Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen.

Von

Gustav Doetsch in Hannover.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei, in der Hauptsache parallel laufende Teile, von denen der erste sich mit den Cesàroschen Mitteln bei *Reihen*, der zweite mit analog gebildeten Mitteln bei integrierbaren *Funktionen* beschäftigt. Die Sätze fließen aus gewissen Grenzwerttheoremen der Differenzen- und Differentialrechnung, die auch selbständiges Interesse haben.

Erster Teil.

Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen.

§ 1.

Zwei Grenzwertsätze der Differenzenrechnung.

Ist eine Folge von *reellen* Zahlen gegeben: $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$, so setzen wir:

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_n &= \gamma_n - \gamma_{n-1} && (n \geqq 1),\\ \Delta^2\gamma_n &= \Delta\gamma_n - \Delta\gamma_{n-1} && (n \geqq 2),\\ &\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\\ \Delta^r\gamma_n &= \Delta^{r-1}\gamma_{n-1} - \Delta^{r-1}\gamma_{n-1} && (n \geqq r). \end{aligned}$$

Satz I. *Ist*

$$\frac{\gamma_n}{n^k} \to A \quad \textit{für} \quad n \to \infty$$

und

$$\frac{\Delta^2\gamma_n}{n^{k-2}} > -c \quad \textit{für} \quad n \geqq n_0 \geqq 2,$$

wo A und k beliebige reelle Konstante und $c > 0$, so ist

$$\frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} \to A\,k.$$

Beweis. Der Spezialfall $k = 1$ dieses Satzes ist von Herrn Fujiwara[1]) bewiesen worden. Seine Methode läßt sich auch im allgemeinen Fall anwenden. — Durch Induktion beweist man leicht folgende Formel:

$$\gamma_m - \gamma_n = (m-n)\Delta\gamma_n + \Delta^2\gamma_m + 2\Delta^2\gamma_{m-1} + 3\Delta^2\gamma_{m-2} + \ldots + (m-n)\Delta^2\gamma_{n+1}$$
$$\text{für } m > n \geqq 1.$$

Unter den Voraussetzungen unseres Satzes ist also für $m > n \geqq n_0 - 1$:

$$\frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} > \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}}$$
$$- \frac{c}{(m-n)\,n^{k-1}}\{m^{k-2} + 2(m-1)^{k-2} + 3(m-2)^{k-2} + \ldots + (m-n)(n+1)^{k-2}\}.$$

In der Klammer stehen die Werte der Funktion $g(x) = (x+1)(m-x)^{k-2}$ für die ganzzahligen Argumente des Intervalls J: $0 \leqq x \leqq m - n - 1$. Für $k \leqq 2$ wächst $g(x)$ in diesem Intervall sicher, für $k > 2$ aber auch, wenn nur m hinreichend groß und n so nahe an m gelegen ist, daß $\frac{m}{n} < \frac{k-1}{k-2}$ ist $\left(\frac{k-1}{k-2} > 1\right)$. Denn $g(x)$ hat Extrema bei den Wurzeln von

$$0 = g'(x) = (m-x)^{k-2} - (x+1)(k-2)(m-x)^{k-3},$$

also im Falle $k > 3$ bei $x_1 = m$ und $x_2 = \frac{m-k+2}{k-1}$, im Falle $2 < k \leqq 3$ nur bei $x_2 = \frac{m-k+2}{k-1}$. x_1 liegt außerhalb J; x_2 ebenfalls, wenn $\frac{m}{n} < \frac{k-1}{k-2}$, denn dann ist a fortiori

$$\frac{m}{n} < \frac{k-1}{k-2} + \frac{1}{n(k-2)},$$

also

$$m - n - 1 < \frac{m-k+2}{k-1}.$$

$g(x)$ ist also in J monoton. Für hinreichend große m ist aber $g(1) > g(0)$, also wächst $g(x)$ in J sicher, wenn im Falle $k > 2$ nur m hinreichend groß und $\frac{m}{n} < \frac{k-1}{k-2}$ ist. Unter diesen Bedingungen erhalten wir also bei $m > n$ die Abschätzung:

$$(1) \qquad \frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} > \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} - \frac{c}{(m-n)\,n^{k-1}}(m-n)^2(n+1)^{k-2}$$
$$= \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} - c\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-2}\left(\frac{m}{n} - 1\right).$$

---

[1]) Matsusaburô Fujiwara, *Über summierbare Reihen und Integrale.* The Tôhoku mathematical journal 15 (1919), S. 323–329 (S. 325, 326).

Weiterhin gilt die zu der zuerst benutzten analoge Formel:

$$\gamma_m - \gamma_n = (m-n)\,\Delta\gamma_n + \Delta^2\gamma_{m+2} + 2\Delta^2\gamma_{m+3} + 3\Delta^2\gamma_{m+4} + \dots + (n-m-1)\,\Delta^2\gamma_n$$
$$\text{für } n > m+1 \geqq 1.$$

Unsere Voraussetzungen liefern also bei $n > m+1 \geqq n_0 - 1$:

$$\frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} < \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}}$$
$$+ \frac{c}{(n-m)\,n^{k-1}}\left\{(m+2)^{k-2} - 2\,(m+3)^{k-2} + 3\,(m+4)^{k-2} - \dots - (n-m-1)\,n^{k-2}\right\}.$$

Eine ähnliche Überlegung wie oben zeigt, daß die Glieder in der Klammer wachsen, wenn nur m hinreichend groß ist und im Falle $k < 1$ die Zahl m so nahe an n liegt, daß $\frac{m}{n} > \frac{1-k}{2-k}$ ist $\left(\frac{1-k}{2-k} < 1\right)$. Unter diesen Bedingungen finden wir also bei $n > m+1$:

$$(2)\quad \frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} < \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} + \frac{c}{(n-m)\,n^{k-1}}\,(n-m-1)^2\,n^{k-2} < \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} + c\left(1 - \frac{m}{n}\right).$$

