppelpunkt P zu betrachten.

Projicirt man die F_4 von P aus auf eine Ebene Ξ, so wird diese doppelt überdeckt, und die beiden Blätter hängen längs einer Uebergangscurve 6ter Ordnung, Ω, zusammen. Im Falle P ein Selbstberührungspunkt von F_4 ist, d. h. im Falle jeder ebene Schnitt durch P die Fläche in einer Curve 4ter Ordnung mit *zwei* bei P benachbarten Doppelpunkten trifft, hat man die Fläche $F_4^{(1)}$ der Einleitung vor sich, und die Curve Ω besteht dann aus einer doppelt gezählten Geraden, längs der die Blätter getrennt verlaufen, und aus einer eigentlichen Uebergangscurve der 4ten Ordnung: die Doppelgerade, in der Ξ durch eine durch P gehende Ebene geschnitten wird, erhält 4 Verzweigungspunkte, entsprechend dem Geschlechte $p=1$ des ebenen Schnittes durch P.

In jedem andern Falle hat man in den Schnitten durch P Curven 4ter Ordnung mit nur einem Doppelpunkte vor sich, vom Geschlechte 2, und dem entsprechend eine eigentliche Uebergangscurve Ω von der 6ten Ordnung, damit die Geraden der Doppelebene Ξ 6 Verzweigungspunkte erhalten. Bei der Abbildung von F_4 in die einfache Ebene entspricht den ebenen Schnitten von F_4 durch P, oder den Geraden von Ξ, eine lineare ∞^2-Schaar von Curven vom Geschlechte 2, die sich in je 2 beweglichen Punkten schneiden. Man hat daher die Aufgabe, alle solche Schaaren zu construiren.

Wenn die ∞^2-Schaar aus Curven $n$ter Ordnung besteht, welche eine Reihe von i_1-, i_2-, ... fachen Fundamentalpunkten besitzen, so hat man die Gleichungen

$$n^2-2=\sum_\varrho i_\varrho^2,\quad \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-2=\tfrac{1}{2}\sum_\varrho i_\varrho(i_\varrho-1),$$

woraus auch

$$\tfrac{1}{2}\sum_\varrho i_\varrho(i_\varrho+1)=\tfrac{1}{2}n(n+3)-1.$$

Die dritte Gleichung zeigt zunächst, dass unter den linearen Bedingungsgleichungen, welche die Fundamentalpunkte für die Parameter der Schaar liefern, *eine* eine Folge der übrigen sein muss. Die beiden ersten Gleichungen ergeben, indem man wörtlich die Schlussweise verfolgt, welche ich in meiner Note „Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen" (diese Annalen Bd. V) aufgestellt habe*), dass sich *alle* unsere Schaaren, auch die singulärsten, durch eine Reihenfolge quadratischer eindeutiger Ebenentransformationen auf die folgenden zwei Schaaren reduciren lassen:

I. Curven $C_4(a^2 b_1 b_2 \ldots b_{10})$,
wobei eine $C_3(a b_1 \ldots b_{10})$ existirt;

II. Curven $C_6(a_1^2 a_2^2 \ldots a_8^2 b_1 b_2)$,
wobei wieder $a_1, a_2 \ldots a_8, b_1, b_2$ auf einer C_3 liegen.

Die I^te^ ∞^2-Schaar führt (s. Clebsch, Math. Ann. III.) auf eine Doppelebene Ξ mit Uebergangscurve Ω von der 6^ten^ Ordnung, die einen 4-fachen Punkt hat. Die II^te^ ∞^2-Schaar führt, nach meinem vorstehenden Aufsatz „Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen", auf eine Doppelebene Ξ mit Uebergangscurve Ω von der 6^ten^ Ordnung, welche zwei unendlich benachbarte 3-fache Punkte besitzt. —

§ 2.

Bestimmung der rationalen Flächen F_4.

Sei nun

$$F_4 \equiv x_4^2 f_2(x_1, x_2, x_3) + 2x_4 f_3(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3),$$

und hierbei

$$f_2 \equiv \alpha x_3^2 + x_3 A_1 + A_2,$$
$$f_3 \equiv \beta x_3^3 + x_3^2 B_1 + x_3 B_2 + B_3,$$
$$f_4 \equiv \gamma x_3^4 + x_3^3 C_1 + x_3^2 C_2 + x_3 C_3 + C_4,$$

wo die A_i, B_i, C_i ganze homogene Functionen i^{ter} Dimension in x_1, x_2. Also

$$\Omega \equiv f_3^2 - f_2 f_4.$$

I. Im Falle I. des § 1 hat man, damit in Ω alle Glieder 0^{ter} bis 3^{ter} Dimension in x_1, x_2 verschwinden, die vier Identitäten zu erfüllen:

$$\beta^2 - \alpha\gamma = 0$$
$$2\beta B_1 - \alpha C_1 - \gamma A_1 = 0$$
$$B_1^2 + 2\beta B_2 - \alpha C_2 - A_1 C_1 - \gamma A_2 = 0$$
$$2\beta B_3 + 2B_1 B_2 - \alpha C_3 - A_1 C_2 - A_2 C_1 = 0.$$

*) Ich theile die einfache Rechnung hier nicht mit, weil sich dieselbe bereits bei Martinetti, „Sopra alc. sistemi lin. di curve piane algebr. di genere due", Rendic. d. Circ. Matem. di Palermo, I, pag. 205 ausgeführt findet. Nur ist dessen System 1° von $[\Phi_4]$ auf pag. 216 nichts weiter als ein specieller Fall von dessen System 2° von $[\Phi_4]$.

Wenn nun 1) α nicht $=0$, etwa $=1$, so kann man, indem man $x_4+\lambda x_3$ statt x_4 einführt, jedenfalls γ zu 0 machen; also sei dann $\gamma=0$, $\beta=0$. Dies gibt

$$C_1=0,\quad C_2=B_1^2,\quad C_3=B_1(2B_2-A_1B_1),$$

und

$$F_4\equiv x_3^2(x_4+B_1)^2+x_3(x_4+B_1)(A_1^2-A_1x_4+2B_2)$$
$$+(x_4^2A_2+2x_4B_3+C_4);$$

d. h. F_4 erhält in $x_1=x_2=x_4=0$ einen Selbstberührungspunkt und gehört also zur Klasse $F_4^{(1)}$ der Einleitung.

Wenn 2) $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, so wird

$$B_1^2-A_1C_1=0,\quad 2B_1B_2-A_1C_2-A_2C_1=0.$$

Also entweder

$$A_1=0,\quad B_1=0,\quad C_1=0,$$

dann erhält aber F_4 eine Doppelgerade $x_1=x_2=0$, was ausgeschlossen ist.

Oder

$$B_1=0,\ A_1=0,\ C_1 \text{ nicht } =0,\ A_2=0,$$

was einen 3-fachen Punkt von F_4 in $x_1=x_2=x_3=0$ gibt; oder

$$B_1=0,\ C_1=0,\ A_1 \text{ nicht } =0,\ C_2=0,$$

was aber einen 3-fachen Punkt von F_4 in $x_1=x_2=x_4=0$ liefert; oder

$$B_1 \text{ nicht } =0,\ A_1=B_1=C_1,\ A_2+C_2=2B_2,$$
$$F_4\equiv A_1x_3(x_4+x_3)^2+(x_4+x_3)(A_2x_4+C_2x_3)$$
$$+(2x_4B_3+x_3C_3+C_4),$$

was wiederum einen 3-fachen Punkt von F_4 in $x_1=x_2=x_4+x_3=0$ liefert, also hier ebenfalls ausgeschlossen werden soll.

Wenn 3) $\alpha=0$, $\beta=0$, γ nicht $=0$, so sei $\gamma=1$ und es wird

$$A_1=0,\ A_2=B_1^2,$$

wobei B_1 und A_2 nicht zu 0 werden können, weil sonst F_4 wieder in $x_1=x_2=x_3=0$ einen 3-fachen Punkt hätte; dann

$$2B_2=B_1C_1$$

und somit kommt man auf die Flächenklasse:

$$F_4^{(2)}\equiv(x_4B_1+x_3^2)^2+(x_4B_1+x_3^2)x_3C_1$$
$$+(2x_4B_3+x_3^2C_2+x_3C_3+C_4),$$

für die

$$\Omega(x)\equiv x_3^2B_1\left[B_1\left(\tfrac{1}{4}C_1^2-C_2\right)+2B_3\right]+x_3B_1(C_1B_3-B_1C_3)$$
$$+(B_3^2-B_1^2C_4)=0$$

eine Curve 6^{ter} Ordnung mit 4-fachem Punkte $x_1=x_2=0$, dessen einer Zweig, in der Richtung $B_1=0$, daselbst einen Wendepunkt hat.

II. Im Falle II. des § 1 hat man, damit Ω die Form

$$\Omega(x) = x_3^3 x_1^3 + x_3^2 x_1^2 Q_2 + x_3 x_1 Q_4 + Q_6$$

annimmt, die Identitäten zu erfüllen:

$$\begin{aligned}
&\beta^2 - \alpha\gamma = 0 \\
&2\beta B_1 - \alpha C_1 - \gamma A_1 = 0 \\
&B_1^2 + 2\beta B_2 - \alpha C_2 - A_1 C_1 - \gamma A_2 = 0 \\
&2\beta B_3 + 2B_1 B_2 - \alpha C_3 - A_1 C_2 - A_2 C_1 = x_1^3 \\
&B_2^2 + 2B_1 B_3 - \alpha C_4 - A_1 C_3 - A_2 C_2 = x_1^2 Q_2 \\
&2B_2 B_3 - A_1 C_4 - A_2 C_3 = x_1 Q_4 .
\end{aligned}$$

Wenn hier 1) $\alpha = 0$, γ nicht $= 0$, etwa $\doteq 1$, so wird

$$\beta = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = B_1^2$$

und von 0 verschieden; die weiteren Gleichungen ergeben dann, dass B_1, B_2, und B_3 die Grösse x_1 zum Factor haben müssen, was nur den schon erledigten Fall des Selbstberührungspunktes von F_4 in

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

liefert.

