Vertauschbarkeit transfiniter Ordnungszahlen.*)

Von

Ernst Jacobsthal in Berlin.

Vorwort.

Das kommutative Gesetz gilt für die Addition und Multiplikation der Cantorschen transfiniten Ordnungszahlen im allgemeinen nicht. Demgemäß stellen die Gleichungen

(1) $$\alpha + \beta = \beta + \alpha\text{**)},$$

(2) $$\alpha\beta = \beta\alpha$$

beschränkende Beziehungen zwischen α und β dar.

Denkt man sich α gegeben, so genügen auf Grund des assoziativen Gesetzes der Addition die endlichen Vielfachen von α der Gleichung (1), d. h. alle Zahlen der Form $\beta = \alpha n$, wo $n \prec \omega$ ist.

Wir zeigen in § 1, daß alle mit α additiv vertauschbaren Zahlen die Gestalt $\beta = \bar{\alpha} b$ haben, wo $\bar{\alpha}$ die kleinste mit α additiv vertauschbare Zahl ($\succ 0$) bedeutet und $b \prec \omega$ ist. Daraus folgt dann, daß *alle mit α vertauschbaren Zahlen untereinander vertauschbar sind*, und es zeigt sich weiter, daß (1) denselben Inhalt hat wie die Gleichung

(1a) $$\alpha b' = \beta a', \qquad (a', b' \prec \omega).$$

Die Gleichungen (1) und (1a) folgen auseinander.

---

*) Man vergl. mit den folgenden Untersuchungen die Resultate, die Herr G. Cantor in seiner Arbeit: Zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, II, Bd. 49 dieser Zeitschrift, pag. 239 ff. abgeleitet hat. — Dabei möchte ich bemerken, daß sich in der Encykl. der math. Wissenschaften, Bd. I, 1, pag. 194, Anm. 40 ein Fehler findet. Herr G. Cantor gibt nämlich l. c. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gleichung $\alpha\beta = \beta\alpha$ *nur* unter der Voraussetzung, daß die Zahlen der zweiten Zahlklasse α und β von der *ersten Art*, d. h. keine Limeszahlen sind. Die Cantorschen Bedingungen sind ja, wie die folgenden Untersuchungen zeigen, in der Tat nur für diesen Fall richtig.

**) Transfinite Zahlen bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben, endliche Zahlen mit kleiner lateinischer Schrift.

In § 2 und § 3 behandeln wir die Gleichung (2). Ganz analog weisen wir hier nach, *daß alle mit α multiplikativ vertauschbaren Zahlen untereinander vertauschbar sind,* und daß (2) gleichwertig ist mit der Gleichung

(2a) $$\alpha^{b_1} = \beta^{a_1} \qquad (a_1, b_1 < \omega).$$

So weit entsprechen diese Resultate denen aus § 1. Aber es besteht ein Unterschied: die mit α multiplikativ vertauschbaren Zahlen β sind nicht immer endliche Potenzen der kleinsten mit α vertauschbaren Zahl; nämlich dann nicht immer, wenn α eine Limeszahl ist. Doch auch in diesem Fall lassen sich alle Zahlen β in einfacher Weise darstellen.

In § 4 wird uns schließlich die Gleichung

(3) $$\alpha^\beta = \beta^\alpha$$

beschäftigen. Für $\beta \neq \alpha$ gibt es bekanntlich im Gebiet der endlichen ganzen Zahlen nur eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar 2, 4. Ganz anders aber liegen, wie wir zeigen werden, die Verhältnisse im Bereich der transfiniten Zahlen.

§ 1.*)

Sei uns α gegeben und es erfülle β die Gleichung

(1) $$\alpha + \beta = \beta + \alpha.\text{**)}$$

Aus (1) folgt

(2) $$\alpha + \beta > \beta, \qquad \beta + \alpha > \alpha,$$

und hieraus ergibt sich, daß α und β beide endlich oder beide transfinit sind. Wir nehmen daher — der erste Fall, in dem α und β endlich sind, interessiert uns ja hier nicht — an

(3) $$\alpha \geqq \omega.$$

Satz I. *Sind β und γ mit α vertauschbar, so gilt von $\beta + \gamma$ gleiches.*

Beweis. Außer (1) besteht noch die Gleichung $\gamma + \alpha = \alpha + \gamma$. Addiert man hier auf beiden Seiten β, so folgt unter Benutzung von (1)

$$(\beta + \gamma) + \alpha = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Satz II (Umkehrung von I). *Sind $\gamma + \beta$ und γ mit α vertauschbar, dann ist auch $\beta + \alpha = \alpha + \beta$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\text{(a)} \quad (\gamma + \beta) + \alpha = \alpha + (\gamma + \beta)$$
$$\text{(b)} \quad \gamma + \alpha = \alpha + \gamma.$$

*) Für die folgenden Untersuchungen setzen wir den mengentheoretischen Kalkul als bekannt voraus. Man findet eine sehr übersichtliche Darstellung desselben in der Abhandlung von Herrn G. Hessenberg: Grundbegriffe der Mengenlehre, Abhandl. der Friesschen Schule, I. Band 4. Heft (als Sonderdruck erschienen).