Wir lassen nun m und n gegen ∞ wachsen und zwar so, daß $\frac{m}{n}$ gegen eine feste Zahl $\varepsilon \neq 1$ strebt, wobei

im Falle $m > n$ bei $k > 2$

$$1 < \varepsilon < \frac{k-1}{k-2},$$

„ „ $n > m+1$ bei $k < 1$

$$1 > \varepsilon > \frac{k-1}{k-2}$$

sein soll. Nach Voraussetzung ist

$$\gamma_m = A\,m^k + o(m^k),$$
$$\gamma_n = A\,n^k + o(n^k),$$

also bei $\frac{m}{n} \to \varepsilon$:

$$\gamma_m - \gamma_n = A\,n^k\left(\left(\frac{m}{n}\right)^k - 1\right) + o(n^k),$$

$$\frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} = \frac{\gamma_m - \gamma_n}{n^k\left(\frac{m}{n} - 1\right)} = A\,\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^k - 1}{\frac{m}{n} - 1} + o(1),$$

folglich

$$\frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} \to A\,\frac{\varepsilon^k - 1}{\varepsilon - 1}.$$

Aus unseren Abschätzungen (1) und (2) geht also hervor:

$$A\,\frac{\varepsilon^k - 1}{\varepsilon - 1} \geqq \limsup_{n=\infty} \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} - c\,(\varepsilon - 1) \qquad (\varepsilon > 1),$$

$$A\,\frac{\varepsilon^k - 1}{\varepsilon - 1} \leqq \liminf_{n=\infty} \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} + c\,(1 - \varepsilon) \qquad (\varepsilon < 1).$$

Hierin lassen wir ε von rechts, bzw. von links gegen 1 streben und erhalten:

$$A\,k \geqq \limsup_{n=\infty} \frac{\Delta\,\gamma_n}{n^{k-1}},$$

$$A\,k \leqq \liminf_{n=\infty} \frac{\Delta\,\gamma_n}{n^{k-1}},$$

folglich

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta\,\gamma_n}{n^{k-1}} = A\,k.$$

Satz II. *Ist*

$$\frac{\gamma_n}{n^{r+d}} \to A \qquad \text{für } n \to \infty$$

und

$$\frac{\Delta^r \gamma_n}{n^d} > -c \quad \text{für } n \geqq n_0 \geqq r,$$

wo A beliebig reell, r ganzzahlig $\geqq 2$, $d > -1$ und $c > 0$, so ist

$$\frac{\Delta\,\gamma_n}{n^{r+d-1}} \to A\,(r+d),$$

$$\frac{\Delta^2\,\gamma_n}{n^{r+d-2}} \to A\,(r+d)(r+d-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\Delta^{r-1}\,\gamma_n}{n^{1+d}} \to A\,(r+d)(r+d-1)\ldots(2+d).$$

Beweis. Es ist für $n > n_0$:

$$\Delta^{r-1}\gamma_n - \Delta^{r-1}\gamma_{n_0} = \sum_{\nu=n_0+1}^{n} (\Delta^{r-1}\gamma_\nu - \Delta^{r-1}\gamma_{\nu-1}) = \sum_{\nu=n_0+1}^{n} \Delta^r \gamma_\nu,$$

also unter unseren Voraussetzungen

$$\Delta^{r-1}\gamma_n > \Delta^{r-1}\gamma_{n_0} - c \sum_{\nu=n_0+1}^{n} \nu^d > \Delta^{r-1}\gamma_{n_0} - c \sum_{\nu=1}^{n} \nu^d.$$

Im Falle $d \geqq 0$ haben wir

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^d \leqq n^{d+1},$$

im Falle $-1 < d < 0$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^d < \int_0^n \nu^d\,d\nu = \frac{n^{d+1}}{d+1}.$$

Da n^{d+1} für $d > -1$ mit n gegen ∞ wächst, so kann man $c_1 > 0$ so wählen, daß für $n \geqq n_0 \geqq r \geqq 2$

$$\Delta^{r-1}\gamma_n > -c_1\,n^{d+1}$$

ist. Ganz ebenso folgt:

$$\Delta^{r-2}\gamma_n > -c_3 n^{d+2} \qquad (c_2 > 0),$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots$$

$$\Delta^2\gamma_n > -c_{r-2} n^{r+d-2} \qquad (c_{r-2} > 0)$$

für $n \geqq n_0$. Satz I, angewandt auf γ_n und $k = r + d$, liefert:

$$\frac{\Delta\gamma_n}{n^{r+d-1}} \to A(r+d);$$

angewandt auf $\Delta\gamma_n$ und $k = r + d - 1$:

$$\frac{\Delta^2\gamma_n}{n^{r+d-2}} \to A(r+d)(r+d-1);$$

usw.; zuletzt

$$\frac{\Delta^{r-1}\gamma_n}{n^{1-d}} \to A(r+d)(r+d-1)\ldots(d+2).$$

§ 2.

Sätze über die mit der Cesàroschen Methode summablen Reihen.

Ist die konvergente oder oszillierende Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ gegeben, so definieren wir mit Cesàro[2]), Herrn Knopp[3]) und Herrn Chapman[4]) eine Folge von Zahlen $s_n^{(k)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ für festes reelles $k \neq -1, -2, \ldots$ durch

$$s_n^{(k)} = \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{\Gamma(n+k-\varkappa+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-\varkappa+1)}\, a_\varkappa.$$

Dann gilt die Beziehung

$$\Delta s_n^{(k)} = s_n^{(k-1)}.$$

Hat die Folge der Zahlen

$$\frac{\Gamma(k+1)\, s_n^{(k)}}{n^k} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

bei einem bestimmten k für $n \to \infty$ einen Grenzwert, so heißt die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ *summabel* (C, k); ist sie beschränkt oder (bei reellen a_n) einseitig beschränkt, so heißt die Reihe *beschränkt*, bzw. *einseitig beschränkt* (C, k).

---

[2]) E. Cesàro, *Sur la multiplication des séries.* Bulletin des sciences mathématiques, 2ᵉ série, **14** (1890), S. 114–120.

[3]) K. Knopp, *Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze.* Inauguraldissertation, Berlin 1907, S. 45.

[4]) S. Chapman, *On non-integral orders of summability of series and integrals.* Proceedings of the London mathematical society, series 2, **9** (1911), S. 369–409.

