SUR L'INTÉGRALE FONDAMENTALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ELLIPTIQUE À COEFFICIENTS CONSTANTS.

Par M. **Ivar Fredholm** (Stockholm).

Adunanza del 5 gennajo 1908.

Considérons une équation différentielle de la forme symbolique

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u = 0, \tag{1}$$

où f est une forme définie du degré n.

J'ai démontré [1]) qu'il existe de l'équation proposée $\frac{1}{2}n(n-1)$ intégrales homogènes du degré -1 qui sont régulières pour tout système de valeurs réelles de variables indépendantes différent de l'origine. Ensuite j'ai indiqué [2]) que ces intégrales sont les dérivées d'ordre $n-2$ d'une autre intégrale de l'équation proposée.

Dans les pages suivantes je vais démontrer que cette intégrale est l'intégrale fondamentale de l'équation (1) et qu'elle peut être mise sous une forme très intéressante qui montre les rapport intimes entre l'intégrale fondamentale et les intégrales abéliennes appartenant à la courbe

$$f(x, y, z) = 0.$$

Rappelons, en effet, que l'intégrale régulière et homogène du degré -1 peut s'exprimer par la formule

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\frac{\psi(\xi, \eta_\nu)\,d\xi}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x + \eta_\nu y + z)}, \tag{2}$$

où ψ est une fonction entière rationelle du degré $n-2$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ les n racines de l'équation

$$f(\xi, \eta, 1) = 0;$$

et

$$f_2(\xi, \eta) = \frac{\partial f(\xi, \eta, 1)}{\partial \eta}.$$

Pour que l'expression donnée de u soit valable, il faut que les racines η_ν soient

---

1) *Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique* [Acta Mathematica, t. XXIII (1900), pp. 1-42].

2) *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXXIX (2^e semestre 1899), pp. 32-34].

finies et en général inégales, conditions dont on pourrait se débarasser facilement. Cependant, pour plus de commodité dans les calculs je les suppose vérifiées.

Cela posé, considérant la fonction

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{(\xi x + \eta_\nu y + z)^{n-3} \log(\xi x + \eta_\nu y + z)}{\underline{|n-3} f_2(\xi, \eta_\nu)} d\xi \tag{3}$$

on trouve facilement que

$$\frac{\partial^{n-2} P}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = u,$$

où u est la fonction définie par l'équation (2) dans le cas où

$$\psi(\xi, \eta) = \xi^\alpha \eta^\beta.$$

Ainsi on voit que la fonction u la plus générale est une combinaison linéaire à coefficients constants des dérivées d'ordre $n-2$ de la fonction P. Puisque pour $n=2$ on a $P = u$, je laisse ce cas de côté en supposant $n \geq 4$.

Cherchons maintenant une expression des derivées d'ordre $n-3$ de P. Chaque combinaison linéaire P_{n-3} de ces dérivées peut s'écrire

$$P_{n-3} = \int u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz,$$

u_1, u_2, u_3 étant trois intégrales qu'on obtient en posant dans la formule (2) ψ respectivement égale à

$$\varphi . \xi, \qquad \varphi . \eta, \qquad \varphi,$$

φ étant une fonction du degré $n-3$.

Pour transformer P_{n-3}, employons pour u l'expression [3])

$$u = \sum_{1}^{\frac{n}{2}}{}_{\nu} \frac{\psi(\xi_\nu, \eta_\nu)}{x f_2(\xi_\nu, \eta_\nu) - y f_1(\xi_\nu, \eta_\nu)},$$

où la sommation s'étend sur les points d'intersection de la courbe

$$f(\xi, \eta) = 0$$

avec la ligne droite

$$\xi x + \eta y + z = 0,$$

pour lesquelles la partie imaginaire de ξ_ν est positive.

Alors nous pouvons écrire

$$d P_{n-3} = \sum_{1}^{\frac{n}{2}}{}_{\nu} \frac{(\xi_\nu dx + \eta_\nu dy + dz)\varphi(\xi_\nu, \eta_\nu)}{y f_1(\xi_\nu, \eta_\nu) - x f_2(\xi_\nu, \eta_\nu)}.$$

Mais on a, ξ, η désignant un des points d'intersection,

$$\xi dx + \eta dy + dz + x d\xi + y d\eta = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta = f_1 d\xi + f_2 d\eta = 0,$$

d'où

$$\frac{\xi dx + \eta dy + dz}{y f_1 - x f_2} = \frac{d\xi}{f_2}.$$

[3]) l. c. [1]), page 6.