Wenn 2) $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, so wird

$$\beta = 0, \quad B_1^2 - A_1 C_1 = 0.$$

Sei nun 2a) B_1 nicht $= 0$; so kann man setzen

$$A_1 = B_1 = C_1,$$

wonach die 4te Gleichung wird

$$B_1(2B_2 - A_2 - C_2) = x_1^3,$$

d. h. etwa

$$B_1 = x, \quad 2B_2 - A_2 - C_2 = x_1^2 .$$

Die 5te Gleichung liefert dann für C_2 und C_3 die Formen

$$C_2 = A_2 + x_1 L_1, \quad C_3 = 2B_3 + x_1 L_2,$$

wonach die 6te Gleichung schon erfüllt ist. Dies gibt

$$F_4 \equiv (x_4 + x_3)^2 (x_3 x_1 + A_2) + (x_4 + x_3)(x_3 x_1 L_1 + 2B_3) + (x_3 x_1 L_2 + C_4).$$

d. h. den ausgeschlossenen Fall eines dreifachen Punktes in

$$x_1 = x_2 = x_4 + x_3 = 0.$$

Ist aber 2b) $B_1 = 0$, so kann wegen der 4ten Gleichung nicht zugleich $A_1 = 0$, $C_1 = 0$ sein. Sei dann zunächst

$$C_1 = 0, \quad A_1 \text{ nicht } = 0,$$

so wird

$$A_1 = x_1, \quad C_2 = - x_1^2,$$

B_2 und C_3 erhalten ebenfalls x_1 zum Factor und F_4 erhielte wieder einen Selbstberührungspunkt in $x_1 = x_2 = x_4 = 0$. Es muss also sein

$$A_1 = 0, \quad C_1 \text{ nicht } = 0;$$

wonach nach der vierten Gleichung $-A_2C_1 = x_1^3$ gesetzt werden kann:

$$A_2 = x_1^2, \quad C_1 = -x_1;$$

und nach der 5ten Gleichung $B_2^2 - x_1^2C_2 = x_1^2Q_2$:

$$B_2 = x_1D_1.$$

Die 6te Gleichung ist hierdurch ebenfalls erfüllt, und es wird:

$$F_4^{(3)} \equiv x_4^2x_1^2 + 2x_4(x_3x_1D_1 + B_3) \\ + (-x_3^3x_1 + x_3^2C_2 + x_3C_3 + C_4).$$

Dafür wird

$$\Omega(x) \equiv x_3^3x_1^3 + x_3^2x_1^2(D_1^2 - C_2) + x_3x_1(2D_1B_3 - x_1C_3) \\ + (B_3^2 - x_1^2C_4).$$

Wenn endlich 3) α nicht $= 0$, etwa $= 1$, so kann man setzen (wie in I.):

$$\gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = B_1^2.$$

Die übrigen drei Gleichungen lassen dann A_1 und A_2 ganz willkürlich, liefern aber Bestimmungen für C_3, C_4 und B_2 oder B_3. Sie bewirken jedenfalls, dass F_4 nach x_3 geordnet, von der Form wird:

$$x_3^2(x_4 + B_1)^2 + x_3M_3 + M_4,$$

d. h. im Punkte $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ einen weiteren Doppelpunkt Q erhält, und zwar mit dem Tangentenkegel $(x_4 + B_1)^2 = 0$, d. h. einen uniplanaren Knotenpunkt Q, während der zuerst betrachtete Projectionspunkt P von F_4 ein gewöhnlicher Knotenpunkt ohne alle Singularität bleibt. Die Betrachtung dieses Falles kann aber ausgeschlossen werden; denn man kann hier, statt von P, die Projection von F_4 auf eine Doppelebene von Q aus machen und muss dann, da P nicht singulär ist, auf einen andern, als diesen Fall II., 3), d. h. auf einen der im Vorhergehenden schon behandelten Fälle für Q kommen.

Somit bleiben nur die Flächen $F_4^{(1)}$, $F_4^{(2)}$, $F_4^{(3)}$ übrig*).

---

*) Ein anderer Weg zur Auffindung der $F_4^{(2)}$ und $F_4^{(3)}$ ist folgender: Man transformirt eine F_4, mit einem uniplaren Punkt P, mittels einer gewöhnlichen eindeutigen quadratischen Raumtransformation, deren isolirter Fundamentalpunkt in P gelegt ist, in eine Fläche 6ter Ordnung F_6', welche von der P entsprechenden Fundamentalebene längs einer Geraden p berührt werden wird; und bestimmt dann die Singularität von P so, dass F_6' in einem Punkte von p noch einen Selbstberührungspunkt erhält. Dieser Weg liefert unmittelbar die beiden Flächenarten, zeigt aber nicht, dass dieselben, mit $F_4^{(1)}$, dem in der Einleitung genannten Probleme allein genügen; dagegen zeigt er, dass die Singularität der Flächen $F_4^{(2)}$ und $F_4^{(3)}$ als aus zwei benachbarten einfacheren Singularitäten — einem gewöhnlichen Doppelpunkt und einem Selbstberührungspunkt — zusammengesetzt aufgefasst werden kann.

§ 3.

Die Fläche $F_4^{(1)}$.

Herr Cremona führt in seinem in der Einleitung citirten Aufsatze die Behandlung der Fläche

(1) $$F_4^{(1)} \equiv x_4^2 x_1^2 + x_4 x_1 f_2(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3) = 0$$

auf die Ueberführung dieser Gleichung in die Form zurück:

(2) $$F_4^{(1)} \equiv S_1 S_4 - S_2 S_3,$$

wo die $S = 0$ vier Flächen 2ten Grades vorstellen, welche im Punkte P oder $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ alle die Ebene $x_1 = 0$ berühren. Denn der Schnitt von $F_4^{(1)}$ mit dem Flächenbüschel

$$S_1 + \lambda S_2 = 0$$

besteht dann aus einer linearen Schaar rationaler Curven, was also nach einem von mir gegebenen Theorem zur Abbildung führt. Aber da in Bezug auf die Ueberführung von (1) in die Form (2) jener Aufsatz im Wesentlichen nur eine Abzählung gibt, so will ich dieselbe durch Angabe der Art und Zahl der Lösungen der Aufgabe hier ergänzen.

Sei gesetzt

$$S_i = k_i x_4 x_1 + K_i(x_1, x_2, x_3), \qquad (i = 1, \ldots 4)$$

wo die k_i Constanten, die K_i homogene Ausdrücke 2ten Grades in x_1, x_2, x_3 sind, so wird (2) zu

$$F_4^{(1)} \equiv (k_1 k_4 - k_2 k_3) x_4^2 x_1^2 + x_4 x_1 (k_1 K_4 + k_4 K_1 - k_2 K_3 - k_3 K_2) + (K_1 K_4 - K_2 K_3),$$

und die Aufgabe ist, die k_i, K_i den 3 Gleichungen gemäss

(3) $$\begin{cases} 1 = k_1 k_4 - k_2 k_3 \\ f_2 = k_1 K_4 + k_4 K_1 - k_2 K_3 - k_3 K_2 \\ f_4 = K_1 K_4 - K_2 K_3 \end{cases}$$

zu bestimmen. Dies liefert 22 Gleichungen für die 28 Constanten der k_i, K_i, so dass man ∞^6 Lösungssysteme zu erwarten hat.

Geometrisch ist die Lösung klar. Projicirt man $F_4^{(1)}$ vom Knotenpunkt P aus auf eine Ebene Ξ, so erhält man aus einem Büschel von Raumcurven 4ter Ordnung, das durch $S_1 + \lambda S_2 = 0$, $S_3 + \lambda S_4 = 0$ auf $F_4^{(1)}$ gegeben ist, in Ξ ein ∞^1-System von Berührungskegelschnitten der die beiden Blätter von Ξ verbindenden Uebergangscurve 4ter Ordnung $\Omega \equiv f_2^2 - 4 f_4 = 0$; und umgekehrt: aus jedem der 63 Systeme von Berührungskegelschnitten an Ω 2 Büschel von Raumcurven 4ter Ordnung von $F_4^{(1)}$, ausgeschnitten durch Büschel von Flächen 2ter Ordnung

$$S_1 + \lambda S_2 = 0, \quad S_3 + \lambda S_4 = 0$$

oder durch

$$S_1 + \mu S_3 = 0, \quad S_2 + \mu S_4 = 0.$$

Im Wesentlichen hat man also 63 verschiedene Lösungsarten von (3); und aus *einer* Lösung erhält man immer ∞^3, indem man statt $K_1, \ldots K_4$ solche lineare Functionen dieser Grössen setzt, welche $K_1 K_4 - K_2 K_3$ in sich überführen, wodurch auch die k_i sich linear transformiren.

Analytisch stellt sich dies so:

Durch eine Lösung von (3) wird

$$\Omega \equiv f_2^2 - 4f_4 = (k_1K_4 + k_4K_1 - k_2K_3 - k_3K_2)^2 - 4(k_1k_4 - k_2k_3)(K_1K_4 - K_2K_3)$$
$$\equiv (k_1K_4 - k_4K_1 - k_2K_3 + k_3K_2)^2 - 4(k_1K_2 - k_2K_1)(k_3K_4 - k_4K_3),$$

so dass damit ein System von Berührungskegelschnitten (mit Parameter λ)

$$(k_1K_2 - k_2K_1) + \lambda(k_1K_4 - k_4K_1 - k_2K_3 + k_3K_2) + \lambda^2(k_3K_4 - k_4K_3) = 0$$

an Ω bestimmt ist. Sei nun umgekehrt irgend ein Berührungskegelschnitt A von Ω bekannt, so erhält dadurch Ω die Form

(4) $\Omega \equiv B^2 - AC$, $\quad$ (A, B, C Functionen 2^{ten} Grads in x_1, x_2, x_3),

und daraus leitet man für (3) eine Lösung her:

$$K_1 = \frac{1}{2}(f_2 - B), \qquad k_1 = 1,$$
$$K_2 = -\frac{1}{2}A, \qquad k_2 = 0,$$
$$K_3 = \frac{1}{2}C, \qquad k_3 = 0,$$
$$K_4 = \frac{1}{2}(f_2 + B), \qquad k_4 = 1,$$

und eine zweite Lösung durch Vertauschung von B mit $-B$.

Die übrigen Lösungen, welche zum *selben* der 63 Systeme von Berührungskegelschnitten, wie A, gehören, ergeben sich dann aus der einen mittels der linearen Transformationen

$$K_1' = \alpha K_1 + \beta K_2, \quad K_2' = \gamma K_1 + \delta K_2,$$
$$K_3' = \alpha K_3 + \beta K_4, \quad K_4' = \gamma K_3 + \delta K_4,$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ willkürlichen Parameter, für welche nur

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

damit

$$K_1'K_4' - K_2'K_3' = K_1K_4 - K_2K_3$$

wird. Damit auch

$$k_1'K_4' + k_4'K_1' - k_2'K_3' - k_3'K_2' = k_1K_3 + k_4K_1 - k_2K_3 - k_3K_2,$$

hat man dann zu setzen:

$$k_1' = \alpha k_1 + \beta k_2, \quad k_2' = \gamma k_1 + \delta k_2,$$
$$k_3' = \alpha k_3 + \beta k_4, \quad k_4' = \gamma k_3 + \delta k_4,$$

wonach auch

$$k_1' k_4' - k_2' k_3' = k_1 k_4 - k_2 k_3.$$

Verbindet man mit diesen ∞^3 Transformationen die ∞^3, welche durch Vertauschung von K_1 mit K_4 entstehen, so erhält man aus *einer* Lösung ∞^6 solcher. Dies ist dann für jede der 63 verschiedenen Möglichkeiten, Ω in die Form (4) zu setzen, auszuführen.