**) $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ wird als trivial ausgeschlossen.

Wir ersetzen auf der rechten Seite der Gleichung (a) auf Grund von (b) $\alpha + \gamma$ durch $\gamma + \alpha$ und erhalten so

$$\text{(c)} \quad \gamma + (\beta + \alpha) = \gamma + (\alpha + \beta).$$

Hieraus folgt aber, wie der mengentheoretische Kalkul lehrt,

$$\text{(d)} \qquad \beta + \alpha = \alpha + \beta.$$

Satz III. *Ist β eine nicht unterhalb α liegende und mit α vertauschbare Zahl, dann ist*

$$\text{(4)} \qquad \beta = \alpha b + \varrho \qquad (b < \omega,\ \varrho < \alpha),$$

und es gelten für ϱ die Gleichungen

$$\text{(5)} \qquad \varrho + \alpha = \alpha + \varrho,$$

$$\text{(6)} \qquad \varrho + \beta = \beta + \varrho.$$

Beweis. Da $\beta \geqq \alpha$ ist, so existieren zwei Ordnungszahlen ξ, ϱ derart, daß

$$\beta = \alpha\xi + \varrho\text{*}), \qquad (\xi \leqq \beta,\ \varrho < \alpha);$$

es ist also

$$\alpha + \beta = \alpha(1 + \xi) + \varrho.$$

Wäre nun ξ überendlich, also $1 + \xi = \xi$, dann folgte $\alpha + \beta = \beta$, eine Gleichung, die (2) widerspricht; demnach ist $\xi < \omega$ und als endliche Zahl bezeichnen wir ξ mit b. Da weiter αb und β mit α und mit β vertauschbar sind, so folgt (5) und (6) aus Satz II.

Es bedeute nun $\bar{\alpha}$ die kleinste von Null verschiedene mit α vertauschbare Zahl, dann ist nach Satz III

$$\alpha = \bar{\alpha} a + \varrho', \quad a < \omega, \quad \varrho' < \bar{\alpha}.$$

Da ϱ' nach (6) mit α vertauschbar ist und kleiner als $\bar{\alpha}$ sein soll, so muß $\varrho' = 0$ sein und es gilt

$$\text{(7)} \qquad \alpha = \bar{\alpha} a \qquad (a < \omega).$$

$\bar{\alpha}$ ist mit keiner kleineren Zahl vertauschbar, denn mit ihr wäre nach Satz I auch $\bar{\alpha} a = \alpha$ vertauschbar.

Satz IV. *Ist β mit α vertauschbar, dann ist*

$$\text{(8)} \qquad \beta = \bar{\alpha} b', \qquad (b' < \omega).$$

Beweis. a) Sei zunächst $\beta < \alpha = \bar{\alpha} a$. Aus dieser Ungleichung folgt, daß sich β in die Form setzen läßt:

$$\beta = \bar{\alpha} b' + \varrho_1 \qquad (\varrho_1 < \bar{\alpha}).$$

Hieraus schließen wir nach Satz II, daß

$$\varrho_1 + \alpha = \alpha + \varrho_1$$

ist, und wegen $\varrho_1 < \bar{\alpha}$ ergibt sich daraus $\varrho_1 = 0$ und somit (8).

*) Satz III läßt sich auch leicht aus Satz II folgern (ohne Benutzung der Gleichung $\beta = \alpha\xi + \varrho$).

b) Sei $\beta \geqq \alpha$, dann gilt (4) und (5); nach Fall a) folgt daher $\varrho = \bar{\alpha} r$, wo $r \prec \omega$ ist. (4) geht dadurch unter Berücksichtigung von (7) über in

$$\beta = \bar{\alpha} a b + \bar{\alpha} r = \bar{\alpha} b',$$

wo $b' = ab + r'$ gesetzt ist.

Es folgt sofort:

Satz V. *Sind β und γ mit α vertauschbar, dann ist auch β mit γ vertauschbar.*

Der Beweis ergibt sich aus den Gleichungen

$$\beta = \bar{\alpha} b',$$
$$\gamma = \bar{\alpha} c',$$
$$b' + c' = c' + b',$$

und weiterhin folgt

(9) $$\beta c' = \gamma b'.$$

Satz VI. *Seien α, β zwei transfinite Zahlen, zwischen denen die Gleichung*

(9a) $$\alpha b'' = \beta a''$$

besteht, dann ist β mit α vertauschbar.

Beweis. α ist mit $\alpha b'' = \beta a''$ und $\beta a''$ ist mit β vertauschbar, also nach Satz V α mit β.

Es folgt aus (9a) sehr leicht:

(10) $$\alpha \frac{b''}{d} = \beta \frac{a''}{d},$$

wenn $d = (a'', b'')$ ist.

§ 2.

Sei uns α gegeben und β erfülle die Gleichung

(1) $$\alpha\beta = \beta\alpha^{*}).$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß aus $\alpha \prec \omega$ auch $\beta \prec \omega$ folgt. Sei also wieder $\alpha \geqq \omega$. Genau wie in § 1 beweist man auch hier:

Satz I. *Sind β und γ mit α vertauschbar**), so gilt von $\beta\gamma$ gleiches.*

Satz II (Umkehrung von I). *Sind $\gamma\beta$ und γ mit α vertauschbar, dann ist auch*

$$\beta\alpha = \alpha\beta.$$

Bis hierher geht die Untersuchung mit der in § 1 parallel.

---

*) $\alpha = 1$ und $\beta = 1$ schließen wir als trivial aus.

