

Geometrische Lösung zweier spezieller Fälle des Problems der drei Körper.

Von S. Tscherny.

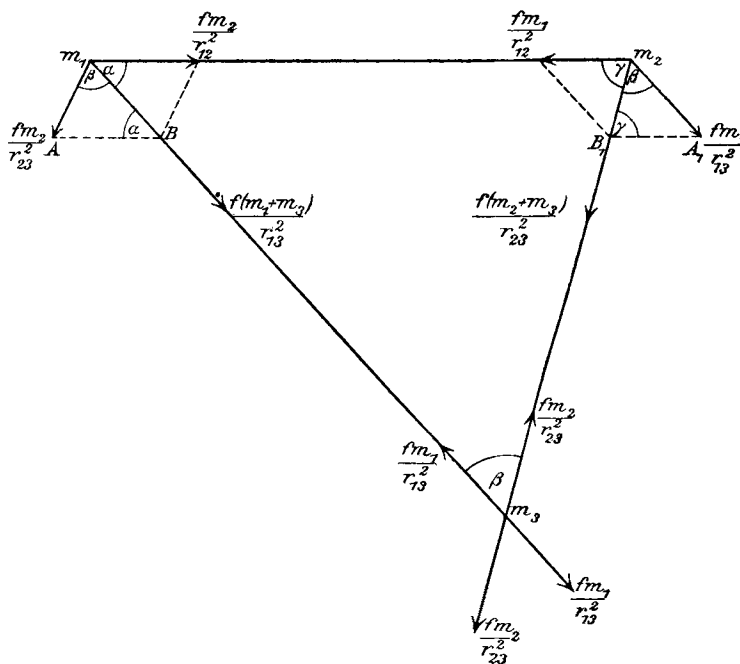
Eine elementare geometrische Lösung des Problems der drei Körper in den zwei klassischen speziellen Fällen habe ich in der mir vorliegenden Literatur nicht finden können¹⁾. Dieser Umstand veranlaßt mich, eine solche vorzulegen. Natürlich sind die Resultate, zu denen ich auf geometrischem Wege gelange, dieselben, die Lagrange auf analytischem Wege gefunden hat. Indessen scheint mir die geometrische Lösung des Problems ein gewisses Interesse zu bieten, da zu ihrem Verständnis keine Kenntnisse in der höheren Mathematik erforderlich sind und sie daher einer größeren Anzahl von Lesern verständlich ist. Außerdem ist diese Art der Lösung ebenso streng wissenschaftlich, wie die analytische und dabei bedeutend einfacher. Bei der Lösung des Problems setze ich voraus, daß die drei Körper aufeinander nach dem Gesetz der allgemeinen Gravitation wirken.

Lagrange²⁾ hat das Problem der drei Körper nur in zwei speziellen Fällen analytisch streng gelöst: erstens, wenn die drei Körper immer die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, und zweitens, wenn sie sich immer auf einer Geraden befinden. Im folgenden wollen wir versuchen, eine höchst einfache geometrische Lösung dieser zwei Fälle des Dreikörperproblems zu geben. Dabei werden wir uns auf folgenden, von Newton³⁾ geometrisch bewiesenen Lehrsatz stützen: »Geht ein Körper P vom Punkt P aus längs der beliebigen geraden Linie PR mit irgend einer Geschwindigkeit fort und wirkt auf ihn zugleich eine Zentripetalkraft ein, welche dem Quadrat seines Abstandes vom Mittelpunkt der Kräfte indirekt proportional ist, so bewegt sich dieser Körper in einem Kegelschnitt, dessen Brennpunkt im Zentrum der Kräfte liegt, und umgekehrt. Ist nämlich der Brennpunkt, der Berührungspunkt und die Lage der Tangente gegeben, so kann man einen Kegelschnitt beschreiben, welcher in jenem letzteren Punkte eine gegebene Krümmung hat. Die Krümmung wird aber durch die gegebene Zentripetalkraft und die Geschwindigkeit des Körpers bekannt und zwei sich wechselseitig berührende Bahnen können nicht vermöge derselben Zentripetalkraft und bei derselben Geschwindigkeit beschrieben werden.«