Ainsi

$$dP_{n-3} = \sum_{1}^{\frac{n}{2}}{}_{\nu} \frac{\varphi(\xi_\nu, \eta_\nu)\, d\xi_\nu}{f_2(\xi_\nu, \eta_\nu)}$$

et

$$P_{n-3} = \sum_{1}^{\frac{n}{2}}{}_{\nu} \int_{\xi_0\eta_0}^{\xi_\nu\eta_\nu} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi}{f_2(\xi, \eta)} .$$

En supposant que le genre de la courbe

$$f(\xi, \eta) = 0$$

atteint sa valeur maxima $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, on peut dire que *l'intégrale régulière et homogène de degré* o *de l'équation différentielle*

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0$$

s'obtient en prenant la somme des intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe algébrique

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

étendues d'un point arbitraire jusqu'à ceux des points d'intersection de la courbe avec la ligne droite

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

pour lesquelles la partie imaginaire de ξ *est positive.*

La fonction P_{n-3} étant homogène du degré o, il ne faut aucune intégration pour avoir l'expression de P. Une application du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes nous donne pour P la formule

$$P = \sum_{1}^{\frac{n}{2}}{}_{\nu} \int_{\xi_0\eta_0}^{\xi_\nu\eta_\nu} \frac{(\xi x + \eta y + z)^{n-3}}{f_2(\xi, \eta)}\, d\xi. \tag{4}$$

Pour voir que P est bien l'intégrale fondamentale, considérons un volume S avec sa surface σ et soient u et v deux fonctions finies et continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre n dans S et σ.

Alors nous connaissons la généralisation du théorème de Green

$$\int_S (ufv - vfu)\, dS = \int_\sigma [L \cos(nx) + M \cos(ny) + N \cos(nz)]\, d\sigma,$$

où L, M, N sont certaines formes bilinéaires et homogènes du degré $n - 1$ par rapport à l'ordre des dérivées.

Prenons pour v maintenant la fonction $P(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ et supposons que σ soit formée d'une surface σ_1 et une surface sphérique σ_0 dont le centre est x_0, y_0, z_0 et dont le rayon est ρ, et soit S le volume extérieur à σ_0 et intérieur à σ_1.

Le théorème généralisé de Green appliqué à S nous donne maintenant

$$-\int_S Pfu\, dS$$

$$= \int_{\sigma_0} [L\cos(nx) + M\cos(ny) + N\cos(nz)]\, d\sigma + \int_{\sigma_1} [L\cos(nx) + M\cos(ny) + N\cos(nz)]\, d\sigma.$$

Si nous faisons converger le rayon ρ vers zéro, les termes dans l'intégrale étendue sur σ_0 qui contiennent des dérivées de P d'un ordre inférieur à $n-1$ convergent vers zéro, de sorte que nous aurons, pour $\rho = 0$,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & u(x_0, y_0, z_0)\int_{\sigma_0}[L_0\cos(nx)+M_0\cos(ny)+N_0\cos(nz)]\,d\sigma \\ & = -\int_S P.fu\,dS - \int_{\sigma_1}[L\cos(nx)+M\cos(ny)+N\cos(nz)]\,d\sigma, \end{aligned}\right.$$

où L_0, M_0, N_0 sont les coefficients de u dans L, M, N respectivement.

Puisque cette formule s'applique au cas où $u =$ constante, on voit que la valeur de l'intégrale qui multiplie $u(x_0, y_0, z_0)$ ne dépend point de la forme de la surface d'intégration σ_0. Le point essentiel maintenant c'est de démontrer que cette intégrale est différente de zéro.

Pour cela, observons que L_0, M_0, N_0 sont des fonctions de la forme

$$(6)\qquad -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_1^n{}_\nu \frac{\psi(\xi, \eta_\nu)}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x + \eta_\nu y + z)^2}\,d\xi,$$

où la sommation s'étend sur toutes les racines η_ν de l'équation

$$f(\xi, \eta_\nu) = 0$$

et ψ est une fonction du degré $n-1$.

Cela posé, j'ai démontré [4]) que l'intégrale

$$\int_{\sigma_0}[L_0\cos(nx)+M_0\cos(ny)+N_0\cos(nz)]\,d\sigma$$

est égale à

$$4\pi\sum_1^n{}_\nu \frac{\psi(0, \eta_\nu)}{f_2(0, \eta_\nu)},$$

où ψ est la fonction qu'il faut introduire dans la formule (6) pour avoir M_0.

Par conséquent, on a

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{\partial f}{\partial \eta} = f_2(\xi, \eta)$$

et

$$\int_{\sigma_0}[L_0\cos(nx)+M_0\cos(ny)+N_0\cos(nz)]\,d\sigma = 4n\pi.$$

Ainsi la fonction P joue, par rapport à l'équation différentielle $fu = 0$, le même rôle que la fonction $\frac{1}{r}$ par rapport à l'équation $\Delta u = 0$, et on peut par conséquent appeler P l'intégrale fondamentale de l'équation $fu = 0$.

