Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.*)

Von

P. Funk in Salzburg.

Einleitung.

Mit den beiden Fragen: Wie findet man auf einer gegebenen Fläche die geschlossenen geodätischen Linien, und wie findet man Flächen, auf denen alle geodätischen Linien geschlossen sind, haben sich bereits mehrere Arbeiten beschäftigt. Für uns kommen hauptsächlich die folgenden in Betracht. Darboux**) hat zuerst in den Noten zum Cours de mécanique vom Despeyrous und später in seinen „Leçons sur la théorie générale des surfaces" die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß auf einer Rotationsfläche alle geodätischen Linien geschlossen sind. Angeregt durch Herrn Prof. Hilbert hat Zoll***) in seiner Dissertation unter Benutzung der Entwicklungen von Darboux eine geschlossene singularitätenfreie Rotationsfläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien angegeben. Stäckel†) hat den Verlauf der geodätischen Linien auf Liouvilleschen Flächen untersucht. Auch hierbei hat sich die Möglichkeit herausgestellt, daß alle geodätischen Linien geschlossen sein können, und Stäckel hat eine ausgedehnte Flächenklasse angegeben, bei der dieser Fall wirklich eintrifft. Dagegen ist es ihm nicht gelungen, die Frage, wann alle geodätischen Linien geschlossen sind, in voller Allgemeinheit zu beantworten. Poincaré††) hat auf zweifache Art bewiesen, daß auf jeder geschlossenen konvexen Oberfläche mindestens eine geschlossene geodätische Linie existiert. Beim ersten Beweis zeigt er zunächst die Richtigkeit des

*) Die ersten drei Kapitel dieser Arbeit stimmen, abgesehen von unwesentlichen Änderungen im zweiten Kapitel, mit denen meiner unter dem gleichen Titel erschienenen Dissertation (Göttingen 1911) überein.

**) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces 3, S. 4.

***) Zoll, Diss. Göttingen 1901. Math. Ann. 57, S. 108.

†) Stäckel, J. f. Math. 130, S. 89.

††) Poincaré, Trans. Am. Math. Soc. 1905, S. 237.

Satzes für Flächen, die nur wenig von der Kugel verschieden sind. Er benutzt dabei seine eigenen Untersuchungen über die Existenz periodischer Lösungen von Differentialgleichungen, die er im 3. Kapitel des 1. Bandes seiner „Méthodes nouvelles de la mécanique céleste“ angestellt hat, und schließt dann durch Kontinuitätsbetrachtungen auf die allgemeine Gültigkeit des Satzes.

In der vorliegenden durch Prof. Hilbert angeregten Arbeit werden nun im 1. Kapitel die Ergebnisse von Darboux und Zoll auf eine neue Art hergeleitet und vervollständigt. Gegenstand des 2. Kapitels ist eine gewisse Funktionalgleichung für Funktionen des Ortes auf der Kugel, die dann im 3. und 4. Kapitel zur Anwendung kommt. Integriert man eine Funktion des Ortes auf der Kugel längs eines größten Kreises, so ist im allgemeinen der Wert des Integrals eine Funktion der Parameter, die den Kreis charakterisieren. Ich bezeichne sie als Kreisintegralfunktion und löse auf zweifache Art die Aufgabe: Wie bestimmt sich eine Funktion des Ortes auf der Kugel, wenn ihre Kreisintegralfunktion bekannt ist? Die erste Lösung benützt Kugelfunktionen, die zweite besteht in der Zurückführung der vorgelegten Aufgabe auf die Auflösung der Abelschen Integralgleichung. Im 3. Kapitel wird der Stäckelsche Ansatz zur Behandlung der Liouvilleschen Flächen durch einen einfacheren ersetzt und die bei ihm offen gebliebene Frage*) beantwortet. Das 4. Kapitel enthält einen Ansatz zur allgemeinen Lösung der Aufgabe: Wie muß man die Kugel variieren, damit aus ihr wieder eine Fläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien entsteht? Dieser letztere Gedanke rührt von Herrn Prof. Hilbert her und hat mir die Anregung zu den im 2. Kapitel entwickelten und im 3. und 4. Kapitel angewandten Betrachtungen über die Kreisintegralfunktion gegeben.