Zuerst wollen wir zeigen, wie man auf geometri-

ischem Wege zu diesen speziellen Fällen des Dreikörperproblems kommen kann. Bezeichnen wir die Massen der drei Punkte mit m_1, m_2, m_3 , die Abstände zwischen m_1 und m_2 mit r_{12} , zwischen m_2 und m_3 mit r_{23} und zwischen m_1 und m_3 mit r_{13} , den Winkel zwischen r_{12} und r_{13} mit α und den Winkel zwischen r_{13} und r_{23} mit β ; nennen wir f die Konstante der Anziehung,

Bestimmen wir die Bewegung der Punkte m_1 und m_2 gegen m_3 . Auf den Punkt m_1 wirkt die Anziehungskraft des Punktes m_3 , $\frac{f m_1 m_3}{r_{13}^2}$, die dem Punkte m_1 die Beschleunigung $\frac{f m_3}{r_{13}^2}$ erteilt; auf den Punkt m_2 wirkt die Anziehungskraft des Punktes m_1 , $\frac{f m_1 m_2}{r_{12}^2}$, die dem Punkte m_2 die Beschleunigung $\frac{f m_1}{r_{12}^2}$ erteilt; da wir aber die Bewegung des Punktes m_1 gegen den Punkt m_3 untersuchen wollen, können wir den Punkt m_3



Figur 1.

¹⁾ Es existiert noch eine andere geometrische Lösung von Laplace, Méc. céle. t. IV, l. X, Ch. VI; vgl. darüber auch das Referat von Charlier, Mech. des Himmels Bd. II p. 89-97.

²⁾ Lagrange, Oeuvres, t. VI.

³⁾ I. Newton. Mathematische Prinzipien der Naturlehre. Herausg. von Prof. Dr. Wolfers. I. Buch, Abschnitt III, § 33.

für unbeweglich ansehen; zu diesem Zweck erteilen wir dem Punkt m_3 eine Beschleunigung, die der Beschleunigung $\frac{f m_1}{r_{13}^2}$ gleich und direkt entgegengesetzt ist; damit aber die relative Lage der Punkte m_1 , m_2 und m_3 sich nicht ändere, müssen wir den Punkten m_1 und m_2 die Beschleunigung $\frac{f m_1}{r_{13}^2}$ in derselben Richtung erteilen, wie wir sie oben dem Punkt m_3 erteilt haben. Folglich wird jetzt auf den Punkt m_1 eine Kraft mit der Beschleunigung $\frac{f(m_1 + m_3)}{r_{13}^2}$ in der Richtung r_{13} wirken, dem Punkt m_2 ist eine Beschleunigung $\frac{f m_1}{r_{13}^2}$ parallel r_{13} erteilt (s. Fig. 1). Außerdem wirkt auf den Punkt m_1 die Anziehungskraft des Punktes m_2 , $\frac{f m_1 m_2}{r_{12}^2}$, die dem Punkt m_1 die Beschleunigung $\frac{f m_2}{r_{12}^2}$ erteilt; auf den Punkt m_2 wirkt die Anziehungskraft des Punktes m_1 , $\frac{f m_1 m_2}{r_{12}^2}$, die dem Punkt m_2 die Beschleunigung $\frac{f m_1}{r_{12}^2}$ erteilt; auf den Punkt m_2 wirkt die Anziehungskraft des Punktes m_3 , $\frac{f m_2 m_3}{r_{23}^2}$, die dem Punkt m_2 die Beschleunigung $\frac{f m_3}{r_{23}^2}$ erteilt; auf den Punkt m_3 wirkt die Anziehungskraft des Punktes m_2 , $\frac{f m_2 m_3}{r_{23}^2}$, die dem Punkt m_3 die Beschleunigung $\frac{f m_2}{r_{23}^2}$ erteilt. Um den Punkt m_3 für unbeweglich ansehen zu können, erteilen wir dem Punkt m_3 eine Beschleunigung, die der Beschleunigung $\frac{f m_2}{r_{23}^2}$ gleich und direkt entgegengesetzt ist; damit ferner die relative Lage der Punkte m_1 , m_2 , m_3 sich nicht ändere, erteilen wir den Punkten m_1 und m_2 eine Beschleunigung, die derjenigen gleich und parallel ist, die wir soeben dem Punkt m_3 erteilt haben; dann wird auf den Punkt m_2 in der Richtung r_{23} eine Kraft mit der Beschleunigung $\frac{f(m_2 + m_3)}{r_{23}^2}$ wirken (s. Fig. 1). Folglich sind dem Punkt m_1 in seiner relativen Bewegung um den Punkt m_3 drei Beschleunigungen erteilt (s. Fig. 1): die Beschleunigung $\frac{f(m_1 + m_3)}{r_{13}^2}$ in der Richtung nach dem Punkt m_3 , die Beschleunigung $\frac{f m_2}{r_{12}^2}$ in der Richtung nach dem Punkt m_2 und die Beschleunigung $\frac{f m_2}{r_{23}^2}$ in der Richtung parallel zu der Geraden $m_2 m_3$. Wenn die resultierende Beschleunigung der beiden letzten Beschleunigungen die Richtung nach dem Punkt m_3 hätte und außerdem indirekt proportional der Entfernung des Punktes m_1 vom Punkt m_3 wäre, so gäbe die Summe dieser resultierenden Beschleunigung und der Beschleunigung $\frac{f(m_1 + m_3)}{r_{13}^2}$ eine Beschleunigung, die nach dem Punkt m_3 gerichtet und indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung r_{13} wäre. Wenn außerdem die resultierende Beschleunigung der Beschleunigungen des Punktes m_2 , $\frac{f m_1}{r_{12}^2}$ und $\frac{f m_1}{r_{13}^2}$, nach m_3 gerichtet und indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung r_{23} wäre,