§ 4.

Die Fläche $F_4^{(2)}$. Erste Methode der Abbildung.

Die eindeutige Abbildung dieser Fläche (s. I., § 2) auf die Ebene kann auf verschiedenen Wegen gefunden werden. Einmal durch Projection vom Knotenpunkt P aus auf eine Doppelebene Ξ, mit Uebergangscurve Ω 6ter Ordnung, die einen 4-fachen Punkt hat und durch Abbildung von Ξ auf eine einfache Ebene (nach Clebsch). Sodann, indem man beachtet, dass sich auf $F_4^{(2)}$ unmittelbar ein Büschel von *rationalen* Curven angeben lässt, durch Anwendung meiner in Annalen III gegebenen Methoden. Der Büschel von rationalen Curven aber wird aus

$$F_4^{(2)} \equiv (x_4 B_1 + x_3^2)^2 + (x_4 B_1 + x_3^2) x_3 C_1 + (2 x_4 B_3 + x_3^2 C_2 + x_3 C_3 + C_4) = 0$$

durch den Ebenenbüschel

$$x_1 + \lambda x_2 = 0$$

ausgeschnitten; denn ein solcher ebener Schnitt erhält die Gleichungsform

$$(\alpha x_4 x_1 + x_3^2)^2 + (\alpha x_4 x_1 + x_3^2)\beta x_3 x_1$$
$$+ (\gamma x_4 x_1^2 + \gamma_1 x_3^2 x_1^2 + \gamma_2 x_3 x_1^3 + \gamma_3 x_1^4) = 0,$$

was (vgl. meinen Aufsatz über singuläre Punkte, Math. Ann. IX) eine ebene Curve 4ter Ordnung vorstellt, die bei P oder $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ *zwei einander osculirende Zweige*, von der Richtung $x_1 = x_2 = 0$, d. h. *drei aufeinanderfolgende Doppelpunkte* besitzt, also vom Geschlecht 0 ist.

Die beiden Methoden sollen hier nacheinander angewandt werden, zunächst die erste Methode der Abbildung.

Setzt man

$$F_4^{(2)} = x_4^2 B_1^2(x_1, x_2) + 2 x_4 f_3(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3),$$

so wird

$$f_3(x) = B_1 x_3 \left(x_3 + \frac{1}{2} C_1\right) + B_3,$$
$$f_4(x) = x_3^4 + x_3^3 C_1 + x_3^2 C_2 + x_3 C_3 + C_4;$$

und für die Abbildung von $F_4^{(2)}$ auf die Doppelebene Ξ, deren Punkte auf ξ-Coordinaten bezogen seien, erhält man

$$\varrho x_1 = \xi_1 B_1^2(\xi), \quad \varrho x_2 = \xi_2 B_1^2(\xi), \quad \varrho x_3 = \xi_3 B_1^2(\xi),$$
$$\varrho x_4 = -f_3(\xi) + \sqrt{\Omega(\xi)},$$

wo

$$\Omega(\xi) = f_3^2(\xi) - B_1^2(\xi) f_4(\xi) \equiv \xi_3^2 B_1 \left(\tfrac{1}{4} B_1 C_1^2 - B_1 C_2 + 2 B_3\right)$$
$$+ \xi_3 B_1 (C_1 B_3 - B_1 C_3) + (B_3^2 - B_1^2 C_4).$$

Der 4-fache Punkt $\xi_1 = \xi_2 = 0$ dieser Curve 6ter Ordnung, $\Omega = 0$, sei Π; die eine der 4 Tangenten in Π, $B_1 = 0$, ist Wendetangente. Den ebenen Schnitten

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

von $F_4^{(2)}$ entsprechen in Ξ die in *einem* Blatte verlaufenden Curven 4ter Ordnung

$$\Gamma_4 \equiv B_1^2(\xi) \left(\sum_{i=1}^{3} u_i \xi_i\right)^2 - 2 u_4 f_3(\xi) \cdot \sum u_i \xi_i + u_4^2 f_4(\xi) = 0,$$

indem sich dafür $\sqrt{\Omega}$ aus der Gleichung bestimmt:

$$u_4 \sqrt{\Omega(\xi)} = u_4 f_3(\xi) - B_1^2(\xi) \cdot \Sigma u_i \xi_i.$$

Da

$$B_1^2 \Gamma_4 = (B_1^2 \cdot \Sigma u_i \xi_i - u_4 f_3)^2 - u_4^2 \Omega,$$

so berühren die Curven Γ_4, welche nicht durch Π gehen, die Curve Ω in je 12 Punkten.

Von Π aus gehen 10 Tangenten an Ω, von denen eine in $B_1 = 0$ fällt. Vermöge jeder dieser Tangenten wird $\sqrt{\Omega}$ rational, d. h. die beiden Blätter längs einer solchen Tangente sind völlig getrennt und man erhält dementsprechend je 2 getrennte Gebilde von $F_4^{(2)}$. Den 9 von B_1 verschiedenen Tangenten muss je ein Kegelschnittpaar von $F_4^{(2)}$ entsprechen, da kein anderes Zerfallen der oben genannten von einer Ebene des Büschels durch die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ (die mit p bezeichnet sei) ausgeschnittenen rationalen Curve 4ter Ordnung möglich ist. Es gibt daher in dem Ebenenbüschel, der p $(x_1 = x_2 = 0)$ zur Axe hat, 9 Ebenen, welche $F_4^{(2)}$ je in Kegelschnittpaaren schneiden. Die Kegelschnitte berühren alle die Gerade p in P und die beiden eines Paares osculiren einander daselbst.

Der letzten Tangente B_1, die Ω bei Π selbst berührt, entspricht, als Gerade $B_1^{(1)}$ des einen Blattes, in dem $\sqrt{\Omega(\xi)} = +f_3(\xi)$ ist, die rationale Curve 4ter Ordnung, mit 3-fachem Punkt in P, in welcher $B_1(x) = 0$ die Fläche $F_4^{(2)}$ schneidet, nämlich

$$B_1(x) = 0, \quad 2 x_4 B_3(x_1, x_2) + f_4(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

eine Curve, für deren 3-fachen Punkt die 3 Elemente *einen* Zweig von der Richtung p bilden; als Geraden $B_1^{(2)}$ des zweiten Blattes entspricht der Tangente B_1 von Ω der *Punkt* P von $F_4^{(2)}$ selbst, und zwar so:

Den verschiedenen Punkten von $B_1^{(2)}$ entsprechen die verschiedenen *Richtungen* durch P in der Ebene $B_1(x) = 0$ derart, dass einem Curvenzweig von $F_4^{(2)}$, welcher in P einen Rückkehrpunkt von der Richtung $x_1 = 0$, $\alpha x_2 + \beta x_3 = 0$ ($\beta \neq 0$) hat, zu einem Curvenzweig der Doppelebene Ξ führt, welcher $B_1^{(2)}$ im Punkte $\alpha \xi_2 + \beta \xi_3 = 0$ einfach trifft; einem Curvenzweig von $F_4^{(2)}$ aber, welcher in P die Richtung p und daselbst die Schmiegungsebene $\gamma x_1 + \delta x_2 = 0$ hat, ein Curvenzweig von Ξ entspricht, *der durch* Π *geht* mit der Richtung $\gamma \xi_1 + \delta \xi_2 = 0$. —

Ich wende mich jetzt zur Abbildung von Ξ auf eine einfache Ebene Y, die nach Clebsch so geschieht, dass den (doppelten) Geraden der Doppelebene Ξ in Y eine ∞^2-Schaar von

$$C_4(a^2 b_1, b_2, \dots b_{10}),$$

entspricht, wobei eine

$$C_3(a, b_1, b_2, \dots b_{10})$$

existirt, deren Punkte den *Richtungen* von Π in Ξ entsprechen, nämlich das Punktepaar, das aus C_3 durch eine durch a gehende Gerade ausgeschnitten wird, zwei übereinanderliegenden Richtungen in Π. Dabei entsprechen ferner den Punkten $b_1, \dots b_{10}$ die 10 von Π an Ω gehenden Tangenten in je *einem* Blatte, den Geraden $\overline{ab_1}, \dots \overline{ab_{10}}$ diese 10 Tangenten je im andern Blatte; dem Punkte a ein durch Π gehender Kegelschnitt A. Hier, wo eine der 10 Tangenten von Π an Ω, $B_1 = 0$, bei Π selbst berührt, soll dieser, als Linie $B_1^{(1)}$ die Gerade $\overline{ab_{10}}$, als Linie $B_1^{(2)}$ der Punkt b_{10} von Y entsprechen. Die Gerade $\overline{ab_{10}}$ muss in b_{10} die Curve C_3 *berühren;* denn der dem Schnittpunktepaar entsprechende Punkt von Ξ fällt nicht nur an Π, sondern auch auf Ω.

Für die hierdurch vermittelte eindeutige Beziehung der Fläche $F_4^{(2)}$ zur Ebene Y erhält man so:

Den rationalen Curven 4ter Ordnung, in welchen $F_4^{(2)}$ von dem Geradenbüschel mit Axe p (Linie $P\Pi$) geschnitten wird, entsprechen in Y die Geraden durch den Punkt a — was umgekehrt den rationalen Charakter jener Curven beweist. Insbesondere entsprechen den 9 Kegelschnittpaaren dieses Büschels die 9 Punkte $b_1, \dots b_9$, verbunden je mit einer der 9 Geraden $\overline{ab_1}, \dots \overline{ab_9}$; der rationalen Curve 4ter Ordnung mit 3-fachem Punkt, in welcher $B_1(x) = 0$ die Fläche schneidet, die Gerade $\overline{ab_{10}}$; den verschiedenen Richtungen von $F_4^{(2)}$ am Punkte P, die in der Ebene $B_1(x) = 0$ liegen, die verschiedenen Richtungen durch den Punkt b_{10}. Für das Letztere ist genauer zu sagen: einem Curvenzweig von $F_4^{(2)}$, der in P eine Spitze in einer von p verschiedenen Richtung hat, entspricht ein *einfach* durch b_{10} gehender Zweig; einem einfachen Curvenelement von $F_4^{(2)}$ von der Richtung p je nach seiner Schmiegungsebene die verschiedenen Punkte von C_3, nämlich bei bestimmter Schmiegungsebene der eine oder andere Punkt des zugehörigen *Paars* von C_3 je nach dem Vorzeichen von $\sqrt{\Omega(x)}$. Dem Punkt a entspricht daher auf $F_4^{(2)}$ eine durch P in der Richtung p einfach gehende Curve, die sich auf Ξ als Kegelschnitt A durch Π projicirt, d. h. eine Raumcurve 3^{ter} Ordnung.