1. Kapitel.

Rotationsflächen.

In diesem Kapitel wollen wir die Frage behandeln, unter welcher Bedingung auf einer Rotationsfläche alle geodätischen Linien geschlossen sind. Wir wollen uns dabei auf den Fall beschränken, daß sich die geodätischen Linien schon nach einem Umlauf schließen. Die Gleichung der geodätischen Linie auf einer Rotationsfläche lautet:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^u \frac{a}{r} \frac{du}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

*) l. c. S. 112.

Dabei bedeutet φ den Winkel der Meridianebene mit der Ebene eines festen Nullmeridianes, r den Radius eines Parallelkreises, u die Länge auf dem Meridian und zwar vom größten Parallelkreis aus nach der einen Seite hin positiv, nach der anderen Seite hin negativ gerechnet, a die Clairautsche Konstante. Wir nehmen nun an, das Maximum von r sei gleich 1 und setzen

$$r = \cos\eta, \qquad a = \cos i.$$

u wird dann irgend eine Funktion von η werden.

$$u = \eta + \Phi(\eta),$$
$$du = d\eta + \Phi'(\eta)\,d\eta.$$

Für die Kugel wird Φ und also auch Φ' gleich Null. Wir verfolgen nun eine geodätische Linie von ihrem Schnittpunkt mit dem größten Parallelkreis aus nach beiden Seiten hin, bis sie zum ersten Mal einen Parallelkreis berührt. Durch die beiden Berührungspunkte denken wir uns die Meridianebenen gelegt, den Winkel, den sie miteinander einschließen, bezeichnen wir mit Ω. Damit sich nun die geodätischen Linien nach einem Umlauf schließen, muß für alle Werte i

$$\Omega = \int\limits_{-i}^{+i} \frac{\cos i}{\cos\eta}\,\frac{(1+\Phi'(\eta))\,d\eta}{\sqrt{\cos^2\eta - \cos^2 i}} = \pi$$

sein. Wir wissen nun, für $\Phi = 0$, für die Kugel, ist dies der Fall. Bezeichnet η die geographische Breite, ξ die geographische Länge, so lautet die Gleichung der geodätischen Linie auf der Kugel (wie man aus der sphärischen Trigonometrie entnehmen kann):

$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg} i \sin\xi.$$

Benützen wir nun gerade diese Gleichung, um im obigen Integral ξ statt η als Integrationsveränderliche einzuführen, so wird, wie man ohne jede Rechnung sofort schließen kann,

$$\Omega = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\xi + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \chi(\operatorname{tg} i \sin\xi)\,d\xi,$$

wobei statt

$$\Phi'(\eta) = \chi(\operatorname{tg}\eta)$$

gesetzt ist. Soll Ω gleich π sein, so muß das zweite Integral verschwinden. Dies ist dann der Fall, wenn χ eine ungerade Funktion seines Argumentes ist, und es ist dies auch nur dann der Fall. Das zweite Integral können wir nämlich auch in der Form schreiben:

$$\int\limits_0^{\pi} (\chi(\operatorname{tg} i \sin\xi) + \chi(-\operatorname{tg} i \sin\xi))\,d\xi.$$

Nehmen wir an, der Integrand sei stetig, wechsle nicht unendlich oft sein Zeichen und verschwinde nicht identisch, so könnte man $\operatorname{tg} i$ so bestimmen, daß auch das Integral von Null verschieden ausfällt*).

Für das Folgende ist es bequemer $\psi(\sin\eta)$ statt $\chi(\operatorname{tg}\eta)$ zu schreiben. Wenn χ eine ungerade Funktion von $\operatorname{tg}\eta$ ist, so muß natürlich auch ψ eine ungerade Funktion von $\sin\eta$ sein. Wir denken uns nun, die Rotationsachse falle in die Z-Achse und wählen zur XY-Ebene die Ebene des größten Parallelkreises, für die Meridiankurve in der XZ-Ebene erhalten wir dann wegen

$$\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2=\left(\frac{du}{d\eta}\right)^2=(1+\psi(\sin\eta))^2$$

die Parameterdarstellung

$$x=\cos\eta,\qquad z=\int_0^\eta\sqrt{(1+\psi(\sin\eta))^2-\sin^2\eta}\,d\eta.$$