so könnten wir nach dem oben angeführten Lehrsatz Newtons das Problem der Bewegung der Punkte m_1 und m_2 gegen m_3 lösen. Sehen wir zu, in welchem Fall die angeführten Bedingungen möglich sind. Die resultierende Beschleunigung der beiden Beschleunigungen $\frac{f m_2}{r_{23}^2}$ und $\frac{f m_2}{r_{12}^2}$ wird die Diagonale des Parallelogramms sein, das aus diesen Beschleunigungen konstruiert ist. Damit die resultierende Beschleunigung nach m_3 gerichtet sei, ist erforderlich, daß die Diagonale $m_1 B$ des erwähnten Parallelogramms in ihrer Richtung mit r_{13} zusammenfalle (s. Fig. 1). Ganz ebenso muß die resultierende Beschleunigung $m_2 B_1$ des Punktes m_2 , $\frac{f m_1}{r_{12}^2}$ und $\frac{f m_1}{r_{13}^2}$ in ihrer Richtung mit r_{23} zusammenfallen (s. Fig. 1).

Aus dem Dreieck $A m_1 B$ finden wir

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\frac{f m_2}{r_{12}^2}}{\frac{f m_2}{r_{23}^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{r_{23}^2}{r_{12}^2}; \quad (1)$$

aber aus dem Dreieck $m_1 m_2 m_3$ haben wir

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{r_{12}}{r_{23}}.$$

Setzen wir diesen Wert von $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir

$$\frac{r_{12}}{r_{23}} = \frac{r_{23}^2}{r_{12}^2} \quad \left(\frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^3 - 1 = 0. \quad (2)$$

oder

Aus dem Dreieck $m_2 A_1 B_1$ finden wir, wenn wir mit γ den dritten Winkel des Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ benennen,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\frac{f m_1}{r_{12}^2}}{\frac{f m_1}{r_{13}^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{r_{13}^2}{r_{12}^2}; \quad (3)$$

aber aus dem Dreieck $m_1 m_2 m_3$ haben wir

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{r_{12}}{r_{13}}.$$

Wenn wir in die Gleichung (3) den letzteren Wert von $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{r_{12}}{r_{13}} = \frac{r_{13}^2}{r_{12}^2} \quad \left(\frac{r_{13}}{r_{12}} \right)^3 - 1 = 0. \quad (4)$$