Hiernach lässt sich leicht sehen, was den ebenen Schnitten von $F_4^{(2)}$ bei der eindeutigen Abbildung auf die Ebene Y entsprechen muss. Da die Curven von $F_4^{(2)}$, welche den Punkten $a, b_1, \ldots b_9$ entsprechen, von den ebenen Schnitten von $F_4^{(2)}$ 3-punktig, bez. 2-punktig getroffen werden, der dem Punkte b_{10} entsprechende Punkt P gar nicht getroffen wird, weitere Fundamentalpunkte aber nicht auftreten, so bilden sich die ebenen Schnitte durch Curven

$$C_r(a^3, b_1^2, b_2^2, \ldots b_9^2)$$

ab. Da diese Curven von den Geraden durch a in je 4 Punkten getroffen werden sollen, wird dabei $r = 7$, so dass als Bilder der ebenen Schnitte eine lineare ∞^3-Schaar von Curven

$$C_7(a^3, b_1^2 b_2^2, \ldots b_9^2)$$

in Y auftritt.

Es ist jetzt nur noch die Lage der 10 Punkte $a, b_1, \ldots b_9$ genauer zu bestimmen; denn es genügt nicht, dass dieselben auf einer Curve dritter Ordnung liegen. In diesem Falle würden die C_7 nur aus dieser C_3, verbunden mit einer ∞^2-Schaar $C_4(a^2, b_1, \ldots b_9, b_{10})$ bestehen, und die Transformation mittels dieser C_4 würde nicht auf die *spezielle* Art von Uebergangscurve $\Omega_6(\Pi^4)$ führen, welche zu einer $F_4^{(2)}$ gehört.

Nimmt man aber 9 Punkte $a, b_1, \ldots b_8$ beliebig an, so erhält man eine lineare ∞^5-Schaar von Curven

$$C_7(a^3, b_1^2, \ldots b_8^2),$$

welche die durch $a, b_1, \ldots b_8$ gehende C_3 in einer linearen ∞^1-Schaar $g_2^{(1)}$ von Gruppen von je 2 Punkten treffen. In dieser Schaar $g_2^{(1)}$ gibt es vier Gruppen, welche je aus zwei benachbarten Punkten von C_3 bestehen. Sei b_9 eine dieser Stellen; so gibt es ∞^4 unserer Curven, welche C_3 in b_9 berühren; also ∞^3 derselben, welche b_9 zum Doppelpunkte haben, ohne in C_3 und eine weitere Schaar zu zerfallen.

So ist eine ∞^3-Schaar von $C_7(a^3 b_1^2 \ldots b_9^2)$ gefunden; aber man kann dieselbe noch anders definiren. Nimmt man zu einer dieser Curven, welche nicht C_3 zum Factor hat, die Geraden $C_1(a)$ hinzu, so erhält man eine Schaar $C_7(a^3 b_1^2 \ldots b_9^2) \cdot C_1(a)$, welche vermöge $C_3 = 0$ auch auf eine Schaar von irreductiblen Curven

$$C_8(a^4, b_1^2, \ldots b_9^2)$$

reducirt werden kann. Diese ganze Schaar trifft C_3 in einer linearen

∞^1-Schaar $\gamma_2^{(1)}$ von Gruppen von je 2 Punkten, welche aus C_3 auch durch die Geraden $C_1(a)$ ausgeschnitten werden. Eine dieser Curven ist aber $C_4^2(a^2 b_1 \ldots b_9 b_{10})$; wo b_{10} auch auf C_3 liegt; d. h. eine der Gruppen von $\gamma_2^{(1)}$ ist der doppelt gezählte Punkt b_{10}, die Gerade $\overline{a b_{10}}$ muss also C_3 in b_{10} *berühren*.

Dies war in der That bei der Abbildung unserer speziellen Doppelebene $\Omega_6(\Pi^4)$ der Fall, damit eine der Tangenten von Π an Ω bei Π selbst berührt.

Aber umgekehrt *genügt* die Berührung einer Curve $C_3(a, b_{10})$ durch die Gerade $a b_{10}$, um auf eine ∞^3-Schaar von $C_7(a_3 b_1^2 \ldots b_9^2)$ zu führen. Man lege eine beliebige Curve 4ter Ordnung $C_4(a^2, b_{10})$, welche jene C_3 noch in 9 Punkten $b_1, \ldots b_9$ treffe. Die Curven $C_8(a^4 b_1^2 \ldots b_9^2)$ bilden dann eine ∞^7-Schaar, welche C_3 in der, b_{10}^2 corresidualen, Gruppenschaar $\gamma_2^{(1)}$ schneiden, da $C_4^2(a^2 b_1 \ldots b_9, b_{10})$ eine der Curven ist, mit der Gruppe b_{10}^2 aus $\gamma_2^{(1)}$. Die durch eine Gruppe von $\gamma_2^{(1)}$ gehenden Curven der C_8 bilden eine ∞^6-Schaar; legt man daher unsere C_8 durch die Gruppe b_{10}^2 und durch 3 weitere Punkte der Geraden $\overline{a b_{10}}$, so erhält man eine ∞^3-Schaar von Curven $C_8(a^4 b_1^2 \ldots b_9^2 b_{10}^2)$, welche alle in die feste Gerade $C_1(a, b_{10})$, verbunden mit einer ∞^3-Schaar von $C_7(a^3 b_1^2 \ldots b_9^2)$ zerfallen müssen; q. e. d.

Im § 6 werde ich von dieser ∞^3-Schaar ausgehen.

§ 5.

Zweite Methode der Abbildung der $F_4^{(2)}$.

Da die Fläche $F_4^{(2)}$ von dem durch die Gerade $p(x_1 = x_2 = 0)$ gehenden Ebenenbüschel in einer Schaar rationaler Curven 4ter Ordnung geschnitten wird, muss man dadurch zu einer Abbildung gelangen, dass man der Fläche $F_4^{(2)}$ eine Fläche F', eindeutig entsprechen lässt, aus welcher ein Ebenenbüschel eine Schaar von Kegelschnitten ausschneidet. Dies erreicht man am einfachsten durch die direct umkehrbare quadratische Raumtransformation (von sehr speciellem Charakter):

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = x_1 B_1(x) : x_2 B_1(x) : x_3 B_1(x) : x_4 B_1(x) + x_3^2,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = z_1 B_1(z) : z_2 B_1(z) : z_3 B_1(z) : z_4 B_1(z) - z_3^2,$$

wo $B_1(x)$ die in $F_4^{(2)}$ vorkommende, in x_1, x_2 lineare homogene, Function bedeutet; denn es wird

$$F_4^{(2)} = B_1^3(z) \,.\, F_5',$$
$$F_5' \equiv z_4^2 B_1^3 + z_4 B_1(z_3 B_1 C_1 + 2B_3) + [z_3^2(B_1 C_2 - 2B_3) + z_3 B_1 C_3 + B_1 C_4],$$

wo die B, C in z_1, z_2 geschrieben sind.

Die Fläche $F_5' = 0$, von der 5ten Ordnung, enthält eine 3-fache

Gerade $p'(z_1 = z_2 = 0)$; von den Ebenen des Büschels durch p' berührt eine, $B_1 = 0$, die Fläche längs einer Geraden $q'(B_1 = z_3 = 0)$. Singulär ist der Punkt $(p'q')$ oder $z_1 = z_2 = z_3 = 0$; denn jeder ebene Schnitt durch $(p'q')$ erhält nicht nur in $(p'q')$ einen 3-fachen Punkt, sondern noch einen benachbarten Doppelpunkt — nämlich zwei Zweige, einen einfachen und einen 2-elementigen, von derselben Richtung $B_1 = 0$; d. h. F_5' hat bei $(p'q')$ noch eine Selbstberührung, mit Berührungsebene $B_1 = 0$.

Nun bilden sich die ebenen Schnitte einer Fläche $F_5'(p'^3)$ auf einer Ebene Y durch eine ∞^3-Schaar von Curven

$$C_5(a^3 b_1 b_2 \ldots b_{11})$$

ab, die vom Ebenenbüschel durch p' ausgeschnittenen Kegelschnitte durch die $C_1(a)$, die 3-fache Gerade p', verbunden mit der bei $(p'q')$ liegenden Singularität, durch $C_4(a^2 b_1 \ldots b_{11})$. Dabei müssen hier, wo von den 11 im allgemeinen Falle existirenden Ebenen durch p', welche Geradenpaare ausschneiden, zwei in B_1 fallen, zwei der Punkte b_i, etwa b_{10}, b_{11}, auf einer Geraden durch a liegen, und zwar einander benachbart, da die entsprechenden, von $B_1 = 0$ ausgeschnittenen beiden Geraden in q' benachbart liegen; die Gerade $\overline{a b_{10} b_{11}}$ entspricht der Singularität $(p'q')$. Die Abbildung der 3-fachen Geraden p' und des Punktes $(p'q')$, $C_4(a^2 b_1 \ldots b_{11})$, wird also in diese $C_1(a b_{10} b_{11})$ und in eine $C_3(a b_1 \ldots b_9)$ zerfallen. —

Geht man jetzt von der Fläche $F_4^{(2)}$ aus, so entsprechen deren ebenen Schnitten Schnitte von F_5' mit Kegeln 2ter Ordnung K', welche ihre Spitzen auf q' haben, einander längs dieser Geraden berühren mit Berührungsebene B_1 und im Punkte $(p'q')$ einander osculiren. Das Bild des Schnittes von F_5' mit einer beliebigen Fläche 2ter Ordnung, die durch die beiden bei q' benachbarten Geraden von F_5' geht, wird eine

$$C_{10}(a^6 b_1^2 \ldots b_9^2 b_{10}^3 b_{11}^3) \equiv C_1(a b_{10} b_{11}) \cdot C_9(a^5 b_1^2 \ldots b_9^2 b_{10}^2 b_{11}^2).$$

Aber in dieses Bild ist noch das dem Punkte $(p'q')$ Entsprechende eingeschlossen, so dass noch die Gerade $C_1(a b_{10} b_{11})$ mehrfach wegzunehmen ist; wie oft, ergibt folgende Betrachtung:

Vermöge

$$K' \equiv (z_4 B_1 - z_3^2) + B_1(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3)$$

wird F_5' von der Form

$$F_5' \equiv B_1 K'^2 - B_1 z_3 K' \psi_1 - K' \psi_3 + B_1 K_4',$$

wo K_4' ein Kegel 4ter Ordnung ist, der in $(p'q')$ seine Spitze hat; so dass K' von F_5' getroffen wird, wie von $B_1 K_4'$, nämlich in den beiden in q' zusammenfallenden Geraden und in einer Curve, die vier Zweige in $(p'q')$, in der Ebene B_1, hat. Da K_4' von q' *nur* in $(p'q')$ getroffen wird, wird auch jene Curve q' nicht weiter treffen.