**) Vertauschbar schlechthin bedeutet im folgenden „multiplikativ vertauschbar".

Jetzt machen wir Gebrauch von der Theorie der *Hauptzahlen.**) Der höchste nicht oberhalb α gelegene Haupttypus sei ω^μ; ω^ν habe für β die gleiche Bedeutung. Dann ist

$$\left.\begin{array}{lll} (2) & \alpha = \omega^\mu a + \varrho + r, & a, r \prec \omega;\ \varrho \prec \omega^\mu \\ (3) & \beta = \omega^\nu b + \sigma + s, & b, s \prec \omega;\ \sigma \prec \omega^\nu \end{array}\right\} \varrho, \sigma \text{ sind Limeszahlen.}$$

Wir behandeln in diesem Paragraphen nur den Fall, in dem $r = 0$, also α eine Limeszahl ist.

Sei also $r = 0$, dann ist auch $s = 0$, d. h. β eine Limeszahl. Wäre nämlich $s \succ 0$, dann ist

$$\alpha\beta = \omega^{\mu+\nu} b + \omega^\mu \sigma + \omega^\mu a s + \varrho,$$
$$\beta\alpha = \omega^{\nu+\mu} a + \omega^\nu \varrho.$$

Also ist wegen (1)

$$\omega^{\mu+\nu} b + \omega^\mu \sigma + \omega^\mu a s + \varrho = \omega^{\nu+\mu} a + \omega^\nu \varrho.$$

Diese Gleichung stellt einen Widerspruch dar; die linke Seite, in die Cantorsche Normalform gesetzt, würde anders ausfallen als die rechte Seite. Setzen wir also $s = 0$, so wird

$$\alpha\beta = \omega^{\mu+\nu} b + \omega^\mu \sigma,$$

und (1) geht über in

$$(4) \qquad \omega^{\mu+\nu} b + \omega^\mu \sigma = \omega^{\nu+\mu} a + \omega^\nu \varrho.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung einer transfiniten Zahl als Summe nicht zunehmender Haupttypen zerfällt (4) in die Gleichungen

$$(5) \qquad \mu + \nu = \nu + \mu,$$

$$(6) \qquad a = b,$$

$$(7) \qquad \omega^\mu \sigma = \omega^\nu \varrho.$$

Auf Grund von § 1 können wir (5) ersetzen durch

$$(5\text{a}) \qquad \mu = \tau m, \qquad \nu = \tau n,$$

wo τ mit keiner kleineren Zahl additiv vertauschbar ist.**)

---

*) Hauptzahl nennt Herr Hessenberg l. c. S. 578 eine Zahl, die allen ihren (von Null verschiedenen) Resten gleich ist. Diese Zahlen sind identisch mit den Potenzen von ω und werden von Herrn Hessenberg direkt zur Definition dieser und der Potenzen beliebiger Zahlen benutzt. Die Hauptzahlen sind *additive* Primzahlen; daher ist die Cantorsche Normaldarstellung transfiniter Ordnungszahlen das additive Analogon der multiplikativen Darstellung endlicher Zahlen durch Primzahlen. Dagegen ist die Produktformel, die Herr G. Cantor l. c. für die transfiniten Ordungszahlen aufgestellt hat, nicht von der gleichen Bedeutung; denn die dabei auftretenden multiplikativ irreduzibelen Zahlen haben nur in gewissen Fällen Primzahlcharakter. — Mit Benutzung der Hauptzahlen kommt man in § 1 schneller zum Ziel; wir wollten aber in § 1 absichtlich die Untersuchung mit möglichst wenig Hilfsmitteln führen. Es läßt sich leicht zeigen, daß die in § 1 eingeführte Zahl $\bar{\alpha}$ die Form hat $\bar{\alpha} = \omega^{\mu'} + \varrho$, wo $\varrho \prec \omega^{\mu'}$ ist. Alle mit α additiv vertauschbaren Zahlen haben die Gestalt $\beta = \omega^{\mu'} b' + \varrho$ $(b' = 1, 2, \cdots)$.

**) τ ist durch μ, also durch α eindeutig bestimmt; ist μ endlich, dann ist $\tau = 1$.

Ist $\mu = \nu$, so folgt aus (7)

$$\varrho = \sigma, \qquad \alpha = \beta.$$

Sei also $\mu > \nu$, d. h. $m > n$ und demnach $\alpha > \beta$. Aus (7) ergibt sich dann

$$(8) \qquad \varrho = \omega^{\tau(m-n)}\sigma,$$

$$(9) \qquad \alpha = \omega^{\tau m}a + \varrho = \omega^{\tau m}a + \omega^{\tau(m-n)}\sigma$$
$$= \omega^{\tau(m-n)}(\omega^{\tau n}a + \sigma)$$
$$= \omega^{\tau(m-n)}\beta.$$

Stellen wir das bisherige zusammen: jede mit $\alpha = \omega^{\tau m}a + \varrho$ vertauschbare Zahl β hat die Gestalt $\beta = \omega^{\tau n}a + \sigma$, wobei σ sich aus der Gleichung

$$\omega^{\tau m}\sigma = \omega^{\tau n}\varrho$$

bestimmt; und es ist, falls $\alpha \geqq \beta$ ist,

$$\alpha = \omega^{\tau(m-n)}\beta.$$

Alle Zahlen β der angegebenen Gestalt sind aber auch mit α vertauschbar.