Hier ist zu bemerken, daß die Gleichungen (3) und (4) keine Wurzeln für die Unbekannten $\frac{r_{23}}{r_{12}}$ und $\frac{r_{13}}{r_{12}}$ haben,

die gleich ∞ wären, da der Exponent der Zähler ihrer linken Seiten größer ist, als der ihrer Nenner. Setzen wir die Zähler der linken Seiten dieser Gleichungen gleich Null und lösen wir die erhaltenen Gleichungen dritten Grades auf, so finden wir

$$\frac{r_{23}}{r_{12}} = 1, \quad \frac{r_{13}}{r_{12}} = 1 \quad (5)$$

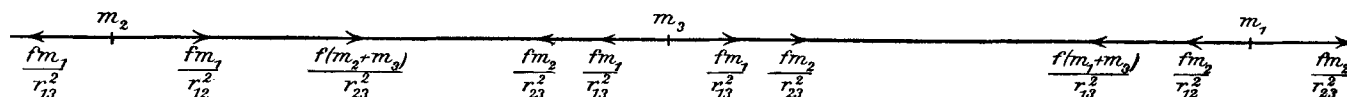
wobei hier die imaginären Wurzeln weggelassen sind, da sie der Aufgabe nicht entsprechen. Da die gefundenen Wurzeln der Zähler der linken Seiten der Gleichungen (3) und (4) ihre Nenner nicht zu Null werden lassen, so haben die Gleichungen folglich die Wurzel 1. Aus (5) finden wir

$$r_{23} = r_{12} = r_{13} = r.$$

Folglich ist das Dreieck $m_1 m_2 m_3$ bei der obigen Annahme gleichseitig. Die resultierende Beschleunigung der Beschleunigungen $\frac{f m_2}{r^2}$ und $\frac{f m_2}{r^2}$ muß die Diagonale eines Rhombus sein. Da aber

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3} \pi$$

ist, so ist das Dreieck $m_1 A B$ gleichseitig und folglich die resultierende Beschleunigung



Figur 2.

Dem Punkt m_1 sind die Beschleunigungen

$$\frac{f(m_1 + m_3)}{r_{13}^2}, \quad \frac{f m_2}{r_{12}^2} \quad \text{und} \quad \frac{f m_2}{r_{23}^2}$$

erteilt (s. Fig. 2). Dem Punkt m_2 sind die Beschleunigungen

$$\frac{f(m_2 + m_3)}{r_{23}^2}, \quad \frac{f m_1}{r_{12}^2} \quad \text{und} \quad \frac{f m_1}{r_{13}^2}$$

erteilt (s. Fig. 2). Folglich muß die resultierende Beschleunigung des Punktes m_1 sein

$$\frac{f(m_1 + m_3)}{r_{13}^2} + \frac{f m_2}{r_{12}^2} - \frac{f m_2}{r_{23}^2}$$

und die resultierende Beschleunigung des Punktes m_2

$$\frac{f(m_2 + m_3)}{r_{23}^2} + \frac{f m_1}{r_{12}^2} - \frac{f m_1}{r_{13}^2}.$$

Damit diese resultierenden Beschleunigungen den Quadraten der Entfernungen der Punkte m_1 und m_2 von m_3 umgekehrt proportional seien, müssen folgende Ausdrücke gelten

Die Ausdrücke (8) und (9) zeigen, daß zur Erfüllung der oben gestellten Bedingung die Verhältnisse der Entfernungen zwischen den Punkten m_1 , m_2 und m_3 konstant sein müssen. Damit diese Verhältnisse reell seien, sind folgende Bedingungen erforderlich:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &> k \\ m_1 + m_2 + m_3 &> l \end{aligned} \quad \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2 + m_3 - k}{m_1 + m_2 + m_3 - l} + \frac{k - m_1 - m_3}{m_2} > 0$$

¹⁾ Das kann man auch aus (5) ersehen, wenn wir das Verhältnis der Radienvektoren durch das Verhältnis der Sinusse der ihnen gegenüberliegenden Winkel ersetzen; dann erhalten wir $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1$ und $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 1$ oder $\sin \alpha = \sin \beta$ und $\sin \gamma = \sin \beta$, woraus wir entweder $\alpha = \beta$, $\gamma = \beta$ finden (erster Fall), oder $\alpha = 180^\circ - \beta$, $\gamma = \beta$ oder $\gamma = 180^\circ - \beta$; folglich liegen die drei Punkte m_1 , m_2 und m_3 auf einer Geraden.

$$m_1 B = \frac{f m_2}{r^2};$$

ebenso kann man sich überzeugen, daß

$$m_2 B_1 = \frac{f m_1}{r^2}$$

ist. Folglich ist im gegebenen Fall die resultierende Beschleunigung eines jeden der Punkte m_1 und m_2 gleich

$$\frac{f(m_1 + m_2 + m_3)}{r^2}$$

und nach m_3 gerichtet. Außerdem ist klar, daß die resultierende Beschleunigung der Beschleunigungen der Punkte m_1 und m_2 nach dem Punkt m_3 gerichtet ist¹⁾, wenn die drei Punkte m_1 , m_2 und m_3 immer auf einer Geraden liegen.