Somit muss von $C_{10}(a^6 b_1^2 \dots b_9^2 b_{10}^3 b_{11}^3)$ die Gerade $C_1(a b_{10} b_{11})$ so oft abgehen, dass der Rest b_{10} und b_{11} nicht mehr enthält, also dreimal*); und es bilden sich die ebenen Schnitte von $F_4^{(2)}$ ab mittels einer ∞^3-Schaar von Curven

$$C_7(a^3 b_1^2 b_2^2 \dots b_9^2);$$

wie auch in § 4 gefunden ist.

§ 6.

Discussion der Abbildung der $F_4^{(2)}$.

Am Schlusse von § 4 ist die Construction einer ∞^3-Schaar Σ von Curven

$$C_7(a^3, b_1^2, b_2^2, \dots b_9^2)$$

angegeben, deren Existenz durch die Abbildungen des § 4 und § 5 nachgewiesen ist. Wir können desshalb umgekehrt von einer solchen Schaar ausgehen, dieselbe zur eindeutigen Transformation einer Ebene Y in eine Fläche benutzen und die Eigenschaften dieser Fläche aufsuchen.

Man erhält dann eine Fläche F_4 der Ordnung

$$7 \cdot 7 - 3 \cdot 3 - 9 \cdot 4 = 4.$$

Da eine $C_3(a, b_1, \dots b_9)$ existirt, welche von der Schaar Σ nicht getroffen wird, so ist, wenn C_7' eine specielle Curve der Schaar, welche nicht C_3 zum Factor hat, Σ von der Form

$$C_7' + C_3 \,.\, C_4(a^2 b_1 \dots b_9),$$

wo die C_4 die ∞^2 zu C_7' adjungirten Curven φ vorstellen. Diese C_4 treffen aber die $C_3(a, b_1, \dots b_9)$ in 11 festen Punkten, also noch in einem *weiteren* festen Punkte c (der Punkt b_{10} des § 4); d. h. je zwei der C_4 schneiden einander, ausser in $a, b_1, \dots b_9, c$ nur noch in einem Punktepaar, das zudem (da auch der Büschel $C_3 \,.\, C_1(a)$ zu den C_4 gehört) auf einer Geraden durch a liegt. Dementsprechend existirt ein Ebenenbündel, dessen Geraden die Fläche F_4 nur in Punktepaaren schneiden: ein Doppelpunkt P von F_4. Eine singuläre *Curve* existirt wegen des Geschlechts 3 der Curven Σ nicht; der Doppelpunkt P muss also spezieller Art sein. Nun entspricht dem Punkt P die Curve C_3; den verschiedenen Richtungen, welche die ebenen durch P gehenden Schnittcurven, Γ_4, in P haben, entspricht der Schnitt der $C_4(a^2 b_1 \dots b_9)$ mit C_3, d. h. der *eine* Punkt c von C_3, mit seinen verschiedenen Rich-

*) Dasselbe würde einfacher aus der Ordnung 4 von $F_4^{(2)}$ etc. zu folgern sein.

tungen. Daraus folgt zunächst, dass die Γ_4 in P nur je *einen* zusammenhängenden Zweig haben können, d. h. dass ihr Doppelpunkt in P eine Spitze ist: P wird ein uniplanarer Punkt von F_4. Dasselbe folgt daraus, dass die Geraden durch P in der Ebene B_1, welche durch $C_3^2 C_1(a, c)$ abgebildet wird, die Fläche F_4 nur in je einem Punkte ausserhalb P treffen. — Unter den ebenen Schnitten durch P ist ein Büschel durch eine Gerade p ausgezeichnet, abgebildet durch $C_3^2 . C_1(a)$; da die $C_1(a)$ rationale Curven sind, welche C_3 in je einem Punktepaar treffen, sagt dies aus: die ebenen Schnitte Γ_4', durch eine ausgezeichnete Richtung p von P (die in der Ebene B_1 liegt) sind rationale Curven 4ter Ordnung, welche von P zwei sich in der Richtung p berührende einfache Zweige aussenden. Noch mehr: die beiden Zweige müssen einander *osculiren*, damit *drei* aufeinanderfolgende Doppelpunkte entstehen, die nöthig sind, um die Curven Γ_4' rational zu machen. Dies sieht man auch aus der Abbildung so: Das Bild der Schnitte von F_4 mit beliebigen Flächen 2ter Ordnung, die nur durch P gehen und daselbst eine p enthaltende Tangentenebene haben, wird eine Schaar von $C_8(a^4 b_1^2 \ldots b_9^2)$, die die $C_3(a b_1 \ldots b_9)$ in den Punktepaaren schneiden, in denen auch die obigen Geraden $C_1(a)$ treffen; daher gehen diese Flächen 2ter Ordnung, sobald man sie durch einen dritten Punkt des einen Zweiges einer Curve Γ' in P legt, damit zugleich durch den dritten Punkt des andern Zweiges, d. h. diese Zweige osculiren sich. Man sieht, dass die Singularität von F_4 in P so bezeichnet werden könnte, dass diesem uniplanaren Doppelpunkt in der Richtung p unendlich benachbart eine *Selbstberührung* der Fläche eintritt.

Das bezeichnete Verhalten der Schnitte durch P ist genau das der Fläche $F_4^{(2)}$ von § 2, auf welche also die allgemeinste Schaar Σ führt.

Ich benutze nun die Abbildung zur Aufsuchung der bemerkenswerthesten Curven und Curvensysteme der $F_4^{(2)}$. Zunächst ergeben sich die 9 Kegelschnittpaare, von Ebenen durch p ausgeschnitten, aus den Bildern b_i, $C_1(a, b_i)$; die beiden Kegelschnitte eines Paares osculiren einander in P. Sodann, aus der Abbildung $C_1(a, c)$, von einer Ebene B_1 durch p ausgeschnitten eine ebene Curve 4ter Ordnung, welche in P einen 3-fachen Punkt hat, da $C_1(a, c)$ von den $C_4(a^2 b_1 \ldots b_9 c)$ nur in je *einem* beweglichen Punkt getroffen wird; die 3 Elemente des 3-fachen Punktes bilden nur *einen* Zweig von der Richtung p, da, nach dem Früheren, die Gerade $C_1(a, c)$ die Curve C_3 nicht in zwei verschiedenen Punkten ausserhalb a trifft, sondern in c berührt.

R_3 von $F_4^{(2)}$: Es gibt auf $F_4^{(2)}$ 256 einzelne Raumcurven 3ter Ordnung, welche alle durch P in der Richtung p gehen, abgebildet durch den Punkt a, die Geraden durch 2 der Punkte b_i, die Kegelschnitte durch a und 4 der Punkte b_i, die $C_3(a^2)$ durch 6 der b_i und die $C_4(a^3)$ durch 8 der b_i. Alle diese R_3 treffen jede der rationalen Γ_4 der Fläche

in je einem Punkte, so dass eine jede der R_3 zu einer Abbildung von $F_4^{(2)}$ führt. So gibt es 256 gleichberechtigte Abbildungen. Nimmt man aus 8 der 9 Kegelschnittpaare von $F_4^{(2)}$ je einen Kegelschnitt beliebig heraus, so gibt es *eine* zugehörige R_3, welche diese 8 Kegelschnitte trifft. Je nach dieser Zuordnung schneiden sich zwei der R_3 in keinem, einem, 2 oder 3 Punkten. —

Die Raumcurven 3^ter Ordnung schneiden den Kegel $x_4 B_1 + x_3^2 = 0$ in P dreipunktig, weil die Transformation des § 5 wieder zu R_3 der Fläche F_5', a entsprechend, führen muss; ihre Parameterdarstellung erhält also die Form:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mu^2\lambda : \mu^3 : \mu(\gamma_0\lambda^2 + \gamma_1\lambda\mu + \gamma_2\mu^2)$$
$$: (-\gamma_0^2\lambda^3 + \beta_1\lambda^2\mu + \beta_2\lambda\mu^2 + \beta_3\mu^3),$$

wo $\mu = 0$ der $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ entsprechende Parameterwerth ist. Das Abbildungsproblem, auf welche unsere $F_4^{(2)}$ direct führen würde, wäre also das Folgende: Man suche die R_3, welche durch P in der Richtung p gehen (4 Bedingungen), einen benachbarten Punkt in $x_4 B_1 + x_3^2 = 0$ haben (1 Bedingung) und 7 Kegelschnitte (je einen aus 7 der Paare) je einmal treffen (7 Bedingungen); dies gibt eine endliche Zahl von R_3, welche $F_4^{(2)}$ in $4 + 2 + 7 = 13$ Punkten treffen, also auf $F_4^{(2)}$ liegen. Unsere Abbildung gibt 2 als Anzahl der Lösungen des Problems. —

Weitere Schnitte von $F_4^{(2)}$ mit $F_2(Pp)$: Das Bild der Schnitte von $F_4^{(2)}$ mit denjenigen Flächen 2^ter Ordnung, welche durch P gehen und daselbst eine durch p gehende Tangentenebene haben, wird die ∞^7-Schaar von

$$C_8(a^4, b_1^2, \dots b_9^2).$$

Die Schnitte erhalten zwei einander in P, in der Richtung p, osculirende Zweige. Darunter sind diejenigen besonders hervorzuheben, welche in eine der obigen R_3 von $F_4^{(2)}$, und in eine *∞^2-Schaar von Raumcurven 5^ter Ordnung vom Geschlecht* 2 zerfallen, alle in der Richtung $\overline{Pp}$ einander osculirend. Solcher Schaaren gibt es, den einzelnen R_3 zugeordnet, 256; und die Curven einer Schaar osculiren die zugehörige R_3 in P, treffen dieselbe noch in 5 weiteren Punkten, und einander in je 2 beweglichen Punkten. In jeder solchen ∞^2-Schaar gibt es eine einzige ∞^1-Schaar von *rationalen Raumcurven 5^ter Ordnung*, welche je *zwei* einander in der Richtung $\overline{Pp}$ berührende, aber nicht osculirende, Zweige in P haben — ausgeschnitten von $F_2(R_3)$ mit Tangentenebene B_1 in P. Wenn das Bild von R_3 der Punkt a ist, wird das der ∞^2-Schaar zu $C_8(a^5 b_1^2 \dots b_9^2)$, das der ∞^1-Schaar zu $C_5(a^4 b_1 \dots b_9)$; die durch $C_5(a^4 b_1 \dots b_9 c)$ dargestellte Curve wird dann von dem Kegel 2^ter Ordnung ausgeschnitten, der seine Spitze in P hat und durch die R_3 geht.