Sei nun $\bar{\alpha}$ die kleinste mit α (multiplikativ) vertauschbare Zahl, dann folgt für $\beta = \bar{\alpha}$, da ja $\alpha \geqq \bar{\alpha}$ ist,

$$(10) \qquad \alpha = \omega^{\tau a'}\bar{\alpha}, \qquad 0 \leqq a' < \omega.$$

Satz III. *Jede mit α vertauschbare Zahl γ hat die Gestalt*

$$(11) \qquad \gamma = \omega^{\tau c'}\bar{\alpha}, \qquad 0 \leqq c' < \omega.$$

Beweis. a) Wenn $\gamma \geqq \alpha$ ist, dann ist nach (9) und (10)

$$\gamma = \omega^{\tau c}\alpha, \qquad \alpha = \omega^{\tau a'}\bar{\alpha},$$

also

$$(11) \qquad \gamma = \omega^{\tau(c+a')}\bar{\alpha} = \omega^{\tau c'}\bar{\alpha}.$$

b) Sei $\alpha > \gamma \geqq \bar{\alpha}$, dann ist nach (9) und (10)

$$\alpha = \omega^{\tau c''}\gamma = \omega^{\tau a'}\bar{\alpha}.$$

Wegen $\gamma \geqq \bar{\alpha}$ folgt hieraus $c'' \leqq a'$ und demnach

$$(11) \qquad \gamma = \omega^{\tau(a'-c'')}\bar{\alpha} = \omega^{\tau c'}\bar{\alpha}.$$

Satz IV. *Jede mit α vertauschbare Zahl γ ist auch mit $\bar{\alpha}$ vertauschbar.*

Beweis. Nach dem, was oben über die Gestalt jeder mit α vertauschbaren Zahl bemerkt wurde, besteht für $\bar{\alpha}$ die Gleichung:

$$(12) \qquad \bar{\alpha} = \omega^{\tau\bar{a}}a + \bar{\varrho}.$$

Aus (11) und (12) folgt für jede mit α vertauschbare Zahl γ

$$(13) \qquad \gamma = \omega^{\tau(c'+\bar{a})}a + \omega^{\tau c'}\bar{\varrho}.$$

Man bilde aus (12) und (13) $\gamma\bar{\alpha}$ und $\bar{\alpha}\gamma$:

$$\begin{cases} \gamma\bar{\alpha} = \omega^{\tau(c'+2\bar{a})}a + \omega^{\tau(c'+\bar{a})}\bar{\varrho}, \\ \bar{\alpha}\gamma = \omega^{\tau(c'+2\bar{a})}a + \omega^{\tau(c'+\bar{a})}\bar{\varrho} = \gamma\bar{\alpha}. \end{cases}$$

Satz V. *Sind β und γ mit α vertauschbar, so ist auch β mit γ vertauschbar.**)

Beweis. Nach Satz III ist

$$\gamma = \omega^{\tau c'}\bar{\alpha}, \qquad \beta = \omega^{\tau b'}\bar{\alpha},$$

also

$$\gamma\beta = \omega^{\tau c'}\bar{\alpha}\beta = \omega^{\tau c'}\beta\bar{\alpha} \quad \text{(Satz IV)}$$
$$= \omega^{\tau(c'+b')}\bar{\alpha}^2.$$

Genau ebenso folgt

$$\beta\gamma = \omega^{\tau(b'+c')}\bar{\alpha}^2$$

und hieraus

(14) $$\beta\gamma = \gamma\beta.$$

Aus Satz V schließen wir, daß $\bar{\alpha}$ mit keiner kleineren Zahl vertauschbar ist.

Wann sind alle mit α vertauschbaren Zahlen $\omega^{\tau c'}\bar{\alpha}$ endliche Potenzen einer und derselben Zahl δ? Da auch $\bar{\alpha}$ eine Potenz dieser Zahl δ sein müßte, also mit δ vertauschbar wäre, so muß wegen der vorhergehenden Bemerkung diese Zahl gleich $\bar{\alpha}$ sein. Unsere Frage lautet also: wann haben alle Zahlen $\omega^{\tau c'}\bar{\alpha}$ $(c' = 0, 1, 2, \cdots)$ die Gestalt $\bar{\alpha}^e$ $(1 \prec e \prec \omega)$? Die Gleichung

(15) $$\omega^{\tau c'}\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^e$$

geht wegen (12) über in

(16) $$\omega^{\tau(c'+\bar{a})}a + \omega^{\tau c'}\bar{\varrho} = \omega^{\tau\bar{a}e}a + \omega^{\tau(ea-1)}\bar{\varrho}.$$

Gleichung (16), also auch (15), ist dann und nur dann erfüllt, wenn

(17) $$c' = \bar{a}(e-1)$$

ist, d. h. wenn jedes ganzzahlige c' durch $\bar{a}$ teilbar ist. Also muß

$$\bar{a} = 1, \qquad c' = e - 1$$

sein. Die Gleichung (15) lautet jetzt

(15a) $$\omega^{\tau c'}\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^{c'+1}.$$

Wir erhalten so

Satz VI. *Alle mit α vertauschbaren Zahlen sind dann und nur dann Potenzen der kleinsten mit α vertauschbaren Zahl $\bar{\alpha}$, wenn $\bar{\alpha}$ die Gestalt hat*

(18) $$\bar{\alpha} = \omega^{\tau}a + \bar{\varrho},$$

*wo τ mit keiner kleineren Zahl additiv vertauschbar und $\bar{\varrho}$ eine unterhalb ω^{τ} gelegene Limeszahl ist.***)

---

*) Dieser Satz läßt sich leicht direkt aus den Gleichungen (5a), (6) und (7) herleiten; es ist nur ϱ aus zwei Gleichungen der Form (7) zu eliminieren. Aus V folgt dann IV und III. Wir haben unsere etwas längere Darstellung gewählt, um die analoge, aber schwierigere Untersuchung in § 3 dem Verständnis näher zu bringen.