Suchen wir jetzt die Bedingung festzustellen, bei der die resultierende Beschleunigung eines jeden der Punkte m_1 und m_2 dem Quadrat der Entfernungen dieser Punkte von m_3 umgekehrt proportional ist. Die Punkte m_1 , m_2 und m_3 können auf dreifache Weise auf einer Geraden verteilt sein, in der Reihenfolge $m_1 m_3 m_2$, $m_1 m_2 m_3$ und $m_3 m_1 m_2$. Wir wollen das Problem für die erste Reihenfolge der Punkte untersuchen; für die beiden anderen Reihenfolgen der Punkte hätte man dieselbe Untersuchung mit nur unwesentlichen Abänderungen vorzunehmen.

$$\begin{aligned} \frac{f(m_1 + m_3)}{r_{13}^2} + \frac{f m_2}{r_{12}^2} - \frac{f m_2}{r_{23}^2} &= \frac{f k}{r_{13}^2} \\ \frac{f(m_2 + m_3)}{r_{23}^2} + \frac{f m_1}{r_{12}^2} - \frac{f m_1}{r_{13}^2} &= \frac{f l}{r_{23}^2} \end{aligned} \quad (6)$$

wo k und l konstante Größen sind. Die Ausdrücke (6) kann man auch so niederschreiben

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_{13}}{r_{12}}\right)^2 - \left(\frac{r_{13}}{r_{23}}\right)^2 &= \frac{k - m_1 - m_3}{m_2} \\ \left(\frac{r_{13}}{r_{12}}\right)^2 + \frac{m_2 + m_3 - l}{m_1} \left(\frac{r_{13}}{r_{23}}\right)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Aus den Gleichungen (7) finden wir

$$\frac{r_{13}}{r_{23}} = \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_1 + m_2 + m_3 - k}{m_2 \cdot m_1 + m_2 + m_3 - l}} \quad (8)$$

$$\frac{r_{13}}{r_{12}} = \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_1 + m_2 + m_3 - k}{m_2 \cdot m_1 + m_2 + m_3 - l} + \frac{k - m_1 - m_3}{m_2}} \quad (9)$$

oder
$$m_1 + m_2 + m_3 < k$$
$$m_1 + m_2 + m_3 < l$$

In diesem Fall gilt die dritte Ungleichheit, da

$$m_2 < k - m_1 - m_3 \quad \text{d. h.} \quad k - m_1 - m_3 > 0,$$

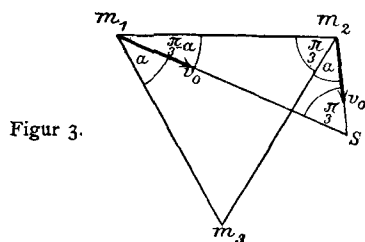
denn $m_2 > 0$. Zwischen k und l besteht eine Relation. Diese Relation erhalten wir, wenn wir in die Formel

$$r_{12} = r_{13} + r_{23}$$

die da ausdrückt, daß die drei Punkte auf einer Geraden liegen, aus (8) und (9) die Werte r_{23} und r_{13} in die Funktion r_{12} einsetzen. Auf diese Weise haben wir gezeigt, daß die resultierende Beschleunigung eines jeden der Punkte m_1 und m_2 in ihrer relativen Bewegung um den Punkt m_3 dem Quadrat der Entfernungen dieser Punkte von m_3 umgekehrt proportional ist und in der Richtung mit diesen Entfernungen in zwei Fällen zusammenfällt:

- 1) wenn das Dreieck, dessen Ecken die drei Punkte sind, während der Bewegung gleichseitig bleibt, und
- 2) wenn die drei Punkte sich immer auf einer Geraden befinden.

Die Bahnen eines jeden der zwei Punkte sind jetzt für jeden dieser Fälle leicht zu finden, wenn wir den Lehrsatz Newtons anwenden.



Figur 3.