Ich behaupte nun folgende Theoreme:

Satz 1. *Ist eine reelle Reihe summabel* (C, k) $(k \neq 0, -1, -2 \dots)$ *und einseitig beschränkt* $(C, k-2)$, *so ist sie schon summabel* $(C, k-1)$ (im Falle $k = 1$ soll die zweite Voraussetzung bedeuten: $n a_n > -c$).

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Grenzwertsatz I des § 1.

Satz 2. *Ist eine reelle Reihe einseitig beschränkt* (C, d) $(d > -1)$ *und von irgendeiner Ordnung* k *summabel* (C, k), *so ist sie summabel* $(C, d+1)$, *d. h. ist sie nicht summabel* $(C, d+1)$, *so ist sie von keiner Ordnung summabel* (C, k).

Beweis. Ich wähle r ganzzahlig $\geqq 2$ so groß, daß $r + d \geqq k$ ist. Dann ist die Reihe bekanntlich auch summabel $(C, r+d)$, und wir erhalten aus den Voraussetzungen

$$\frac{\Gamma(r+d+1)\, s_n^{(r+d)}}{n^{r+d}} \longrightarrow s$$

und

$$\frac{\Gamma(d+1)\, s_n^{(d)}}{n^d} = \frac{1}{(r+d)(r+d-1)\dots(d+1)} \cdot \frac{\Delta^r\{\Gamma(r+d+1)\, s_n^{(r+d)}\}}{n^d} > -c$$

nach Satz II des § 1:

$$\frac{\Delta^{r-1}\{\Gamma(r+d+1)\, s_n^{(r+d)}\}}{n^{d+1}}$$

$$= (r+d)(r+d-1)\dots(d+2)\, \frac{\Gamma(d+2)\, s_n^{(d+1)}}{n^{d+1}} \longrightarrow (r+d)\dots(d+2)\, s.$$

also

$$\frac{\Gamma(d+2)\, s_n^{(d+1)}}{n^{d+1}} \longrightarrow s.$$

Die Ergänzung des Satzes 2 für den Fall $d = -1$ wird, wenn man $s_n^{(-1)} = a_n$ definiert, geliefert durch den Satz von Herrn Landau[5]):

Ist eine reelle Reihe summabel (C, k) *und* $n a_n > -c$, *so ist sie konvergent.*

Sein Spezialfall $k = 1$ ist in Satz 1 enthalten[6]).

Auf Grund von Satz 1 gelingt es, einen Satz von Herrn Rosenblatt[7]), dessen Beweis acht Druckseiten lang ist, in wenigen Zeilen zu folgern:

---

[5]) E. Landau, *Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer.* Prac matematyczno-fizycznych **21** (1910), S. 97–177.

[6]) Vgl. Fujiwara, l. c. S. 325, 326.

[7]) A. Rosenblatt, *Über die Multiplikation der unendlichen Reihen.* Bulletin de l'académie des sciences de Cracovie, sér. A, (1913), S. 603–631 (S. 612–620). Herr Rosenblatt beweist den Satz für ganzzahlige k_1, k_2. — Für $k_1 = k_2 = -1$ fällt der Satz mit einem Theorem von Herrn Hardy über konvergente Reihen zusammen (G. H. Hardy, *The multiplication of conditionally convergent series.* Proceedings of the London mathematical society, series 2, **6** (1908), S. 410–423, theorem *C*).

Satz 3. *Sind zwei Reihen* $a_0 + a_1 + \ldots$ *und* $b_0 + b_1 + \ldots$ *beschränkt* (C, k_1), *bzw.* (C, k_2) $(k_1 \geqq -1,\ k_2 \geqq -1)$ *und summabel* $(C, k_1 + 1)$, *bzw.* $(C, k_2 + 1)$, *so ist ihre Produktreihe* $c_0 + c_1 + \ldots$, *wo*

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

ist, summabel $(C, k_1 + k_2 + 2)$. (Im Falle $k_1 = -1$, bzw. $k_2 = -1$ soll die erste Voraussetzung bedeuten: $|n a_n| < c$, bzw. $|n b_n| < c$.)

Beweis. Wenn die dem Buchstaben s vorgesetzten Indizes 0, 1, 2 sich auf die Reihen $c_0 + c_1 + \ldots$, $a_0 + a_1 + \ldots$, $b_0 + b_1 + \ldots$ beziehen, so ist

$${}_0s_n^{(k_1+k_2+1)} = \sum_{\nu=0}^{n} {}_1s_\nu^{(k_1)} \cdot {}_2s_{n-\nu}^{(k_2)}.$$

Denn es ist formal[8])

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_1s_n^{(k_1)} x^n = (1-x)^{-(k_1+1)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_2s_n^{(k_2)} x^n = (1-x)^{-(k_2+1)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

also bei Multiplikation:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} {}_1s_\nu^{(k_1)}\, {}_2s_{n-\nu}^{(k_2)} x^n = (1-x)^{-(k_1+k_2+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} x^n$$

$$= (1-x)^{-((k_1+k_2+1)+1)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Andererseits ist aber:

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_0s_n^{(k_1+k_2+1)} x^n = (1-x)^{-((k_1+k_2+1)+1)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

woraus die obige Formel folgt. (Sie stimmt bei der Konvention ${}_1s_n^{(-1)} = a_n$ usw. auch für $k_1 = -1$ und $k_2 = -1$.)

Ist nun für $\nu \geqq 1$

$$|{}_1s_\nu^{(k_1)}| < K_1 \nu^{k_1},$$
$$|{}_2s_\nu^{(k_2)}| < K_2 \nu^{k_2},$$

so ist für $n \geqq 2$:

$$|{}_0s_n^{(k_1+k_2+1)}| \leqq |{}_1s_0^{(k_1)}| K_2 n^{k_2} + K_1 n^{k_1} |{}_2s_0^{(k_2)}| + K_1 K_2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{k_1} (n-\nu)^{k_2}$$
$$\leqq C_1 n^{k_2} + C_2 n^{k_1} + C_3 n \cdot n^{k_1} n^{k_2}.$$

---

[8]) Vgl. Knopp, l. c. S. 45.