**) Dafür daß $\bar{\alpha}$ diese Form hat, ist notwendig und hinreichend die Bedingung $\mu^t \succ \tau(m-1)$, wenn ω^{μ} das niederste Glied in der Cantorschen Normaldarstellung von α ist. — Ist $m \succ 1$ und $\mu_t \prec \tau$, dann ist $\alpha = \bar{\alpha}$; für $m = 1$ ist stets $\alpha = \bar{\alpha}$.

§ 3.*)

Nachdem wir nun die Gleichung (1) in § 2 unter der Voraussetzung behandelt haben, daß α eine Limeszahl ist, setzen wir jetzt voraus: *α ist keine Limeszahl.* Dann folgt, daß auch β keine ist. Zu den Gleichungen (2) und (3) des vorigen Paragraphen kommen also noch die Bedingungen

$$r, s > 0.$$

(1) geht jetzt über in

(19) $$\omega^{\mu+\nu} b + \omega^{\mu}(\sigma + as) + \varrho + r = \omega^{\nu+\mu} a + \omega^{\nu}(\varrho + br) + \sigma + s.$$

und diese Gleichung zerfällt in

(5a) $$\mu = \tau m, \qquad \nu = \tau n,$$

(6) $$a = b,$$

(20) $$r = s,$$

(21) $$\omega^{\tau m}(\sigma + ar) + \varrho = \omega^{\tau n}(\varrho + ar) + \sigma.$$

Also sind alle mit $\alpha = \omega^{\tau m} a + \varrho + r$ vertauschbaren Zahlen von der Gestalt $\beta = \omega^{\tau n} a + \sigma + r$; σ bestimmt sich aus (21). Wählt man umgekehrt n und σ so, daß (21) erfüllt ist, dann ist das dadurch definierte β mit α vertauschbar.

Aus (21) folgt wegen der Eindeutigkeit der Cantorschen Normaldarstellung einer transfiniten Zahl: ist $m = n$, so ist $\varrho = \sigma$, also $\alpha = \beta$; ist aber $m > n$, also $\alpha > \beta$, dann ist $\varrho > \sigma$. Oder anders gefaßt: aus $\alpha > \beta$ folgt $m > n$ und $\varrho > \sigma$.

Satz VII. *Sei $\alpha > \beta$, dann existiert eine Zahl β', so daß*

(22) $$\alpha = \beta\beta' = \beta'\beta$$

ist, und auch β' ist mit α vertauschbar.

Beweis. Wir denken uns in (21) die rechte und die linke Seite in die Normalform gesetzt und vergleichen auf beiden Seiten die Glieder, die größer sind als $\omega^{\tau n}$. Da $m > n$ ist, so ergibt sich bei dieser Vergleichung

(23) $$\omega^{\tau n}\varrho \geq \omega^{\tau m}(\sigma + ar),$$

(23a) $$\varrho \geq \omega^{\tau(m-n)}(\sigma + ar).$$

Also definiert uns

(24) $$\varrho = \omega^{\tau(m-n)}(\sigma + ar) + \sigma'$$

in eindeutiger Weise σ'. Diesen Ausdruck für ϱ führe man in die rechte Seite von (21) ein, dann folgt

$$\omega^{\tau m}(\sigma + ar) + \varrho = \omega^{\tau m}(\sigma + ar) + \omega^{\tau n}(\sigma' + ar) + \sigma,$$

oder

(25) $$\varrho = \omega^{\tau n}(\sigma' + ar) + \sigma.\text{**)}$$

---

*) Die Sätze I und II gelten auch für diesen Paragraphen, da ihre Ableitung sich nicht darauf stützte, daß α eine Limeszahl ist.

**) Gleichung (25) kann man direkt erhalten, wenn man in Gleichung (21) beiderseits die Glieder vergleicht, die kleiner sind als $\omega^{\tau m}$.

Aus (24) und (25) folgt

(26) $$\omega^{\tau n}(\sigma' + ar) + \sigma = \omega^{\tau(m-n)}(\sigma + ar) + \sigma'.$$

Aus der Definition von σ' ergibt sich, daß σ' eine Limeszahl ist, und aus (25) schließen wir

$$\omega^{\tau n}\sigma' < \varrho$$

und wegen $\varrho < \omega^{\tau m}$

$$\omega^{\tau n}\sigma' < \omega^{\tau m},$$

also ergibt sich

(27) $$\sigma' < \omega^{\tau(m-n)}.$$

Wir setzen nun definierend

(28) $$\beta' = \omega^{\tau(m-n)}a + \sigma' + r.$$

Dann ist $\omega^{\tau(m-n)}$ wegen (27) der größte nicht oberhalb β' gelegene Haupttypus und wegen (25) wird

$$\beta\beta' = \omega^{\tau m}a + \omega^{\tau n}(\sigma' + ar) + \sigma + r$$
$$= \omega^{\tau m}a + \varrho + r = \alpha,$$

während (26) besagt, daß

$$\beta\beta' = \beta'\beta\text{*)}$$

ist, denn (26) hat dieselbe Gestalt wie (21) und diese letztere besagte ja $\alpha\beta = \beta\alpha$. Damit ist (22) bewiesen und aus Satz II folgt sofort, daß auch β' mit α vertauschbar ist. Wir bemerken noch die Beziehung