Der erste Fall. Die resultierende Beschleunigung eines jeden der Punkte m_1 und m_2 ist in diesem Fall gleich $\frac{f(m_1 + m_2 + m_3)}{r^2}$ und nach m_3 gerichtet; deshalb umschreiben nach dem Lehrsatz Newtons die Punkte m_1 und m_2 gegen

Kiew, 1905 Nov. 19.

den Punkt m_3 Kegelschnitte, in deren gemeinsamem Brennpunkt sich der Punkt m_3 befindet. Die Anfangsgeschwindigkeiten der Punkte m_1 und m_2 sind gleich und bilden mit den anfänglichen Radienvektoren gleiche Winkel, da die entsprechenden Radienvektoren dieser beiden Kegelschnitte (und folglich auch die Kegelschnitte) gleich sind. Da die gleichen Radienvektoren dieser beiden Kegelschnitte immer einen Winkel $\frac{1}{3}\pi$ bilden, so bilden auch ihre großen Achsen denselben Winkel $\frac{1}{3}\pi$. Man kann sich leicht geometrisch davon überzeugen, daß der von den Anfangsgeschwindigkeiten gebildete Winkel gleich $\frac{1}{3}\pi$ ist. Es soll die Anfangsgeschwindigkeit v_0 eines jeden der Punkte m_1 und m_2 mit einem jeden Radiusvektor den Winkel α bilden. Verlängern wir dann die Geschwindigkeiten bis zur gegenseitigen Durchschneidung, so erhalten wir das Dreieck $S m_1 m_2$, in welchem der Winkel

$$\angle S = \pi - (\frac{1}{3}\pi - \alpha) - (\frac{1}{3}\pi + \alpha) = \frac{1}{3}\pi$$

ist (s. Fig. 3).

Der zweite Fall. Die resultierende Beschleunigung des Punktes m_1 ist gleich $\frac{fk}{r_{13}^2}$ und die des Punktes m_2 gleich $\frac{fl}{r_{23}^2}$; gerichtet sind diese Beschleunigungen nach dem Punkt m_3 ; darum beschreibt nach dem Lehrsatz Newtons ein jeder der Punkte m_1 und m_2 um den Punkt m_3 einen Kegelschnitt mit dem gemeinsamen Brennpunkt in m_3 , wobei diese Kegelschnitte einander ähnlich sind, da ihre Radienvektoren, wie oben gezeigt ist, sich in konstantem Verhältnis befinden. Die Konstanten k und l werden nach den anfänglichen Radienvektoren bestimmt.

So sehen wir, daß das Dreikörperproblem in den Fällen lösbar ist, wo es auf die Lösung des Problems der zwei Körper mit veränderter Masse des Hauptkörpers zurückgeführt wird (im ersten Fall tritt anstatt $m_1 + m_3$ und $m_2 + m_3$ ein, im zweiten k und l). Dieser Umstand beweist, daß alle unsere mathematischen und mechanischen Hilfsmittel für eine strenge Lösung nur des Problems der zwei Körper genügen.

S. Tscherny.

Sur une équation personnelle dans les observations photométriques.

A présent, on trouve de temps à autre dans les Astr. Nachr. des observations au photomètre Zöllner ce qui répond parfaitement à l'exigence de l'astronomie moderne; seulement, on ne voit pas toujours comment ces observations ont été faites: notamment, si l'observateur a effectué ses mesures dans les deux positions symétriques, c'est à dire ayant l'étoile naturelle une fois à gauche et puis à droite de l'étoile artificielle du photomètre. Cependant, il est connu depuis longtemps que ces observations sont affectées d'équation personnelle, et que les mesures dans les deux positions ne s'accordent pas dans les limites des erreurs calculées. Cette équation n'étant pas absolument constante, dépend de l'intensité absolue de l'étoile et varie par con-

séquent avec la lunette et, pour une même lunette, avec la phase d'une étoile variable, ce qui fait qu'il est impossible de corriger les observations postérieurement avec assez de précision.

La courbe donnant la valeur de cette équation en fonction de l'éclat, a pour moi la forme rappelant celle du signe d'intégrale.

L'influence de cette équation sur les résultats de mes observations est la suivante: si j'ai les étoiles naturelles à droite de l'artificielle, l'éclat relatif des étoiles observées sera toujours diminué, et, si je les ai à gauche, il sera toujours augmenté.

Moscou, le 11/24 février 1906.

Prof. W. Ceraski.