Da wegen $k_1 \geqq -1,\ k_2 \geqq -1$

$$k_1 + k_2 + 1 \geqq k_1, \qquad k_1 + k_2 + 1 \geqq k_2$$

ist, so gibt es ein $K_0 > 0$, so daß für $n \geqq 2$

$$\left| {}_0s_n^{(k_1+k_2+1)} \right| < K_0\, n^{k_1+k_2+1}$$

ist, d. h. die Produktreihe ist beschränkt $(C, k_1 + k_2 + 1)$. Andererseits ist sie aber nach einem allgemeinen Satz[9]) sicher summabel $(C, k_1 + k_2 + 3)$, also nach unserem Satz 1 summabel $(C, k_1 + k_2 + 2)$.

Zweiter Teil.

Über eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen.

§ 1.

Zwei Grenzwertsätze der Differentialrechnung[10]).

Satz I. *Es sei $\varphi(x)$ für $x \geqq 0$ reell und zweimal differenzierbar, A und k beliebig reell,* $c > 0$ und

$$\frac{\varphi(x)}{x^k} \to A \quad \textit{für} \quad x \to \infty,$$

$$\varphi''(x) > -c\,x^{k-2} \quad \textit{für} \quad x \geqq x_0 > 0,\ \textit{d. h.}\ \varphi''(x) = O_L(x^{k-2}).$$

Dann ist

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} \to A\,k \quad \textit{für} \quad x \to \infty^{11}).$$

Beweis. Der Fall $k = 1$ deckt sich mit einem Satz von Herrn Kubota, der von Herrn Fujiwara[12]) sehr einfach vermittels des

---

[9]) Vgl. Chapman, l. c. S. 378.

[10]) Diese Sätze (ohne die Erweiterung zu Satz I) habe ich in meiner Inauguraldissertation: *Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen*, Göttingen 1920, 56 S., S. 36–39, abgeleitet.

[11]) Der entsprechende Satz mit den wesentlich engeren Voraussetzungen: φ'' stetig, $k > 0$ und $\varphi'' = O(x^{k-2})$ läßt sich aus den Theoremen 1b und 5b in Hardy *and* Littlewood, *Contributions to the arithmetic theory of series.* Proceedings of the London mathematical society, ser. 2, **11** (1913), S. 411–478 (S. 417 und S. 424, 425) ableiten. Den obigen Grenzwertsatz I, mit der Einschränkung: φ'' stetig, $k > 1$, haben die Herren Hardy und Littlewood in ihrer Arbeit: Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proceedings of the London mathematical society, ser. 2, **13** (1915), S. 174–191 (S. 186, 187) mit der Bemerkung, daß sie einen Beweis nicht veröffentlicht hätten, benutzt, um ein bereits bewiesenes Theorem auf einem neuen Wege abzuleiten.

[12]) Fujiwara, l. c. S. 323, 324.

Taylorschen Lehrsatzes bewiesen worden ist. Dieselbe Methode führt im allgemeinen Fall zum Ziel.

Es sei $0 < \alpha < 1$ oder $\alpha > 1$. Dann ist für $x > 0$:

$$\varphi(\alpha x) = \varphi(x) + (\alpha x - x)\varphi'(x) + (\alpha x - x)^2 \frac{\varphi''(\beta x)}{2},$$

wo

$$\beta = 1 + \vartheta(\alpha - 1), \quad 0 < \vartheta < 1, \quad \text{also } \alpha < \beta < 1, \text{ bzw. } 1 < \beta < \alpha$$

ist. Hieraus folgt:

$$\frac{\varphi(\alpha x) - \varphi(x)}{x(\alpha - 1)} - x\frac{\alpha - 1}{2}\varphi''(\beta x) = \varphi'(x),$$

also

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = \frac{\varphi(\alpha x) - \varphi(x)}{x^k(\alpha - 1)} - \frac{(\alpha - 1)\beta^{k-2}}{2}\frac{\varphi''(\beta x)}{(\beta x)^{k-2}}.$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$\varphi(\alpha x) = A(\alpha x)^k + o(x^k),$$
$$\varphi(x) = A x^k + o(x^k),$$

mithin

$$\frac{\varphi(\alpha x) - \varphi(x)}{x^k} = A(\alpha^k - 1) + o(1).$$

Wegen der Voraussetzung über $\varphi''(x)$ haben wir weiterhin

im Falle $\alpha > 1$ für $\beta x > x \geqq x_0$:

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} < \frac{\varphi(\alpha x) - \varphi(x)}{x^k(\alpha - 1)} + \frac{(\alpha - 1)\beta^{k-2}}{2} c,$$

also

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} \leqq A\frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} + \frac{c}{2}\gamma^{k-2}(\alpha - 1),$$

wo $\gamma = \alpha$ oder 1, je nachdem $k \geqq 2$ oder < 2 ist;

im Falle $\alpha < 1$ für $\beta x > \alpha x \geqq x_0$:

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} > \frac{\varphi(\alpha x) - \varphi(x)}{x^k(\alpha - 1)} - \frac{(1 - \alpha)\beta^{k-2}}{2} c,$$

also

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} \geqq A\frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} - \frac{c}{2}\delta^{k-2}(1 - \alpha),$$

wo $\delta = 1$ oder α, je nachdem $k \geqq 2$ oder < 2 ist.

Lassen wir α von rechts, bzw. von links gegen 1 streben, so erhalten wir:

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} \leqq A k,$$

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} \geqq A k,$$

woraus folgt:

$$\lim \frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = A\,k.$$

Erweiterung des Satzes I. *Es sei $\varphi(x)$ für $x \geqq 0$ reell und zweimal differenzierbar, $\varphi''(x)$ in jedem endlichen Intervall im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel, A und k beliebig reell, $0 \leqq d \leqq 1$, $c > 0$ und*

$$\varphi(x) = A\,x^k + o(x^{k-1+d}) \quad \textit{für } x \to \infty,$$
$$\varphi''(x) > -c\,x^{k-1-d} \quad \textit{für } x \geqq x_0 > 0, \text{ d. h. } \varphi''(x) = O_L(x^{k-1-d});$$

dann ist

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} \to A\,k \qquad \textit{für } x \to \infty.$$