(29) $$\alpha > \beta'.$$

Satz VIII. *Sei $\alpha > \beta > \delta$ und seien β, δ mit α vertauschbar, dann ist*

(30) $$\beta = \delta\beta_1,$$

(31) $$\beta_1 < \beta,$$

und es ist (nach Satz II) β_1 mit α vertauschbar.

Beweis. Sei

(a) $$\beta = \omega^{\tau n}a + \sigma + r,$$

(b) $$\delta = \omega^{\tau p}a + \psi + r.$$

Daß δ mit α vertauschbar ist, drückt sich aus durch die Gleichung

(21a) $$\omega^{\tau m}(\psi + ar) + \varrho = \omega^{\tau p}(\varrho + ar) + \psi.$$

Diese Gleichung halten wir mit (21) zusammen; wäre $n = p$, so folgte aus beiden $\sigma = \psi$, also $\beta = \delta$ gegen Annahme. Also ist $n > p$. Man bestimme nach Satz VII zu β die Zahl $\beta' = \omega^{\tau(m-n)}a + \sigma' + r$, für die $\alpha = \beta\beta' = \beta'\beta$ ist, und setze dann definierend

(32) $$\beta_1' = \beta'\delta = \omega^{\tau(m-n+p)}a + \omega^{\tau(m-n)}(\psi + ar) + \sigma' + r.$$

Aus $n > p$ folgt

(33) $$m - n + p < m;$$

*) Das folgt auch direkt aus § 2, Satz II.

somit ist $\beta_1' \prec \alpha$, und da nach (32) und Satz I β_1' mit α vertauschbar ist, so existiert nach Satz VII zu β_1' eine Zahl $(\beta_1')' = \beta_1$, so daß

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta_1' \beta_1 \\ &= \beta' \delta \beta_1 = \beta' \beta \end{aligned}$$

ist. Hieraus folgt (30) durch Division mit β'. Ferner folgt aus (32)

$$(\beta_1')' = \beta_1 = \omega^{\tau(n-p)} a + \cdots \prec \beta. \tag{34}$$

Aus Satz VII und VIII folgern wir nunmehr

Satz IX. *Bedeutet $\bar{\alpha}$ die kleinste mit α vertauschbare Zahl, dann ist jede mit α vertauschbare Zahl eine Potenz von $\bar{\alpha}$ (mit endlichem Exponenten).*

Beweis. Zunächst beweisen wir den Satz für α selbst. Wenn $\alpha = \bar{\alpha}$ ist, dann haben wir nichts zu beweisen nötig. Sei also $\alpha \succ \bar{\alpha}$; dann existiert nach Satz VII $\bar{\alpha}' = \alpha_1$, so daß

$$\alpha = \bar{\alpha}\alpha_1 = \alpha_1 \bar{\alpha}; \quad \alpha_1 \alpha = \alpha \alpha_1; \quad \alpha \succ \alpha_1$$

ist. Demnach ist $\alpha_1 \succeq \bar{\alpha}$. Gilt das Gleichheitszeichen, dann ist $\alpha = \bar{\alpha}^2$, die Behauptung wäre bewiesen. Sei also $\alpha_1 \succ \bar{\alpha}$. Nach Satz VII und II folgt

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}\alpha_2 = \alpha_2 \bar{\alpha}; \quad \alpha_2 \alpha = \alpha \alpha_2; \quad \alpha_2 \succeq \bar{\alpha}; \quad \alpha_1 \succ \alpha_2.$$

Wenn $\alpha_2 = \bar{\alpha}$, dann ist $\alpha = \bar{\alpha}^3$; wenn aber $\alpha_2 \succ \bar{\alpha}$, dann fahren wir so fort. Da $\alpha \succ \alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \alpha_3 \succ \cdots$ ist, diese Reihe aber abbrechen muß, so folgt, daß es einen endlichen Index e geben muß, für den $\alpha_e = \bar{\alpha}$ ist. Wir erhalten demnach die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \bar{\alpha}, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 \bar{\alpha}, \\ \alpha_2 &= \alpha_3 \bar{\alpha}, \\ &\vdots \\ \alpha_{e-1} &= \alpha_e \bar{\alpha}, \\ \alpha_e &= \bar{\alpha}, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

und hieraus ergibt sich

$$\alpha = \bar{\alpha}^{e+1}.\text{*)} \tag{36}$$

Genau ebenso beweist man nach Satz VII: ist γ mit α vertauschbar und $\gamma \succeq \alpha$, dann ist

$$\gamma = \alpha^c \beta\text{**)}, \tag{37}$$

wo $\beta \prec \alpha$ und β mit α vertauschbar ist. Also ist $\beta \succeq \bar{\alpha}$.***)

---

*) Für $e = 0$ ist $\alpha = \bar{\alpha}$; aus (36) folgt, daß $\bar{\alpha}$ mit keiner kleineren Zahl vertauschbar ist, denn mit ihr wäre auch $\bar{\alpha}^{e+1} = \alpha$ vertauschbar.