Soll hierdurch eine reguläre geschlossene Kurve erklärt sein, so muß ψ im Intervall -1 bis $+1$ regulär erklärt sein, und ferner muß

$$|1+\psi(\sin\eta)|\geqq|\sin\eta|,$$

und weil ψ in unserem Fall eine ungerade Funktion sein soll, so muß auch

$$|1-|\psi(\sin\eta)||\geqq|\sin\eta|,$$

also

$$|\psi(\sin(\eta))|\leqq 1-|\sin\eta|.$$

Hieraus folgt auch

$$\psi(-1)=\psi(+1)=0.$$

Für das Linienelement erhalten wir

$$ds^2=(1+\psi(\sin\eta))^2d\eta^2+\cos^2\eta\,dv^2.$$

Die gefundene notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich auf einer Rotationsfläche alle geodätischen Linien nach einem Umlauf schließen, läßt sich folgendermaßen geometrisch deuten. Wir bezeichnen zwei Punkte der Rotationsfläche als einander entsprechend, wenn die Verbindungsgerade parallel zur Rotationsachse ist. Denken wir uns in die Rotationsfläche so eine Kugel hineingelegt, daß ihr Äquator mit dem größten Parallelkreis der Fläche zusammenfällt. Es möge ferner auf jeder Seite des Äquators ein Punkt der Fläche und ein Punkt der Kugel als einander gegenseitig entsprechend gelten, wenn ihre Verbindungsgerade ebenfalls parallel zur Rotationsachse ist. Dann gilt für die gesuchten Flächen: Die Summe der Längen zweier auf der Fläche einander entsprechenden Meridianstücke ist gleich der Summe der Längen der beiden einander gleichen Meridianstücke, die ihnen auf der Kugel entsprechen.

*) Eine ähnliche Frage wird ausführlicher im 2. Kapitel besprochen.

Als Beispiel wählen wir erstens:

$$\psi(\sin\eta) = \sin\eta.$$

Dieser Wahl von ψ entspricht nach dem obigen keine singularitätenfreie Rotationsfläche, auf der alle geodätischen Linien geschlossen sind.

Wohl aber sind alle diejenigen geodätischen Linien geschlossen, die vollkommen in dem durch die Ungleichungen

$$-\frac{1}{2} \leqq \sin\eta \leqq \frac{1}{2},$$

also

$$-\frac{\pi}{6} \leqq \eta \leqq \frac{\pi}{6}$$

gekennzeichneten Gebiet verlaufen.

Das sind also diejenigen für die

$$-\frac{\pi}{6} \leqq i \leqq \frac{\pi}{6}$$

ist. Setzt man für

$$\sin\eta = 1 - \varrho,$$

so erhält man für das Linienelement

$$ds^2 = \left(\frac{2}{\varrho} - 1\right)(d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2)^{*)}.$$

In der Tat die Extremalen, die zur Forderung

$$\delta \int \sqrt{\frac{2}{\varrho} - 1}\,\sqrt{\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \varrho^2}\, d\varphi = 0$$

gehören, sind geschlossene Kurven, sie sind nämlich Ellipsen, wenn man ϱ und φ als gewöhnliche ebene Polarkoordinaten deutet. Denn wendet man auf den Fall, daß ein festes Zentrum auf einen beweglichen Punkt eine nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz wirkende Kraft ausübt, das Jacobische Prinzip der kleinsten Wirkung an, so gelangt man zum oben angeschriebenen Variationsproblem.

Setzt man

$$\sin\eta = 1 - \varrho^2, \qquad \varphi = 2\bar{\varphi},$$

so wird

$$ds^2 = 4(2-\varrho^2)(d\varrho^2 + \varrho^2 d\bar{\varphi}^2).$$

Dies entspricht dann dem Fall, wo die Kraft proportional dem Abstand vom anziehenden Zentrum ist. Bekanntlich sind auch dann die Bahnkurven ebenfalls Ellipsen.