Beweis. Für $d = 1$ unterscheidet sich dieser Satz von Satz I nur dadurch, daß bei letzterem die Integrabilität von $\varphi''(x)$ nicht vorausgesetzt wird. Es genügt also, den Satz für $0 \leqq d < 1$ zu beweisen. Angenommen, es sei nicht $\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} \to A\,k$. Dann gibt es eine unendliche, gegen $+\infty$ wachsende Folge von Zahlen $x_\nu > x_0 > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und eine Zahl $\eta > 0$, so daß entweder

$$\frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} > A\,k + \eta$$

oder

$$\frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} < A\,k - \eta$$

für alle $\nu = 1, 2, \ldots$ ist. Betrachten wir zunächst den *ersten* Fall. Es ist für $x > 0$:

$$\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}}\right) = \frac{\varphi''(x)}{x^{k-1}} - (k-1)\frac{\varphi'(x)}{x^k},$$

also, da $\varphi''(x)$ integrabel vorausgesetzt wird:

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = \frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} + \int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\,d\,y - (k-1)\int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi'(y)}{y^k}\,d\,y.$$

Durch Anwendung der partiellen Integration auf das letzte Integral folgt:

$$(1) \quad \frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = \frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} + \int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\,d\,y - (k-1)\left(\frac{\varphi(x)}{x^k} - \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k}\right) - k(k-1)\int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}}\,d\,y.$$

Nun ist, wie wir annehmen wollten:

$$(2) \qquad \frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} > A\,k + \eta;$$

ferner nach Voraussetzung für $y \geqq x_0$:

$$\frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}} > -c\,y^{-d},$$

also für $x \geqq x_\nu$:

$$\int\limits_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\,dy \geqq -c\int\limits_{x_\nu}^{x}\frac{dy}{y^d} \geqq -c\,\frac{x-x_\nu}{x_\nu^d}.$$

Wir wählen nun eine feste Zahl $\delta > 0$ so, daß

$$c\delta < \frac{\eta}{6}$$

ist. Für

$$0 \leqq \frac{x-x_\nu}{x_\nu^d} \leqq \delta,$$

d. h. für

$$x_\nu \leqq x \leqq x_\nu + \delta x_\nu^d = \xi_\nu$$

ist dann

$$(3) \qquad \int\limits_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\,dy > -\frac{\eta}{6}.$$

Weiterhin hat $\frac{\varphi(y)}{y^k}$ für $y \to \infty$ den Grenzwert A. Also gibt es ein X_0, so daß für $x \geqq x_\nu > X_0$

$$(4) \qquad \left|(k-1)\left(\frac{\varphi(x)}{x^k} - \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k}\right)\right| < \frac{\eta}{6}$$

und ein X_1, so daß für $y > X_1$

$$\left|\frac{\varphi(y)}{y^k}\right| < |A| + 1,$$

also für $x \geqq x_\nu > X_1$

$$\left|\int\limits_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}}\,dy\right| \leqq (|A|+1)\frac{x-x_\nu}{x_\nu},$$

folglich

$$\left|k(k-1)\int\limits_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}}\,dy\right| \leqq (|A|+1)|k(k-1)|\,\frac{x-x_\nu}{x_\nu^d}\cdot\frac{1}{x_\nu^{1-d}},$$

mithin für $X_1 < x_\nu \leqq x \leqq \xi_\nu$

$$\left|k(k-1)\int\limits_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}}\,dy\right| \leqq (|A|+1)|k(k-1)|\,\frac{\delta}{x_\nu^{1-d}}$$

ist; da $d < 1$ ist, so gibt es ein $X_2 > X_1$, so daß für $X_2 < x_\nu \leqq x \leqq \xi_\nu$

$$(5) \qquad \left| k(k-1) \int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}} dy \right| < \frac{\eta}{6}$$

ist. Aus (1) bis (5) folgt: Für $\operatorname{Max}(X_0, X_2) = X_3 < x_\nu \leqq x \leqq \xi_\nu$ ist

$$(6) \qquad \frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} > A k + \frac{\eta}{2}.$$

Da

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x)}{x^k}\right) = \frac{\varphi'(x)}{x^k} - k \frac{\varphi(x)}{x^{k+1}},$$

also

$$\frac{\varphi(\xi_\nu)}{\xi_\nu^k} - \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} = \int_{x_\nu}^{\xi_\nu} \frac{\varphi'(x)}{x^k} dx - k \int_{x_\nu}^{\xi_\nu} \frac{\varphi(x)}{x^{k+1}} dx$$

ist, so folgt aus (6) und der Voraussetzung

$$\frac{\varphi(x)}{x^k} = A + o(x^{d-1}) = A + o(1):$$

Für $x_\nu > X_3$ ist

$$\frac{\varphi(\xi_\nu)}{\xi_\nu^k} - \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} > \left(A k + \frac{\eta}{2}\right) \lg \frac{\xi_\nu}{x_\nu} - k \int_{x_\nu}^{\xi_\nu} \frac{A + 0(1)}{x} dx$$

$$= \frac{\eta}{2} \lg \frac{\xi_\nu}{x_\nu} - k \int_{x_\nu}^{\xi_\nu} \frac{o(1)}{x} dx = \left(\frac{\eta}{2} - k\, o(1)\right) \lg \frac{\xi_\nu}{x_\nu}$$

$$= \left(\frac{\eta}{2} + o(1)\right) \lg \left(1 + \frac{\delta}{x_\nu^{1-d}}\right).$$

Für alle hinreichend großen x_ν ist also

$$\frac{\varphi(\xi_\nu)}{\xi_\nu^k} - \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} > \left(\frac{\eta}{2} + o(1)\right) \frac{\delta}{x_\nu^{1-d}} \left(1 - \frac{\delta}{2 x_\nu^{1-d}} + \frac{\delta^2}{3 x_\nu^{2(1-d)}} \cdots\right)$$

$$> \frac{\eta}{4} \cdot \frac{\delta}{x_\nu^{1-d}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{K}{x_\nu^{1-d}} \qquad (K > 0).$$

Dies ist aber ein Widerspruch gegen die Voraussetzung

$$\frac{\varphi(x)}{x^k} = A + o\left(\frac{1}{x^{1-d}}\right),$$

nach der von einer Stelle $X = X(K)$ an für alle $x'' > x' > X$

$$\left| \frac{\varphi(x'')}{x''^k} - \frac{\varphi(x')}{x'^k} \right| < \frac{K}{x'^{1-d}}$$

sein muß.