**) Es kann hier $\beta = 1$ sein.

***) Falls $\beta \succ 1$ ist.

Nach demselben Schlußverfahren, durch das man zu (36) gelangte, erhalten wir jetzt durch wiederholte Anwendung von Satz VIII auf die Zahl $\delta = \bar{\alpha}$ die Gleichung

(38) $$\beta = \bar{\alpha}^f.$$

Aus (36), (37), (38) folgt für die Zahlen $\gamma \geqq \alpha$

(39) $$\gamma = \bar{\alpha}^{c(e+1)+f}.$$

Damit ist Satz IX bewiesen. Es ergibt sich hieraus sofort, daß Satz V auch in diesem Falle gilt.

Satz X. *Sind β und γ mit α vertauschbar, dann existieren zwei endliche Zahlen b und c, so daß*

(40) $$\beta^c = \gamma^b$$

ist.

Beweis. a) *α sei eine Limeszahl*; dann ist nach Satz III und Gleichung (13)

$$\beta = \omega^{\tau b'}\bar{\alpha} = \omega^{\tau(b'+\bar{a})}a + \omega^{\tau b'}\bar{\varrho}, \quad \gamma = \omega^{\tau(c'+\bar{a})}a + \omega^{\tau c'}\bar{\varrho}.$$

Da nun

(41) $$\beta^n = \omega^{\tau n(b'+\bar{a})-\tau\bar{a}}\,\bar{\alpha} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist, so ergibt sich sofort

$$\beta^{\frac{c'+\bar{a}}{d}} = \gamma^{\frac{b'+\bar{a}}{d}},$$

wo $d = (c'+\bar{a}, b'+\bar{a})$ der größte gemeinsame Divisor von $c'+\bar{a}$ und $b'+\bar{a}$ ist.

b) *α sei keine Limeszahl*, dann ist nach Satz IX $\beta = \bar{\alpha}^{b'}$, $\gamma = \bar{\alpha}^{c'}$, also

(43) $$\beta^{\frac{c'}{d}} = \gamma^{\frac{b'}{d}}$$

wo $d = (b', c')$ ist. Damit sind in beiden Fällen die Zahlen b und c gefunden.

Satz XI. *Sind α und β zwei transfinite Zahlen, zwischen denen die Gleichung*

(40a) $$\alpha^{b_1} = \beta^{a_1}$$

besteht, dann ist α mit β vertauschbar.

Beweis. α ist mit α^{b_1}, β mit $\beta^{a_1} = \alpha^{b_1}$ vertauschbar, also nach Satz V auch α mit β.

§ 4.

Wir betrachten nun schließlich die Gleichung

(1) $$\alpha^\beta = \beta^\alpha.\text{*)}$$

---

*) Gleichung (1) ist für endliches α und transfinites β unmöglich, wie sich zeigen läßt; daher setzen wir $\alpha, \beta \geqq \omega$ voraus.

Sei wieder

$$(2)\qquad \alpha = \omega^{\mu} a + \varrho + r,$$

$$(3)\qquad \beta = \omega^{\nu} b + \sigma + s.$$

Dann ist

$$(4)\qquad \alpha^{\beta} = \omega^{\mu(\beta - s)} \alpha^{s} {}^{*)},$$

$$(5)\qquad \beta^{\alpha} = \omega^{\nu(\alpha - r)} \beta^{r}.$$

Ist $r = 0$, dann ist β^{α} ein Haupttypus; ist in diesem Falle $s \succ 0$, so muß wegen (1) auch α^{β}, also $\alpha^{s} = \omega^{\mu(s-1)}\alpha$, daher auch α ein Haupttypus sein. Somit ist $\alpha = \omega^{\mu}$. Es wird dann $\alpha^{\beta} = \omega^{\mu\beta} = \beta^{\alpha} = \omega^{\nu\alpha}$, also $\mu\beta = \nu\alpha$. Diese Gleichung enthält aber einen Widerspruch; denn $\nu\alpha$ ist ein Haupttypus, $\mu\beta$ aber nicht, da $\mu\beta$ in der Normaldarstellung mehr als ein Glied enthält, also kein Haupttypus ist. Gleichung (1) ist in diesem Fall unmöglich.

Sei $r, s \succ 0$, dann ist

$$(6)\qquad \alpha^{s} = \omega^{\mu s} a + \cdots + r,$$

$$(7)\qquad \beta^{r} = \omega^{\nu r} b + \cdots + s.$$

Die Ausdrücke setzen wir in (4) und (5) ein und erhalten dann wegen (1)

$$(8)\qquad \omega^{\mu\beta} a + \cdots + \omega^{\mu(\beta - s)} r = \omega^{\nu\alpha} b + \cdots + \omega^{\nu(\alpha - r)} s.$$

Es folgt durch Vergleichung

$$(9)\qquad \mu\beta = \nu\alpha,$$

$$(10)\qquad \mu(\beta - s) = \nu(\alpha - r),$$

$$(11)\qquad r = s.$$

(10) und (11) zusammen ergeben

$$(10a)\qquad \mu(\beta - r) = \nu(\alpha - r).$$

Da nun $\mu\beta = \mu(\beta - r) + \mu r$, $\nu\alpha = \nu(\alpha - r) + \nu r$ ist, so folgt aus (9) und (10a)

$$(12)\qquad \mu r = \nu r.$$

Hieraus ergibt sich nach § 1, Gl. (10) $\mu = \nu$ und daher wegen (9) $\beta = \alpha$. Der letzte Fall, der nun noch möglich ist, ist $r = s = 0$.