Pour donner un exemple de la théorie précédente, considérons l'équation différentielle

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0.$$

---

[4]) l. c. [1]), pp. 22-27.

D'après le théorème fondamental, nous aurons

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \int_0^{\xi_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} + \int_0^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}},$$

où ξ_1, ξ_2 sont les valeurs à parties imaginaires positives satisfaisant aux équations

$$x\xi + y\eta + z = 0,$$
$$\xi^4 + \eta^4 + 1 = 0.$$

Le théorème d'addition des intégrales elliptiques nous permet maintenant d'écrire

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}},$$

où ξ est déterminé par l'équation

$$\frac{1 + \xi_1^2\xi_2^2 - \sqrt{\xi_1^4 + 1}\sqrt{\xi_2^4 + 1}}{(\xi_2 - \xi_1)^2} = \frac{1 + \sqrt{\xi^4 + 1}}{\xi^2}.$$

Or, nous pouvons remplacer les racines carrées par des expressions rationnelles, parce que nous avons

$$\sqrt{1 + \xi_\alpha^4} = i\eta_\alpha^2 = i\frac{(x\xi_\alpha + z)^2}{y^2} \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Ainsi nous aurons

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1+\sqrt{\xi^4+1}}{\xi^2} &= \frac{y^4(1+\xi_1^2\xi_2^2)+(x\xi_1+z)^2(x\xi_2+z)^2}{y^4(\xi_2-\xi_1)^2} \\ &= \frac{(y^4+x^4)\xi_1^2\xi_2^2+2x^3z\xi_1\xi_2(\xi_1+\xi_2)+x^2z^2(\xi_1^2+\xi_2^2+4\xi_1\xi_2)+2xz^3(\xi_1+\xi_2)+y^4+z^4}{y^4(\xi_2-\xi_1)^2}. \end{aligned} \right.$$

Mais ξ_1, ξ_2 satisfont à l'équation

$$(8) \qquad (x^4 + y^4)\xi^4 + 4x^3z\xi^3 + 6x^2z^2\xi^2 + 4xz^3\xi + y^4 + z^4 = 0.$$

Si nous appelons ξ_3, ξ_4 les deux autres racines de cette équation, nous pourrons éliminer x, y, z dans le second membre de l'expression (7) divisée par $\frac{x^4 + y^4}{y^4}$ et nous trouvons

$$\frac{1 + \sqrt{\xi^4 + 1}}{\xi^2} = \frac{x^4 + y^4}{y^4} \cdot \frac{F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{(\xi_2 - \xi_1)^2},$$

où F est une fonction des racines ξ qui est divisible par $(\xi_2 - \xi_1)^2$. Après avoir effectué la division, on trouve

$$y^4 \cdot \frac{1 + \sqrt{\xi^4 + 1}}{\xi^2} = (x^4 + y^4)[(\xi_1 + \xi_2)(\xi_3 + \xi_4) - 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_3\xi_4].$$

Ici le second membre s'exprime d'une manière bien connue à l'aide des deux invariants de la forme binaire (8), de sorte que l'on a

$$y^2 \frac{1 + \sqrt{\xi^4 + 1}}{\xi^2} = \zeta,$$

où ζ est la plus grande racine positive de l'équation

$$\zeta^3 - (x^4 + y^4 + z^4)\zeta - 2x^2y^2z^2 = 0.$$

En introduisant comme variable d'intégration

$$\frac{1 + \sqrt{\xi^4 + 1}}{\xi^2} = 2u,$$

on trouve enfin

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 1}} = \int_{\frac{\zeta}{2y^2}}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - u}} = F\left(\frac{\zeta}{2y^2}\right).$$

Pour avoir les autres dérivées on n'a qu'à changer la limite supérieure dans cette intégrale, respectivement en $\frac{\zeta}{2x^2}$ et $\frac{\zeta}{2z^2}$.

Appliquant maintenant le théorème d'EULER sur les fonctions homogènes, on trouve l'expression suivante de l'intégrale fondamentale

$$P = xF\left(\frac{\zeta}{2x^2}\right) + yF\left(\frac{\zeta}{2y^2}\right) + zF\left(\frac{\zeta}{2z^2}\right),$$

où $F(u)$ désigne l'intégrale elliptique

$$F(u) = \int_u^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - u}}.$$

Stockholm, 25 décembre 1907.

IVAR FREDHOLM.