Wählt man für

$$\psi = \frac{1}{2}\sin\eta\,\cos^2\eta,$$

---

*) Siehe Darboux II, S. 452. Die Gestalt der Rotationsflächen, die zu diesem Linienelement gehören, wurden von A. Pfister (Kieler Diss. 1904) genauer untersucht.

so erhalten wir nach dem obigen eine singularitätenfreie Fläche und zwar entspricht dieser Wahl von ψ das Beispiel, das von Zoll angegeben wurde.

Schließlich erwähnen wir noch zwei Sätze, die sich unmittelbar beweisen lassen, indem man unsere Parameterdarstellung für die Meridiankurve der gesuchten Flächen verwendet.

1) An jener Stelle, wo die Meridiankurve den größten Parallelkreis schneidet, ist ihr Krümmungsradius ebenso groß wie der des größten Parallelkreises. (Dieser Satz wurde auch schon von Zoll auf andere Weise bewiesen.)

2) Die Oberfläche einer singularitätenfreien Rotationsfläche, auf der sich alle geodätischen Linien nach einem Umlauf schließen, ist stets viermal so groß wie die Fläche des größten Parallelkreises.

2. Kapitel.

Über eine gewisse Funktionalgleichung für Funktionen des Ortes auf der Kugel.

Mit $\Phi(uv)$ wollen wir im folgenden immer eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Kugel bezeichnen. u sei der Abstand vom Nordpol, v die geographische Länge. Wir beschränken uns zunächst auf solche Funktionen, die in eine gleichmäßig konvergente Reihe von Laplaceschen Kugelfunktionen entwickelbar sind.

Es sei also

$$\Phi(u, v) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 \cdots.$$

Die Funktion

$$\frac{1}{2}\left(\Phi(u, v) + \Phi(\pi - u, v + \pi)\right) = Y_0 + Y_2 + Y_4 \cdots$$

wollen wir als den geraden Bestandteil und die Funktion

$$\frac{1}{2}\left(\Phi(u, v) - \Phi(\pi - u, v + \pi)\right) = Y_1 + Y_3 + Y_5 \cdots$$

wollen wir als den ungeraden Bestandteil von Φ bezeichnen, ferner soll eine Funktion eine gerade Funktion des Ortes auf der Kugel heißen, wenn ihr ungerader Bestandteil identisch verschwindet, d. h. wenn sie an diametral entgegengesetzten Stellen der Kugel den gleichen Wert annimmt, sie soll eine ungerade Funktion des Ortes auf der Kugel heißen, wenn ihr gerader Bestandteil identisch verschwindet, also wenn sie an diametral entgegengesetzten Stellen der Kugel Werte vom gleichen absoluten Betrag, aber entgegengesetzten Vorzeichen annimmt.

Wir denken uns nun auf der Kugel einen beliebigen größten Kreis gezeichnet, der mit einem Richtungssinn versehen sein möge. Es sei ϑ

die geographische Länge eines seiner Schnittpunkte S mit dem Äquator, i der Winkel, den der mit Richtungssinn versehene Kreis mit dem im Sinn der wachsenden v durchlaufenen Äquator einschließt. P sei ein beliebiger Punkt auf dem Kreis. Die Länge des Bogens SP sei λ und zwar möge λ wachsen, wenn sich P in dem auf dem Kreis vorgegebenen Richtungssinn bewegt. Die beiden Pole, die zu diesem größten Kreis gehören, haben die Koordinaten

$$u = i \qquad v = \vartheta - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{bez.} \qquad\qquad \text{bez.}$$

$$u = \pi - i \qquad v = \vartheta + \frac{\pi}{2}.$$

Nun betrachten wir Φ längs eines größten Kreises als Funktion von λ, d. h. wir ersetzen in Φ u und v durch

$$u = \arccos(\sin i \sin \lambda),$$
$$v = \vartheta + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \lambda \cos i).$$

Jetzt berechnen wir $\int\limits_0^{2\pi} \Phi\, d\lambda$ und ordnen den Wert dieses Integrals jedem der beiden Pole zu, die zu diesem Kreis gehören. Indem wir uns dies für alle größten Kreise getan denken, erhalten wir eine gerade Funktion des Ortes auf der Kugel, die wir als „Kreisintegral-Funktion von Φ" bezeichnen wollen. Wir bezeichnen sie mit $\chi(i, \vartheta)$ und schreiben also:

$$\int\limits_0^{2\pi} \Phi\, d\lambda = \chi(i, \vartheta) = \chi(\pi - i, \vartheta + \pi).$$