Gleichung (1), (4) und (5) zusammen ergeben $\omega^{\mu\beta} = \omega^{\nu\alpha}$. Also ist

$$(9)\qquad \mu\beta = \nu\alpha.$$

Sei ω^{γ} der größte Haupttypus nicht oberhalb μ; ω^{δ} habe für ν die gleiche Bedeutung. Dann ist (9) gleichwertig mit

$$(13)\qquad \omega^{\gamma}\beta = \omega^{\delta}\alpha.$$

---

*) Ist ν ein Rest von λ, so bezeichnen wir die kleinste Lösung μ der Gleichung $\lambda = \mu + \nu$ mit $\lambda - \nu$.

Aus $\delta = \gamma$ folgt hiernach $\alpha = \beta$. Diesen Fall schließen wir aus und nehmen an

(14) $$\delta > \gamma, \quad \delta = \gamma + \varepsilon.$$

Durch (14) ist ε eindeutig definiert und (13) geht über in

(15) $$\beta = \omega^{\varepsilon}\alpha = \omega^{\varepsilon + \mu}a + \cdots$$
$$= \omega^{\nu}b + \cdots.$$

Hieraus ergibt sich

(16) $$\nu = \varepsilon + \mu.$$

Da nun $\omega^{\gamma+\varepsilon}$ das höchste Glied in der Cantorschen Normaldarstellung von ν ist, aber der größte nicht oberhalb μ gelegene Haupttypus $\omega^{\gamma} < \omega^{\gamma+\varepsilon}$ ist, so folgt aus (16), daß $\omega^{\gamma+\varepsilon}$ die größte Hauptzahl ist, die nicht oberhalb ε liegt, d. h.

(17) $$\varepsilon \geqq \omega^{\gamma+\varepsilon} \geqq \omega^{\varepsilon} \geqq \varepsilon,$$

(18) $$\varepsilon \geqq \omega^{\gamma+\varepsilon} > \mu \geqq \omega^{\gamma}.$$

Aus (17) folgt, daß $\varepsilon = \omega^{\varepsilon}$ ist. Also ist ε eine ε-Zahl.

Aus (18) folgt

(19) $$\varepsilon = \omega^{\varepsilon} > \omega^{\mu}$$

und daher

(20) $$\varepsilon > \alpha.$$

Die Gleichung (15) schreibt sich jetzt

(15a) $$\beta = \varepsilon\alpha.$$

Sei nun umgekehrt ε eine ε-Zahl oberhalb der Limeszahl α. Setzen wir dann $\beta = \varepsilon\alpha$, dann behaupten wir, daß β die Gleichung (1) erfüllt. Aus $\alpha = \omega^{\mu}a + \cdots < \varepsilon = \omega^{\varepsilon}$ folgt

(18) $$\mu < \varepsilon$$

und daher

(19) $$\mu\varepsilon = \varepsilon.$$

Nun ist $\alpha^{\beta} = \omega^{\mu\beta} = \omega^{\mu\varepsilon\alpha} = \omega^{\varepsilon\alpha}$ (wegen (19)). Weiter ist

$$\beta^{\alpha} = (\varepsilon\alpha)^{\alpha} = (\omega^{\varepsilon+\mu})^{\alpha} = \omega^{(\varepsilon+\mu)\alpha} = \omega^{\varepsilon\alpha} = \alpha^{\beta}.$$

Somit ist (1) erfüllt.*)

Wann gibt es eine Zahl $\beta < \alpha$, für die (1) erfüllt ist? Dann ist

$$\alpha = \varepsilon\beta \quad \text{und} \quad \varepsilon > \beta.$$

Daraus folgt, daß β dann und nur dann vorhanden ist, wenn

(20) $$\alpha = \omega^{\varepsilon+\nu}b + \omega^{\varepsilon+\nu_1}b_1 + \omega^{\varepsilon+\nu_2}b_2 + \cdots,$$

*) Aus $\beta = \varepsilon\alpha$ folgt $\sigma = \varepsilon\varrho$ und, da $\varepsilon > \varrho$ ist, ergibt sich demnach $\varrho^{\sigma} = \sigma^{\varrho}$.

wo

(21) $$\varepsilon = \omega^{\varepsilon} > \nu > \nu_1 > \nu_2 > \cdots$$

ist. β ist durch (20) eindeutig bestimmt.

Wir fassen die Resultate zusammen zu folgendem

Satz. *Die Gleichung* $\alpha^{\beta} = \beta^{\alpha}$ *ist für* $\beta \neq \alpha$ *nur möglich, wenn* α *eine Limeszahl ist. Verstehen wir dann unter* ε *eine beliebige* ε*-Zahl oberhalb* α, *so erfüllen alle Zahlen* $\beta = \varepsilon\alpha$ *unsere Gleichung, und wenn* β *sie erfüllt und oberhalb* α *liegt, dann hat* β *die angegebene Gestalt. (Unter gewissen Voraussetzungen existiert unterhalb* α *noch ein einziges* β, *für das* $\alpha^{\beta} = \beta^{\alpha}$ *ist.)*