Liegt der *zweite* Fall vor:

$$\frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} < Ak - \eta, \tag{7}$$

so schreiben wir die Gleichung (1) in der Form:

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = \frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} - \int_x^{x_\nu} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\,dy + (k-1)\left(\frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} - \frac{\varphi(x)}{x^k}\right) \tag{8}$$

$$+ k(k-1)\int_x^{x_\nu} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}}\,dy.$$

Da nach Voraussetzung für $y \geqq x_0$

$$-\frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}} < cy^{-d}$$

ist, so erhalten wir für $x_\nu > x > x_0$:

$$-\int_x^{x_\nu} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\,dy \leqq c\,\frac{x_\nu - x}{x^d}.$$

Wählen wir $\delta > 0$ so, daß $c\,\delta < \frac{\eta}{6}$ ist, und nennen wir η_ν das kleinste positive x, das der Ungleichung

$$0 \leqq \frac{x_\nu - x}{x^d} \leqq \delta$$

genügt, für das also die Gleichung $x_\nu - \eta_\nu = \delta\,\eta_\nu^d$ besteht, so gilt für

$$x_0 < \eta_\nu \leqq x \leqq x_\nu$$

die Beziehung:

$$-\int_x^{x_\nu} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\,dy < \frac{\eta}{6}. \tag{9}$$

Weiterhin ist analog zu (4) für $x \geqq \eta_\nu > X_0$:

$$\left|(k-1)\left(\frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} - \frac{\varphi(x)}{x^k}\right)\right| < \frac{\eta}{6} \tag{10}$$

und analog zu (5) für $X_2 < \eta_\nu \leqq x \leqq x_\nu$:

$$\left|k(k-1)\int_x^{x_\nu} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}}\,dy\right| < \frac{\eta}{6}. \tag{11}$$

Nach (7) bis (11) ist für $\mathrm{Max}(x_0, X_0, X_2) = X_4 < \eta_\nu \leqq x \leqq x_\nu$

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} < Ak - \frac{\eta}{2}. \tag{12}$$

Aus

$$\frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} - \frac{\varphi(\eta_\nu)}{\eta_\nu^k} = \int_{\eta_\nu}^{x_\nu} \frac{\varphi'(x)}{x^k}\,dx - k\int_{\eta_\nu}^{x_\nu} \frac{\varphi(x)}{x^{k+1}}\,dx$$

folgt mit Hilfe von (12) und der Voraussetzung $\frac{\varphi(x)}{x^k} = A + o(1)$, sowie der Bemerkung, daß η_ν mit x_ν gegen ∞ strebt, daß für alle hinreichend großen ν

$$\frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} - \frac{\varphi(\eta_\nu)}{\eta_\nu^k} < \left(A k - \frac{\eta}{2}\right) \lg \frac{x_\nu}{\eta_\nu} - k \int_{\eta_\nu}^{x_\nu} \frac{A + o(1)}{x}\,dx$$

$$= \left(-\frac{\eta}{2} + o(1)\right) \lg \frac{x_\nu}{\eta_\nu} = \left(-\frac{\eta}{2} + o(1)\right) \lg \left(1 + \frac{\delta}{\eta_\nu^{1-d}}\right)$$

$$< -\frac{\eta}{4} \cdot \frac{\delta}{\eta_\nu^{1-d}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{K}{\eta_\nu^{1-d}}$$

ist. Dies ist abermals ein Widerspruch gegen die Voraussetzung $\frac{\varphi(x)}{x^k} = A + o\left(\frac{1}{x^{1-d}}\right)$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung. Satz I und seine Erweiterung geben eine *hinreichende* Bedingung dafür an, daß man aus $\varphi(x) \sim A x^k$ auf $\varphi'(x) \sim A k x^{k-1}$ schließen kann. Zum Vergleich zitiere ich als einen der bekanntesten und weittragendsten Sätze dieser Art den Satz von Herrn Landau[13]: *Ist $\varphi(x) \sim x$ und $x \cdot \varphi'(x)$ nie abnehmend, so ist $\varphi'(x) \to 1$.*

Satz II. *Es sei $\psi(x)$ für $x \geqq 0$ reell und r-mal differenzierbar $(r \geqq 2)$, $\psi^{(r)}(x)$ eigentlich integrabel, A beliebig reell, d beliebig $\geqq 0$, $c > 0$ und*

$$\frac{\psi(x)}{x^{r+d}} \to A \quad \text{für } x \to \infty,$$

$$\psi^{(r)}(x) > -c x^d \quad \text{für } x \geqq x_0 > 0, \text{ d. h. } \psi^{(r)}(x) = O_L(x^d).$$

Dann ist

$$\frac{\psi'(x)}{x^{r+d-1}} \to A(r+d),$$

$$\frac{\psi''(x)}{x^{r+d-2}} \to A(r+d)(r+d-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\psi^{(r-1)}(x)}{x^{1+d}} \to A(r+d)(r+d-1)\ldots(2+d);$$

[13]) E. Landau, *Beiträge zur analytischen Zahlentheorie.* Rendiconti del circolo matematico di Palermo **26** (1908), S. 169–302 (S. 218, 219).

Beweis. Es ist für $y \geqq x_0$:

$$\psi^{(r)}(y) > -c y^d,$$

also für $x \geqq x_0$:

$$\psi^{(r-1)}(x) - \psi^{(r-1)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \psi^{(r)}(y)\,dy \geqq -\frac{c}{d+1} x^{d+1} + \frac{c}{d+1} x_0^{d+1},$$

mithin

$$\psi^{(r-1)}(x) > -c_1 x^{d+1} \qquad (c_1 > 0).$$

Ferner für $x \geqq x_0$:

$$\psi^{(r-2)}(x) - \psi^{(r-2)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \psi^{(r-1)}(y)\,dy \geqq -\frac{c_1}{d+2} x^{d+2} + \frac{c_1}{d+2} x_0^{d+2},$$

also

$$\psi^{(r-2)}(x) > -c_2 x^{d+2} \qquad (c_2 > 0),$$

usw., schließlich

$$\psi''(x) > -c_{r-2} x^{r+d-2} \qquad (c_{r-2} > 0)$$

für $x \geqq x_0$. Satz I, angewandt auf $\varphi(x) = \psi(x)$ und $k = r + d$, liefert:

$$\frac{\psi'(x)}{x^{r+d-1}} \to A(r+d);$$

angewandt auf $\varphi(x) = \psi'(x)$ und $k = r + d - 1$:

$$\frac{\psi''(x)}{x^{r+d-2}} \to A(r+d)(r+d-1);$$

usw.; zuletzt:

$$\frac{\psi^{(r-1)}(x)}{x^{d+1}} \to A(r+d)\ldots(2+d).$$

§ 2.