Über die Kreisintegral-Funktion gelten folgende Sätze:

I. Die Kreisintegral-Funktion einer ungeraden Funktion ist Null.

II. Die Kreisintegral-Funktion einer Konstanten C ist $2\pi C$.

III. Die Kreisintegral-Funktion einer Laplaceschen Kugelfunktion gerader Ordnung Y_{2h} ist $2\pi P_{2h}(0)\, Y_{2h}$, wobei P_{2h} das Legendresche Polynom bedeutet*).

$$P_{2h}(0) = (-1)^h \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2h-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2h}.$$

Zum Beweise erinnern wir an die Relationen

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} Y_{2h}\, dv = A_0 P_{2h}(\cos u), \quad P_{2h}(-1) = P_{2h}(+1) = 1$$

*) Vgl. die Minkowskische Arbeit über Körper konstanter Breite. Minkowski, Ges. Werke II, S. 277.

A_0 ist der Wert von Y_{2h} an den Polen und $2\pi P_{2h}(0) A_0$ ist der Wert der zu Y_{2h} gehörigen Kreisintegral-Funktion an den Polen. Da aber die Pole keine ausgezeichneten Punkte sind, so ist mithin der Beweis für die obige Behauptung schon erbracht.

IV. Die Kreisintegral-Funktion einer endlichen oder gleichmäßig konvergenten unendlichen Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Kreisintegral-Funktionen der einzelnen Summanden.

V. Die Kreisintegral-Funktion von $\int_0^{2\pi} \Phi(u, v)\, dv$ ist $\int_0^{2\pi} \chi(i, \vartheta)\, d\vartheta$.

Dieser Satz ergibt sich, wenn man bei der Berechnung der Kreisintegral-Funktion von $\int_0^{2\pi} \Phi(u, v)\, dv$ statt $v : \vartheta$ als Integrationsvariable einführt und dann die Reihenfolge der Integrationen nach ϑ und λ vertauscht.

VI. Der Mittelwert der Kreisintegral-Funktion ist gleich dem Mittelwert der Funktion selbst multipliziert mit 2π; d. h.

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \chi(i, \vartheta) \sin i\, di = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \Phi(u, v) \sin u\, du.$$

Es ist nämlich

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \chi \sin i\, di = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \sin i \left(\int_0^{2\pi} \Phi\, d\vartheta \right) di.$$

Nun läßt sich $\int_0^{2\pi} \Phi\, d\vartheta$ auch so bilden, daß man zuerst $\int_0^{2\pi} \Phi(u, v)\, dv$ bildet und hernach $\cos u$ durch das Produkt $\sin i \cdot \sin \lambda$ ersetzt. Es ist somit $\int_0^{2\pi} \Phi\, d\vartheta$ in i und λ symmetrisch und demnach können wir i und λ vertauschen. $\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} di \int_0^{\pi} \sin \lambda \left(\int_0^{2\pi} \Phi\, d\vartheta \right) d\lambda$ ist aber der über die ganze Kugel genommene Mittelwert von $\int_0^{2\pi} \Phi\, dv$ und demnach das 2π-fache des Mittelwertes von Φ.

Wenden wir uns jetzt der Aufgabe zu, eine Funktion zu bestimmen, wenn ihre Kreisintegral-Funktion bekannt ist. Nach Satz III und IV können wir so vorgehen. Wir entwickeln χ nach Kugelfunktionen. Es seien $A_{2h,\nu}$ die Koeffizienten der Entwicklung. Wir setzen nun eine Reihe an, die nach Laplaceschen Kugelfunktionen fortschreitet und deren Koeffizienten $\frac{A_{2h,\nu}}{2\pi P_{2h}(0)}$ lauten. Wenn die so gebildete Reihe gleichmäßig konvergiert,*) so stellt sie den geraden Bestandteil einer Funktion dar, deren Kreisintegral-Funktion χ ist. Bei Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe für Φ folgt unmittelbar, daß der gerade Bestandteil der Funktion durch die Kreisintegral-Funktion eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen hierfür jetzt noch einen zweiten Beweis geben, der von Kugelfunktionen keinen Gebrauch macht. Wir beschränken uns dabei auf stetige Funktionen des Ortes auf der Kugel, bei denen für ein bestimmt gewähltes Koordinatensystem die Funktion $\int_0^{2\pi} \Phi(u, v)\,dv$ nicht unendlich oft ihr Zeichen wechselt und in der Umgebung der Pole von Null verschieden ist. Da die Differenz zweier Funktionen mit gleicher Kreisintegral-Funktion Null zur Kreisintegral-Funktion hat, so kommt es nur darauf an, folgenden Satz zu zeigen.