R_4^1 *auf* $F_4^{(2)}$: Auch ein Zerfallen der Schnitte von $F_4^{(2)}$ mit $F_2(Pp)$ in zwei Raumcurven 4ter Ordnung vom Geschlechte 1 kann eintreten. So wenn das Bild zu

$$C_3(ab_3b_4\ldots b_9)\,.\,C_5(a^3b_1^2b_2^2b_3b_4\ldots b_9)$$

wird. Aus einer R_4' ergeben sich zwei zugeordnete Curvenbüschel, deren Curven alle in P einander osculiren, während die Curven des einen Büschels die des andern noch weiter in je 5 Punkten treffen. In jedem solchen Büschel befindet sich eine R_4^1, welche in zwei der Kegelschnitte von $F_4^{(2)}$ zerfällt (in der Schaar aus $C_3(ab_3\ldots b_9)$ die aus den b_1 und b_2 entsprechenden Kegelschnitten gebildete Curve). Solcher Büschel gibt es also $4\,.\,36$, oder $2\,.\,36$ Büschelpaare.

Man kann ein solches Büschelpaar zur Erzeugung der Fläche 4ter Ordnung $F_4^{(2)}$ mittels Flächenbüschel zweiter Ordnung benutzen. Schreibt man die Bedingungen der Osculation in P an, so sieht man, dass, wenn man $F_4^{(2)}$ in die Form

$$F_4^{(2)} \equiv F_2\Phi_2' - F_2'\Phi_2$$

setzt, man für F_2, F_2', Φ_2, Φ_2' Ausdrücke der Form annehmen darf:

$$F_2 = x_4B_1 + x_3^2 + x_3f_1 + f_2,\quad F_2' = f_2',$$
$$\Phi_2 = x_4x_2 + x_3\varphi_1 + \varphi_2,\quad \Phi_2' = x_4B_1 + x_3^2 + x_3\varphi_1' + \varphi_2',$$

wo die $f_i, f_i', \varphi_i, \varphi_i'$ homogene Functionen i^{ter} Dimension in x_1, x_2 vorstellen.

§ 7.

Die Fläche $F_4^{(3)}$. Abbildung auf die Ebene.

Die eindeutige Abbildung der in II. § 2 definirten Fläche

$$F_4^{(3)} \equiv x_4^2x_1^2 + 2x_4f_3(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wo

$$f_3 = x_3x_1D_1(x_1, x_2) + B_3(x_1, x_2),$$
$$f_4 = -x_3^3x_1 + x_3^2C_2(x_1, x_2) + x_3C_3(x_1, x_2) + C_4(x_1, x_2),$$

auf die Ebene kann dadurch geschehen, dass man diese Fläche vom Knotenpunkt P ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) aus auf eine Doppelebene Ξ, mit Uebergangscurve $\Omega(\xi)$ von der 6ten Ordnung, die zwei benachbarte 3-fache Punkte besitzt, projicirt, und diese Doppelebene dann auf eine einfache Ebene Y, nach meinem vorstehenden Aufsatze, abbildet. Das Erstere geschieht mittels der Formeln:

$$\varrho x_1 = \xi_1^3,\quad \varrho x_2 = \xi_1^2\xi_2,\quad \varrho x_3 = \xi_1^2\xi_3,$$
$$\varrho x_4 = -f_3(\xi) + \sqrt{\Omega(\xi)},$$

für

$$\Omega(\xi) = f_3^2(\xi) - \xi_1^2 f_4(\xi) \equiv \xi_3^3\xi_1^3 + \xi_3^2\xi_1^2\left(D_1^2(\xi) - C_2(\xi)\right)$$
$$+ \xi_3\xi_1\left(2D_1(\xi)B_3(\xi) - \xi_1 C_3(\xi)\right) + \left(B_3^2(\xi) - \xi_1^2 C_4(\xi)\right),$$

wobei der singuläre Punkt in $\xi_1 = \xi_2 = 0$ liegt und die Gerade $\xi_1 = 0$ die beiden dort benachbart liegenden dreifachen Punkte Π, Π_1 von $\Omega(\xi) = 0$ verbindet. Den ebenen Schnitten von $F_4^{(3)}$

$$\sum_1^4 u_i x_i = 0$$

entsprechen in Ξ die Curven

$$\Gamma_4 \equiv \xi_1^2\Big(\sum_1^3 u_i\xi_i\Big)^2 - 2u_4 f_3(\xi)\cdot\sum u_i\xi_i + u_4^2\cdot f_4(\xi) = 0,$$

aber nur in dem Blatte genommen, für welches

$$u_4\sqrt{\Omega(\xi)} = u_4 f_3(\xi) - \xi_1^2\sum u_i\xi_i.$$

Diese Curven 4^{ter} Ordnung, $\Gamma_4 = 0$, gehen durch Π und Π_1 einfach und berühren $\Omega(\xi) = 0$ ausserdem in je 9 Punkten; der Gleichung gemäss:

$$\xi_1^2\Gamma_4 \equiv \Big[\xi_1^2\sum u_i\xi_i - u_4 f_3(\xi)\Big]^2 - u_4^2\Omega(\xi).$$

Die Curven Γ_4 *osculiren* sogar einander in Π, denn für irgend zwei der Curven $\Gamma_4(u)$, $\Gamma_4(v)$ wird

$$v_4^2\Gamma_4(u) - u_4^2\Gamma_4(v) = \Big(v_4\sum u_i\xi_i - u_4\sum v_i\xi_i\Big)$$
$$\cdot\Big[\xi_1^2\Big(v_4\sum u_i\xi_i + u_4\sum u_i\xi_i\Big) - 2u_4v_4f_3(\xi)\Big],$$

d. h. $\Gamma_4(u)$ wird von $\Gamma_4(v)$ in Π, Π_1 getroffen wie von einer Curve $C_3(\Pi^2\Pi_1)$, also dreipunktig. Es kommt dies daher, dass die Fläche $F_4^{(3)}$ nicht nur eine Gerade $p = \overline{P\Pi}(x_1 = x_2 = 0)$ enthält, sondern noch zwei weitere, p successive von P ausgehende Geraden. In der That *berührt* die Ebene $x_1 = 0$ die Fläche längs p; und der Kegel 2^{ter} Ordnung

$$K \equiv x_3x_1 - C_2(x_1, x_2) = 0$$

trifft $F_4^{(3)}$ wegen

$$F_4^{(3)} \equiv x_4x_1(x_4x_1 + 2x_3D_1) + (2x_4B_3 + x_3C_3 + C_4) - x_3^2K$$

in *drei* aufeinanderfolgenden Geraden. Die Curven Γ_4 haben also einen weiteren, Π, Π_1 successiven, einfachen Fundamentalpunkt, der mit Π' bezeichnet sei, gelegen auf dem Kegelschnitt $\xi_3\xi_1 - C_2(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Legt man den ebenen Schnitt von $F_4^{(3)}$ durch P, so erhält man als Bild in Ξ die Curve $\xi_1^2 = 0$, verbunden mit den beide Blätter durchsetzenden Geraden dieser Ebene. Ein solcher Schnitt hat P zum gewöhnlichen Rückkehrpunkt (mit Richtung in $x_1 = 0$), welchem der einfache Punkt entspricht, in dem die Gerade die Linie $\xi_1 = 0$ in *einem* Blatte, etwa als Linie $\xi_1^{(2)}$, trifft. Unter diesen Schnitten sind die durch die Gerade p gelegten ausgezeichnet; sie zerfallen in p und in Curven 3ter Ordnung vom Geschlechte 1, welche alle die Gerade p bei P *osculiren*. Denselben entsprechen in Ξ die, beide Blätter durchsetzenden, Geraden durch Π; und zwar entspricht dem Verzweigungspunkt, den eine solche Gerade in Π hat, dass die Curve 3ter Ordnung zwei, P benachbarte, auf einer Geraden p gelegene Punkte besitzen muss: die Osculation mit p.

Unter diesen Schnitten wiederum ist der der Ebene $x_1 = 0$ ausgezeichnet; dieselbe berührt $F_4^{(3)}$ längs p und trifft noch in einem Kegelschnitt k, welcher p bei P berührt. Dem entspricht in Ξ die Gerade $\xi_1 = 0$, welche in beiden Blättern gesondert verläuft, als Gerade $\xi_1^{(1)}$, bez. $\xi_1^{(2)}$; als Gerade $\xi_1^{(1)}$ entsprechen deren Punkte einzeln den Punkten des Kegelschnitts k; als Gerade $\xi_1^{(2)}$, wie schon oben gesagt, einzeln den Rückkehrpunkten (mit Richtung in $x_1 = 0$), welche die durch P in von p verschiedener Richtung gehenden Curven von $F_4^{(3)}$ bei P besitzen. —

Trifft eine Curve von $F_4^{(3)}$ die Gerade p in irgend einem von P verschiedenen Punkte, so geht die in Ξ projicirte Curve durch Π und Π_1 mit einem einfachen Zweige und mit der *bestimmten* Krümmung $\Pi\Pi_1\Pi'$, wie das Verhalten der Curven Γ_4 zeigt. Berührt die Curve von $F_4^{(3)}$ die Gerade p in P, ohne p zu osculiren, aber mit Schmiegungsebene $x_1 = 0$ in P, so geht das Bild einfach durch Π, Π_1, aber mit von $\Pi\Pi_1\Pi'$ verschiedener Krümmung. Osculirt endlich die Curve von $F_4^{(3)}$ die Gerade p in P, so erhält das Ξ-Bild in Π einen Rückkehr- (bez. Verzweigungs-)punkt, mit von $\xi_1 = 0$ verschiedener Richtung; wie wieder die Bilder der durch P gelegten ebenen Schnitte von $F_4^{(3)}$ ergeben. —

Die Doppelebene Ξ bildet sich nun auf eine einfache Ebene Y so ab, dass die Geraden von Ξ in eine Curvenschaar:

$$\Gamma_3(\alpha\Gamma_3 + \alpha'\Gamma_3') + \alpha'' f_6 = 0$$

von Curven 6ter Ordnung übergehen, wo f_6 eine solche Curve ist, die 8 Punkte $a_1, \ldots a_8$ zu Doppelpunkten hat, $\alpha\Gamma_3 + \alpha'\Gamma_3' = 0$ der Büschel von Curven 3ter Ordnung, die durch $a_1, \ldots a_8$ gehen. Die Schaar hat $a_1, \ldots a_8$ zu Doppelpunkten und die beiden weiteren Schnittpunkte b_1, b_2 von $\Gamma_3 = 0, f_6 = 0$ zu einfachen Punkten.

Die beiden Punkte b_1 und b_2 entsprechen dabei den über $\xi_1 = 0$ liegenden Geraden $\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}$, welche die Bilder von Kegelschnitt k, bez. Punkt P, von $F_4^{(3)}$ sind. Da die ebenen Schnitte von $F_4^{(3)}$ k zweimal, P nicht treffen, müssen ihre Bilder in der einfachen Ebene Y, die als

Schaar Σ bezeichnet seien, b_1 zum Doppelpunkt haben und können durch b_2 nicht gehen.