Sätze über eine Erweiterung des Grenzwertbegriffes.

Es sei eine reelle Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x für $x \geqq 0$ definiert und in jedem endlichen Intervall im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel. Es kann vorkommen, daß $f(x)$ für $x \to \infty$ einen *Grenzwert* hat; dies entspricht bei Reihen dem Falle der Konvergenz, wo die Partialsummen einen Grenzwert haben. Strebt die Funktion keinem Grenzwert zu, so ist es natürlich, gewisse durch Integrale gebildete Mittelwerte zu betrachten. Dies hat z. B. Herr Hardy[14]) getan: Wenn $f(x)$ keinen Grenzwert hat, so kann doch $\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy$ einen solchen haben;

[14]) G. H. Hardy, *Researches in the theory of divergent series and divergent integrals.* The quarterly journal of pure and applied mathematics **35** (1904), S. 22–66 (S. 53–55).

wenn nicht, dann vielleicht das Mittel dieser Funktion, usw. Diesen von Herrn Hardy betrachteten Funktionen entsprechen bei Reihen die Hölderschen Mittel[15]). Die den Cesàroschen nachgebildeten Mittel ganzzahliger Ordnung würden die Gestalt haben:

$$\frac{k!}{x^k}\int_0^x dy_{k-1}\int_0^{y_{k-1}} dy_{k-2}\ldots dy_1\int_0^{y_1} f(y)\,dy\,.$$

Beide Arten sind übrigens schon von P. du Bois-Reymond[16]) betrachtet worden. Mittel nichtganzzahliger Ordnung hat man bisher nur für den Fall eingeführt, daß die Funktion $f(x)$ speziell durch ein Integral dargestellt wird, worauf sich eine Summabilitätstheorie für uneigentliche Integrale gründet[17]). Für beliebige integrable Funktionen habe ich nun in meiner Inauguraldissertation folgende, den Rieszschen arithmetischen Mitteln[18]), die bekanntlich den Cesàroschen äquivalent sind, nachgebildeten Mittel[19]) beliebiger positiver Ordnung definiert:

Es sei k eine beliebige reelle Zahl > 0. Ich setze

$$\sigma^{(k)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x f(y)\,(x-y)^{k-1}\,dy \quad \text{für} \quad x \geqq 0\,.$$

Dann heiße die folgendermaßen definierte Funktion:

$$\mu^{(k)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)\,\sigma^{(k)}(x)}{x^k} = k\,x^{-k}\int_0^x f(y)\,(x-y)^{k-1}\,dy \quad \text{für} \quad x > 0\,,$$
$$\mu^{(k)}(0) = f(0)$$

das *Mittel k-ter Ordnung* oder das k-te Mittel von $f(x)$. Hat $\mu^{(k)}(x)$ für $x \to \infty$ einen Grenzwert, so nenne ich $f(x)$ *mediabel k-ter Ordnung* und jenen Grenzwert seinen *Mittelwert k-ter Ordnung*. Hat $f(x)$ für $x \to \infty$ einen Grenzwert, so heiße es mediabel 0-ter Ordnung. Es werde dementsprechend $\sigma^{(0)}(x) = f(x)$ gesetzt. — In diesem Mittelwertbegriff haben wir eine *Erweiterung des Grenzwertbegriffes* vor uns.

---

[15]) O. Hölder, *Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze.* Mathematische Annalen **20** (1882). S 535—549.

[16]) P. du Bois-Reymond, *Ueber den Convergenzgrad der variablen Reihen und den Stetigkeitsgrad der Functionen zweier Argumente.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **100** (1887), S. 331—358 (S. 356).

[17]) Vgl. G. H. Hardy and M. Riesz, *The general theory of Dirichlet's series* (Cambridge tracts No. 18), Cambridge 1915, S. 23, 24.

[18]) M. Riesz, *Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques.* Comptes rendus **152** (12 juin 1911), S. 1651—1654.

[19]) G. Doetsch, Dissertation (vgl. [10])), S. 13, 14.

Ist für $x \geqq x_0 \geqq 0$ bei $K > 0$

$$\mu^{(k)}(x) < K, \quad \text{bzw.} \quad \mu^{(k)}(x) > -K \quad \text{oder} \quad < K,$$

so nenne ich $f(x)$ *beschränkt*, bzw. *einseitig beschränkt k-ter Ordnung*.

Über den Mittelwertbegriff habe ich folgende Konsistenzsätze bewiesen[20]): *Ist $f(x)$ von k-ter Ordnung mediabel $(k \geqq 0)$, so ist es von jeder höheren Ordnung $k' > k$ mediabel zu demselben Mittelwert. Strebt $f(x)$ gegen $+\infty$, so ist es von keiner Ordnung mediabel.*

Dem Cesàro-Chapmanschen Satz[21]) über die Summabilität der durch Cauchysche Multiplikation aus zwei summablen Reihen entstandenen Produktreihe entspricht hier der Satz[22]):

Haben $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für $x \geqq 0$ stetige Ableitungen, hat $f_1(x)$ den k_1-ten Mittelwert l_1, $f_2(x)$ den k_2-ten Mittelwert l_2 $(k_1 \geqq 0, k_2 \geqq 0)$ und ist $f_1(0) = f_2(0) = 0$, so hat die Funktion

$$f_0(x) = \int_0^x f_1'(y) f_2(x-y)\, dy = \int_0^x f_2'(y) f_1(x-y)\, dy$$

den $k_1 + k_2 + 1$-ten Mittelwert $l_1 l_2$.