VII. Ist die Kreisintegral-Funktion identisch Null, so ist auch der gerade Bestandteil der Funktion, zu der sie gehört, Null, d. h. die Funktion ist eine ungerade.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine von Null verschiedene gerade Funktion des Ortes auf der Kugel, deren Kreisintegral-Funktion Null ist. Nun wählen wir das Koordinatensystem entsprechend den obigen Annahmen, bilden das Integral $\int_0^{2\pi} \Phi(u, v)\,dv$ und bezeichnen die so erhaltene Funktion mit $\Psi(\cos u)$. Sie ist nach unseren Voraussetzungen stetig, wechselt nicht unendlich oft ihr Zeichen und ist mindestens in der Umgebung der Pole von Null verschieden. Nach Satz V müßte aber die Kreisintegral-Funktion von Ψ Null sein, d. h. es müßte für alle i

$$\int_0^{2\pi} \Psi(\sin i \sin \lambda)\,d\lambda = 0$$

sein und demnach auch für $i = 0$, also müßte auch gelten:

$$\Psi(0) = 0.$$

Andererseits können wir stets zwei positive Zahlen a und b, $a < b$, wählen, sodaß für alle Werte von

$$-b \leqq \cos u \leqq b$$

*) Eine hinreichende Bedingung hierfür und somit für die Stetigkeit der Funktion Φ habe ich in meiner Dissertation angegeben. Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Entwicklung von Φ und χ ließe sich ähnlich wie bei Satz VI auch direkt herleiten, wodurch man dann auf die Gleichmäßigkeit der Konvergenz verzichten könnte.

Ψ sein Zeichen nicht ändert und daß für alle Werte von $\cos u$, für die

$$a \leqq |\cos u| \leqq b$$

ist, $|\Psi|$ größer als eine feste positive Zahl ε ist. Wählen wir nun i so, daß

$$\sin i = b,$$

so wird für diesen Wert von i

$$\left|\int_0^{2\pi} \Psi\, d\lambda\right| > 4\varepsilon \left|\int_a^b \frac{d\lambda}{d(\cos u)}\, d(\cos u)\right| = 4\varepsilon \left|\int_a^b \frac{d(\cos u)}{\sqrt{b^2 - \cos^2 u}}\right| > 0,$$

was im Widerspruch steht mit der Feststellung, daß die Kreisintegral-Funktion identisch verschwinden sollte.

Vom obigen können wir folgende geometrische Anwendung machen. Die Funktion des Ortes auf der Kugel deuten wir als das halbe Quadrat des Radiusvektors einer geschlossenen Fläche, die in gewöhnlichen räumlichen Polarkoordinaten dargestellt sein möge. Die Kreisintegral-Funktion bedeutet dann den Inhalt jener Flächenstücke, die die Fläche auf den ∞^2 durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Ebenen ausschneidet. Man kann also noch unendlich viele Flächen angeben, bei denen jene Flächeninhalte gegeben sind, aber nur eine einzige Mittelpunktsfläche. Insbesondere ergibt sich:

Die Kugel ist die einzige Mittelpunktsfläche, wo für alle durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen der Flächeninhalt denselben Wert hat.

Deuten wir Φ als Stützebenenfunktion, so folgt der Minkowskische Satz, daß Körper von konstantem Stützzylinderumfang auch stets Körper von konstanter Breite sind.