Den Punkten $a_1, \dots a_8$ entsprechen in Ξ 8 Kegelschnitte, welche durch Π und Π_1 gehen und $\Omega(\xi)$ je in drei Punkten berühren; nur je in einem Blatte von Ξ laufend. Einem solchen Kegelschnitt A entsprechend, erhalten wir auf $F_4^{(3)}$ eine durch P in der Richtung p gehende Raumcurve, die von der dritten Ordnung wird, weil A ihre Projection aus P ist; dieselbe hat in P die Schmiegungsebene $x_1 = 0$, ohne k zu osculiren. Die Bilder Σ der ebenen Schnitte von $F_4^{(3)}$ in Y müssen also, da die Schnitte diese Raumcurven in 3 Punkten treffen, die Punkte $a_1, \dots a_8$ je zu dreifachen Punkten haben.

Endlich existirt für diese Schaar Σ in Y noch ein einfacher Fundamentalpunkt b. Denn wir haben gesehen, dass die Curven Γ_4 von Ξ, die jener entsprechen, durch Π, Π_1 einfach gehen und daselbst eine und dieselbe Krümmung $\Pi\Pi_1\Pi'$ haben. Aber den durch Π und Π_1 gehenden Zweigen entsprechen, je nach ihrer Krümmung, in Y die verschiedenen Punkte der Curve Γ_3, welche durch $a_1 a_2 \dots, a_8, b_1, b_2$ geht. Somit hat die Schaar Σ noch einen bestimmten, Π' entsprechenden, Punkt b von Γ_3 zum einfachen Punkt.

Für die Bestimmung der Ordnung der gesuchten Bildcurven in Y kann man den Schnitt mit dem Curvenbüschel $\alpha\Gamma_3 + \alpha'\Gamma_3' = 0$ durch $a_1, \dots a_8$ benutzen. Der 9[te] Basispunkt des Büschels, c, gehört jenen Curven Σ nicht an; denn demselben entsprechen in Ξ die von $\xi_1 = 0$ verschiedenen Richtungen durch Π, auf $F_4^{(3)}$ also eine Osculation einer Curve mit p am Punkte P. Die Curven der Schaar Σ,

$$C_r(a_1^3 \dots a_8^3 b_1^2 b),$$

müssen aber von dem Curvenbüschel 3[ter] Ordnung $(a_1 \dots a_8)$ in je 3 beweglichen Punkten getroffen werden; was $r = 9$ liefert. Ein weiterer Fundamentalpunkt kann dann nicht auftreten, weil zwei solche Curven 9[ter] Ordnung bereits 77 feste Schnittpunkte haben und sich in 4 beweglichen Punkten schneiden sollen.

Somit bilden sich die ebenen Schnitte der Fläche $F_4^{(3)}$ auf der einfachen Ebene Y ab mittels einer ∞^3-Schaar Σ von Curven

$$C_9(a_1^3 a_2^3 \dots a_8^3 b_1^2 b),$$

wobei $a_1 a_2 \dots a_8 b_1 b$ auf einer Curve 3[ter] Ordnung, Γ_3, liegen. —

Es gibt 2 . 64 . 135 gleichberechtigte Arten, die $F_4^{(3)}$ mittels solcher Curven 9[ter] Ordnung auf eine Ebene eindeutig abzubilden. Denn so viele Arten gab es, die Doppelebene Ξ, mit Unterscheidung der beiden Blätter, auf eine einfache Ebene Y abzubilden. Die obige Abbildung ist dem System der 8 Raumcurven 3[ter] Ordnung zugeordnet, die auf $F_4^{(3)}$ liegen und durch $a_1, a_2, \dots a_8$ abgebildet sind; Curven, die einander, ausser bei P, nicht schneiden. Und so ist jede Art einem analogen

8-System von Raumcurven 3^{ter} Ordnung von $F_4^{(3)}$ zugeordnet, von denen — den 120 Kegelschnitten durch Π, Π_1 entsprechend, die $\Omega(\xi)$ in je 3 Punkten berühren — 2 . 120 auf der Fläche liegen. —

Durch Benutzung einer solchen Raumcurve 3^{ter} Ordnung kann man $F_4^{(3)}$ auch direkt in eine andere bekannte Fläche überführen. Sei nämlich K_2 einer der $\Omega(\xi)$ in 3 Punkten berührenden Kegelschnitte durch Π und Π_1; so wird

$$\Omega(\xi) \equiv K_3^2 - K_2 K_4,$$

wo K_3 Π zum Doppel-, Π_1 zum einfachen Punkte, K_4 beide Punkte zu Doppelpunkten hat:

$$\begin{aligned} K_2 &\equiv \xi_3 \xi_1 + L_2(\xi_1 \xi_2), \\ K_3 &\equiv \xi_3 \xi_1 \xi_2 + L_3(\xi_1, \xi_2), \\ K_4 &\equiv \xi_3^3 \xi_1^2 + \xi_3 \xi_1 M_2(\xi_1, \xi_2) + M_4(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Mittels der Formeln

$$\sigma y_1 = \xi_1 K_2, \quad \sigma y_2 = \xi_2 K_2, \quad \sigma y_3 = \xi_3 K_2, \quad \sigma y_4 = -K_3 + \sqrt{\Omega(\xi)}$$

kommt man dann von der Doppelebene Ξ eindeutig zur Fläche

$$\begin{aligned} \Phi_4 \equiv K_2(y) \cdot y_4^2 + 2K_3(y) \cdot y_4 + K_4(y) \\ \equiv y_3^2 y_1^2 + y_3 y_1 [M_2(y) + 2y_2 y_4 + y_4^2] \\ + [M_4(y) + 2y_4 L_3(y) + y_4^2 L_2(y)] = 0, \end{aligned}$$

und der direkte eindeutige Uebergang von $F_4^{(3)}$ zu Φ_4 wird durch die Formeln geleistet:

$$\varrho x_1 = y_1^3, \quad \varrho x_2 = y_1^2 y_2, \quad \varrho x_3 = y_1^2 y_3, \quad \varrho x_4 = -f_3(y) + K_3(y) + y_4 K_2(y).$$

Die Fläche Φ_4 hat aber einen *Selbstberührungspunkt* in $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ *und einen konischen Doppelpunkt* in $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, der auf der Berührungsebene des ersteren Punktes liegt; d. h. *sie enthält die zusammengesetzte Singularität von $F_4^{(3)}$ in zwei gewöhnliche Singularitäten zerlegt.* Auch bei Φ_4 berührt die Ebene $y_1 = 0$ längs der Geraden $y_1 = y_2 = 0$, und der Kegel $y_3 y_1 + L_2 = 0$ osculirt längs dieser Geraden. Φ_4 lässt sich als specieller Fall von $F_4^{(1)}$ erledigen.

§ 8.

Discussion der Abbildung der $F_4^{(3)}$.

Wir wollen jetzt umgekehrt von der ∞^3-Schaar Σ:

$$C_9(a_1^3, a_2^3, \ldots a_8^3, b_1^2, b)$$

wo eine

$$\Gamma_3(a_1, a_2, \ldots a_8, b_1, b)$$

existirt, ausgehen, da wir wissen, dass sie zur eindeutigen Transformation einer Ebene Y in eine Fläche dienen kann.

Diese Fläche F_4 wird zunächst von der Ordnung

$$9 \cdot 9 - 9 \cdot 8 - 4 - 1 = 4.$$

Die Γ_3 wird von den Curven der Schaar Σ nicht mehr in beweglichen Punkten getroffen; ist daher C_9' eine specielle, Γ_3 nicht als Factor enthaltende Curve von Σ, so wird diese Schaar von der Form:

$$\sum \equiv C_9' + \Gamma_3 \cdot C_6(a_1^2 a_2^2 \cdots a_8^2 b_1),$$

wo die C_6 eine ∞^2-Schaar von zu C_9' adjungirten Curven φ vorstellen, welche alle noch durch einen festen Punkt b_2 von Γ_3 gehen. Je zwei dieser Curven C_6 schneiden sich also nur in einem beweglichen Punktepaar, d. h. die Fläche F_4 hat einen Doppelpunkt P. Diesem Punkt P entspricht die Curve Γ_3, und zwar entspricht den verschiedenen Richtungen der ebenen durch P gelegten Schnitte daselbst der Schnitt der C_6 mit Γ_3, also nur der *eine* Punkt b_2. Man schliesst daraus, dass die beiden Elemente jenes Schnittes in P nur *einen* Zweig bilden: P ist also ein uniplanarer Punkt von F_4. — Unter den ebenen Schnitten durch P ist der Büschel durch eine Gerade p ausgezeichnet, welcher durch $\Gamma_3^2 \cdot C_3(a_1 a_2 \ldots a_8)$ abgebildet wird: es werden ebene Curven 3ter Ordnung vom Geschlechte 1. Daraus folgt zunächst, dass die Gerade p der Fläche F_4 angehört; und weiter, da $\Gamma_3^2 C_3$ einmal mehr durch b geht, als $\Gamma_3 C_6$: dass einem Durchlegen der Bildcurve durch b ein Zerfallen der Curve von F_4 in p und eine weitere Curve entspricht: b ist das Bild der Geraden p. Weiter wird, indem man diese $C_3(a_1 \ldots a_8)$ *noch* durch b_1 und b gehen lässt, ein Schnitt erhalten, der durch Γ_3^3 abgebildet wird und aus einem, dem Fundamentalpunkt b_1 entsprechenden Kegelschnitt k von F_4 und aus der nun zweimal zu nehmenden Geraden p bestehen muss; d. h. es gibt eine Ebene, welche F_4 längs der Geraden p berührt.

Die Curven 3ter Ordnung, welche von den durch p gelegten Ebenen aus F_4 ausgeschnitten werden, treffen p ausserhalb P nicht mehr, da ihre Bilder, die $C_3(a_1 \ldots a_8)$, nicht durch b gehen. Dieselben *osculiren* also p bei P. Diesem Verhalten der Curven in P entspricht in Y der Schnitt der $C_3(a_1 \ldots a_8)$ mit Γ_3, d. h. das Durchgehen durch den 9ten Basispunkt c des letzten Büschels. Ebenso muss der durch b_1 abgebildete Kegelschnitt k die Gerade p bei P berühren.