Aus den Sätzen des § 1 leitet man nun sofort die folgenden Theoreme[23]) ab, die genau den Sätzen von Teil I, § 2 entsprechen.

Satz 1. *Ist eine Funktion $f(x)$ mediabel k-ter Ordnung $(k \geqq 2)$ und einseitig beschränkt $k-2$-ter Ordnung, ferner im Falle $k = 2$ stetig, so ist sie schon mediabel $k-1$-ter Ordnung.*

Beweis. Ich setze

$$\varphi(x) = \Gamma(k+1)\, \sigma^{(k)}(x),$$

wo $\sigma^{(k)}(x)$ die in bezug auf $f(x)$ gebildete Funktion von S. 176 ist. Nun beweist man leicht[24]), daß allgemein für $\varkappa \geqq 0$, $d > 0$

$$\sigma^{(\varkappa+d)}(x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^x \sigma^{(\varkappa)}(y)(x-y)^{d-1}\, dy,$$

also speziell

$$\sigma^{(k)}(x) = \int_0^x \sigma^{(k-1)}(y)\, dy$$

---

[20]) Doetsch, l. c. S. 15—18.

[21]) Chapman, l. c. S. 378.

[22]) Doetsch, l. c. S. 33. Der Spezialfall $k_1 = k_2 = 0$ dieses Satzes ist von Herrn Hardy (*The multiplication of conditionally convergent series.* Proceedings of the London mathematical society, series 2, **6** (1908), S. 410—423 [S. 421, 422]) ausgesprochen worden.

[23]) Doetsch, l. c. S. 39—41.

[24]) Vgl. Doetsch, l. c. S. 16, 17.

ist. Wegen der Stetigkeit von $\sigma^{(k-1)}(y)$ ist mithin

$$\frac{d}{dx}\sigma^{(k)}(x) = \sigma^{(k-1)}(x),$$

und ebenso

$$\frac{d}{dx}\sigma^{(k-1)}(x) = \sigma^{(k-2)}(x).$$

(Im Falle $k = 2$ ist nach Konvention $\sigma^{(k-2)}(x) = f(x)$ und nach Voraussetzung $f(x)$ stetig, also die letzte Beziehung auch richtig.) Folglich haben wir:

$$\varphi'(x) = \Gamma(k+1)\,\sigma^{(k-1)}(x),$$
$$\varphi''(x) = \Gamma(k+1)\,\sigma^{(k-2)}(x).$$

Da $\frac{\varphi(x)}{x^k} = \mu^{(k)}(x)$ für $x \to \infty$ einen Grenzwert l hat und von einer Stelle an $\frac{\varphi''(x)}{x^{k-2}} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-1)}\,\mu^{(k-2)}(x)$ einseitig beschränkt ist, so ist nach Satz I

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)}\,\mu^{(k-1)}(x) = k\,\mu^{(k-1)}(x) \to l\,k.$$

Satz 2. *Ist eine Funktion einseitig beschränkt d-ter Ordnung ($d \geqq 0$), im Falle $d = 0$ stetig, und überhaupt von irgend einer Ordnung k mediabel, so ist sie sicher mediabel $d+1$-ter Ordnung.*

Beweis. Ich wähle r ganzzahlig $\geqq 2$ so groß, daß $r + d \geqq k$ ist. Dann ist die Funktion auch mediabel $r+d$-ter Ordnung, und unsere Behauptung folgt aus Satz II, wenn man

$$\psi(x) = \Gamma(r+d+1)\,\sigma^{(r+d)}(x)$$

setzt (vgl. den Beweis von Satz 1).

Aus Satz 2 folgt unmittelbar:

Ist eine Funktion einseitig beschränkt d-ter Ordnung ($d \geqq 0$), im Falle $d = 0$ stetig, und nicht mediabel $d+1$-ter Ordnung, so ist sie von keiner Ordnung mediabel.

Satz 3. *Haben zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für $x \geqq 0$ stetige Ableitungen, sind sie mediabel k_1+1-ter bzw. k_2+1-ter Ordnung ($k_1 \geqq 0$, $k_2 \geqq 0$) zu den Mittelwerten l_1, bzw. l_2, dagegen beschränkt k_1-ter, bzw. k_2-ter Ordnung und ist $f_1(0) = f_2(0) = 0$, so ist*

$$f_0(x) = \int_0^x f_1'(y)\,f_2(x-y)\,dy$$

schon von $k_1 + k_2 + 2$-ter Ordnung mediabel zum Mittelwert $l_1\,l_2$.

Beweis. Unterscheidet man die mit Bezug auf f_0, f_1, f_2 gebildeten σ-Funktionen von S. 176 durch die unteren Indizes 0, 1, 2, so ist, wie man unschwer beweist[25]):

$$\sigma_0^{(k_1+k_2+1)}(x) = \int_0^x \sigma_1^{(k_1)}(y)\,\sigma_2^{(k_2)}(x-y)\,dy\,.$$

Nach Voraussetzung ist für $x \geqq x_0 > 0$, also, wie aus der Definition der σ hervorgeht, auch für $x > 0$:

$$\left|\frac{\sigma_1^{(k_1)}(x)}{x^{k_1}}\right| < K_1, \qquad \left|\frac{\sigma_2^{(k_2)}(x)}{x^{k_2}}\right| < K_2,$$

folglich

$$|\sigma_0^{(k_1+k_2+1)}(x)| \leqq \int_0^x K_1\, x^{k_1} K_2\, x^{k_2}\, dy = K_1 K_2\, x^{k_1+k_2+1},$$

also

$$\left|\frac{\sigma_0^{(k_1+k_2+1)}(x)}{x^{k_1+k_2+1}}\right| \leqq K_1 K_2\,.$$

Die Funktion $f_0(x)$ ist mithin beschränkt $k_1 + k_2 + 1$-ter Ordnung, außerdem nach dem allgemeinen S. 177 zitierten Satz mediabel $k_1 + k_2 + 3$-ter Ordnung, also nach unserem Satz 1 schon mediabel $k_1 + k_2 + 2$-ter Ordnung.

Hannover, den 9. Mai 1920.

---

25) Doetsch, l. c. S. 28.

(Eingegangen am 6. Juli 1920.)