Von den Punkten der Curven Γ_3, welche P entspricht, ist bisher die Bedeutung der Punkte $a_1, \ldots a_8, b_1, b_2, b, c$ angegeben, und es bleibt noch die der übrigen Punkte von Γ_3 zu erörtern. Zu dem Zwecke schneiden wir F_4 mit den ∞^3 Kegeln 2ter Ordnung, die ihre Spitze in P haben und F_4 längs p berühren; die Bilder der Schnittcurven S sind die

$$S' \equiv C_6(a_1^2, a_2^2, \ldots a_8^2).$$

Denn ein ebener Schnitt durch P bildet sich durch die

$$C_6(a_1^2 \ldots a_8^2 b_1 b_2)$$

ab, ein Schnitt mit einem Kegel 2ter Ordnung mit Spitze in P also durch die $C_{12}(a_1^4 \ldots a_8^4 b_1^2 b_2^2)$, und wenn der Kegel F_4 längs p berührt, durch

$$C_{12}(a_1^4 \cdots a_8^4 b_1^2 b_2^2 b^2) \equiv \Gamma_3^2 \cdot C_6(a_1^2 \cdots a_8^2).$$

Diese Schnitte S sind Raumcurven 6ter Ordnung, vom Geschlechte 2, welche je zwei getrennte Zweige in P haben, da die S' die Γ_3 in je einem Punktepaar (corresidual zum Paar $b_1 b_2$) treffen. Die beiden Zweige sind einfache, weil eine solche Raumcurve 6ter Ordnung von einer Ebene durch P in noch vier Punkten ausserhalb P, nach der Abbildung, geschnitten wird. Zugleich berührt jeder der Zweige die Gerade p in P, weil die S die Gerade p ausserhalb P nicht treffen, eine beliebige durch p gehende Ebene aber die S nur in je 2 Punkten trifft. Endlich hat jeder der Zweige in P die Ebene $x_1 = 0$ zur Schmiegungsebene; denn da die S' auch nicht durch b_1 gehen, treffen die S die Ebene $x_1 = 0$ weder in p noch in k ausserhalb P. Dabei findet auch nicht etwa eine Osculation mit dem Kegelschnitt k statt; denn da sich die Schnitte von F_4 mit den p in P berührenden Flächen 2ter Ordnung F_2 durch $C_{12}(a_1^4 \ldots a_8^4 b_1^2)$ abbilden, also wenn die F_2 noch durch k gelegt werden, durch $C_{12}(a_1^4 \ldots a_8^4 b_1^3)$, treffen diese letzteren F_2 die S ausserhalb P in 8, bei P also in nur 4 Punkten.

So entsprechen also den verschiedenen Punkten von Γ_3 auf F_4 einfache Curvenzweige, die p in P berühren und $x_1 = 0$ dort zur Schmiegungsebene haben. Aber natürlich können die Krümmungen dieser Zweige den Punkten von Γ_3 nicht *eindeutig* zugeordnet sein. Betrachtet man vielmehr wieder die p in P berührenden F_2, so treffen deren Bilder $C_{12}(a_1^4 \ldots a_8^4 b_1^2)$ die Γ_3 in Punktepaaren, die dem doppelt gezählten Punkt b_2 corresidual sind; einem solchen Punkte*paar* kann nur eine und dieselbe Krümmung eines Zweiges auf F_4 entsprechen. Die Unterscheidung findet da erst durch den vierten, aus der Ebene $x_1 = 0$ heraustretenden, Punkt des Zweiges statt. —

Legt man die Curven S' noch durch den Punkt b, so erhält man ∞^2 Kegel zweiter Ordnung, welche ihre Spitze in P haben und die Fläche längs der Geraden p *osculiren*. F_4 enthält also drei successive, von p ausgehende, Gerade. —

Somit sind alle in § 7 bezeichneten Eigenschaften der Fläche $F_4^{(4)}$ aus der Discussion der Abbildungsfunctionen in der F_4 wiedergefunden. —

Es sollen jetzt noch die einfachsten Curven von $F_4^{(3)}$ durch die Abbildung aufgesucht werden.

R_3 von $F_4^{(3)}$: Auf $F_4^{(3)}$ liegen 2 . 120 Raumcurven 3ter Ordnung, welche alle durch P gehen, daselbst p berühren und $x_1 = 0$ zur Schmie-

gungsebene haben. Die Bilder in Y sind die im vorhergehenden Aufsatze bezeichneten Bilder der in der Ξ-Ebene die Curve Ω in 3 Punkten berührenden, durch Π, Π_1 gehenden Kegelschnitte. — Je zwei der Curven gehören zusammen, insofern sie sich ausserhalb P in noch 3 Punkten treffen und durch *einen* Kegel 2ter Ordnung mit Spitze in P, der $F_4^{(3)}$ noch längs p berührt, aus $F_4^{(3)}$ ausgeschnitten werden können. Irgend eine dritte der Curven wird von der einen Curve eines Paars in einem, von der andern Curve des Paars in zwei Punkten, ausserhalb P, getroffen.

Rationale R_4 *von* $F_4^{(3)}$: Es gibt 2 . 8 . 135 rationale Raumcurven 4ter Ordnung (zweiter Species) auf $F_4^{(3)}$. Dieselben gehen ebenfalls durch P, mit Berührung an p und Schmiegungsebene $x_1 = 0$ daselbst, und treffen die Gerade p weiter nicht mehr. Deren Bilder in Y werden erhalten, wenn man die im vorstehenden Aufsatze unter § 3, VI, a_1) . . . d) gegebenen Curven von Y noch durch den Punkt b_1 gehen lässt. Auch die Zuordnung einer solchen Curve zu sieben Paaren von Curven R_3 von $F_4^{(3)}$ ist aus jenem Aufsatze zu entnehmen.

Je zwei der Curven gehören zusammen, insofern sie durch *eine* Fläche zweiter Ordnung, die p in P berührt, aus $F_4^{(3)}$ ausgeschnitten werden. So hat man z. B. zwei Paare, deren Bilder sind

$$C_1(a_1 b_1);\quad C_{11}(a_1{}^3 a_2{}^4 \ldots a_8{}^4 b_1)$$

und

$$C_2(a_1 \ldots a_4 b_1);\quad C_{10}(a_1{}^3 \ldots a_4{}^3 a_5{}^4 \ldots a_8{}^4 b_1).$$

Die 2 Curven eines solchen Paars treffen sich in 7 Punkten ausserhalb P und *osculiren* einander in P, nach dem Früheren, insofern ihre Bilder Γ_3 in einem zu $b_2{}^2$ corresidualen Punktepaar schneiden; während eine Curve eine andere, die mit ihr kein solches Paar bildet, nicht in P osculirt und mit ihr 0, 1, . . . 6 Schnittpunkte ausserhalb P gemein hat.

Weitere Schnitte mit F_2: Von weiteren Curven der Fläche, die sich aus der Abbildung, insbesondere aus den in der vorstehenden Abhandlung betrachteten Curven der Y-Ebene, nun leicht ergeben, will ich nur noch die einfachsten Spezialisirungen der Schnitte von $F_4^{(3)}$ mit Flächen zweiter Ordnung anführen.

Lässt man die Kegel 2ter Ordnung mit Spitze in P, welche $F_4^{(3)}$ längs der Geraden p berühren und welche eine ∞^3-Schaar von Raumcurven 6ter Ordnung vom Geschlecht 2 ausschneiden, die Fläche längs p osculiren, so erhält man eine ∞^2-Schaar von Raumcurven 5ter Ordnung, vom Geschlecht 2, abgebildet durch die $C_6(a_1{}^2, \ldots a_8{}^2 b)$. Dieselben berühren p in P, osculiren einander dort in der Ebene $x_1 = 0$, treffen sich ausserdem noch in je 2 Punkten und treffen p ausserhalb P in je einem Punkte.

Davon ganz verschieden sind 2 . 120 ∞^2-Schaaren von Raumcurven 5^{ter} Ordnung vom Geschlecht 2 auf $F_4^{(3)}$. Eine solche Schaar wird erhalten, indem man die Flächen 2^{ter} Ordnung durch eine der R_3 von $F_4^{(3)}$ legt, ist also dieser R_3 eindeutig zugeordnet. Wenn das Bild der R_3 etwa die $C_6(a_1^3 a_2^2 \ldots a_8^2)$ ist, wird das Bild der Schaar zu

$$C_6(a_1 a_2^2 \ldots a_8^2 b_1^2).$$

Auch die Curven dieser Schaar verhalten sich bei P wie die oben genannte Schaar und osculiren dort die R_3, aber sie treffen p ausserhalb P nicht mehr, dagegen den Kegelschnitt k in 2 Punkten. — Der Schaar zugeordnet ist dann eine zweite solche, abgebildet durch

$$C_{12}(a_1^5 a_2^4 \ldots a_8^4 b_1^2),$$

deren Curven die der ersten Schaar ausserhalb P in je 7 Punkten treffen. Die Curven *einer* Schaar treffen einander in je 2 Punkten.

Unter den Curven einer solchen Schaar ist enthalten: die Gerade p, verbunden mit einer ∞^1-*Schaar von Raumcurven* 4^{ter} *Ordnung vom Geschlecht* 1 (erster Species), R_4', von welchen Schaaren es also ebenfalls 2 . 120 auf $F_4^{(3)}$ gibt. *Eine* solche Schaar ist abgebildet durch

$$C_3(a_2 a_3 \ldots a_8 b_1),$$

indem die obigen C_6, wenn sie noch durch b gehen sollen, in Γ_3 und diese C_3 zerfallen müssen. Die R_4^1 eines Büschels osculiren ebenfalls einander in $x_1 = 0$ und berühren p bei P; je zwei der Curven treffen ausserdem einander nicht.

Zu einem solchen Büschel erhält man, durch den Schnitt mit Flächen 2^{ter} Ordnung, einen zugeordneten Büschel von R_4^1 auf $F_4^{(3)}$, abgebildet durch

$$C_9(a_1^4 a_2^3 \ldots a_8^3 b_1).$$

Die Curven dieses Büschels osculiren bei P nicht nur einander, sondern auch die Curven des zugeordneten Büschels; sie treffen diese Curven ausserdem noch in je 5 Punkten.

Somit ergibt sich auch für die $F_4^{(3)}$ eine Erzeugung mittels Flächenbüschel zweiter Ordnung. Setzt man

$$F_4^{(3)} \equiv F_2 \Phi_2' - F_2' \Phi_2,$$

so kann man für die $F_2, F_2', \Phi_2, \Phi_2'$ Ausdrücke der Form annehmen:

$$F_2 = x_4 x_1 + x_3 f_1 + f_2, \qquad F_2' = x_4 x_2 + x_3^2 + x_3 f_1' + f_2',$$
$$\Phi_2 = x_3 x_1 + \varphi_2, \qquad \Phi_2' = x_4 x_1 + x_3 \varphi_1' + \varphi_2',$$

wo die $f_i, f_i', \varphi_i, \varphi_i'$ homogene ganze Functionen i^{ter} Dimension in x_1, x_2 bedeuten.

Erlangen, 10. November 1888.