Das obige steht auch in Beziehung mit einem Problem der Mechanik, das Abel*) gelöst hat, und es läßt sich die dort angewandte Methode dazu benützen, um noch auf eine zweite Art den geraden Bestandteil einer Funktion des Ortes auf der Kugel bei gegebener Kreisintegral-Funktion zu berechnen.

Zunächst beschränken wir uns auf den Fall, daß die Kreisintegral-Funktion von ϑ unabhängig ist. Dann wird auch die gesuchte gerade Funktion des Ortes auf der Kugel von v unabhängig sein. Wir bezeichnen sie mit $F(\cos^2 u)$. Ferner setzen wir

$$\cos^2 u = y, \qquad \sin^2 i = x,$$

$$\chi(i) = \int_0^{2\pi} F(\sin^2 i \sin^2 \lambda)\, d\lambda = \varphi(x).$$

*) Ausführlicher habe ich diesen Zusammenhang in meiner Dissertation besprochen. Leider sind an dieser Stelle zwei Druckfehler.

S. 14 Zeile 9 ließ $U(0) = 0$,

S. 14 Zeile 15 $a < 0$, $b > 0$ gehört zwei Zeilen tiefer.

Wegen

$$\cos u = \sin i \sin \lambda$$

wird

$$d\lambda = \frac{d(\cos u)}{\sqrt{\sin^2 i - \cos^2 u}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy}{2\sqrt{x-y}}.$$

Berücksichtigen wir ferner, daß in unserm Fall, wo es sich um eine gerade von v unabhängige Funktion handelt

$$\int_0^{2\pi} \Phi\,d\lambda = 4\int_0^{\pi/2} \Phi\,d\lambda,$$

so erhalten wir für die aufzulösende Funktionalgleichung

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{2\frac{F(y)}{\sqrt{y}}\,dy}{\sqrt{x-y}}.$$

Hierin ist F gesucht und φ bekannt. Wir erhalten die Lösung in der Form (s. Goursat, Cours d'Analyse, 2. éd., S. 343)

$$F(y) = \frac{\varphi(0)}{2\pi} + \frac{\sqrt{y}}{2}\int_0^y \frac{\varphi' x}{\sqrt{y-x}}\,dx.$$

Aber auch im allgemeinen Fall läßt sich die Abelsche Methode verwerten. Es sei $\chi(i\vartheta)$ die gegebene Kreisintegral-Funktion. Angenommen es existiert zu ihr eine stetige gerade Funktion des Ortes auf der Kugel, die wir mit $\Phi(u,v)$ bezeichnen wollen. Die Funktion $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(u,v)\,dv$ ist unabhängig von v, besitzt an den Polen denselben Wert wie Φ und ihre Kreisintegral-Funktion ist $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(i\vartheta)\,d\vartheta$. Also können wir den Wert der Funktion Φ an den Polen berechnen, und da wir durch eine Koordinatentransformation jeden beliebigen Punkt nach den Polen hin verlegen können, so ist Φ allgemein bekannt.

3. Kapitel.

Liouvillesche Flächen.

Unter Liouvilleschen Flächen versteht man bekanntlich solche, deren Linienelement sich auf die Form bringen läßt

$$ds^2 = \big(U(u) - V(v)\big)\,(du^2 + dv^2).$$

Bei unseren Untersuchungen werden wir das Linienelement in der Form

$$ds^2 = (1 - x^2 - y^2)\,(X^2(x)\,dx^2 + Y^2(y)\,dy^2)$$

zugrunde legen, was keinen wesentlichen Unterschied bedingt. Wir beschränken uns darauf, folgende Frage zu beantworten. Wie müssen die Funktionen $X(x)$ und $Y(y)$ bestimmt werden, damit die Extremalen, die zur Forderung

$$\delta \int \sqrt{(1 - x^2 - y^2)\,(X^2(x) + Y^2(y)\,y'^2)}\,dx = 0$$

gehören, lauter geschlossene Kurven darstellen, wenn x und y als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten in der Ebene gedeutet werden? Wählt man

$$X(x) = 1, \qquad Y(y) = 1$$

so sind die Extremalen Ellipsen. (Vgl. Kap. 1.)

Die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung lautet in unserem Fall

$$\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{X^2(x)} + x^2 + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2}{Y^2(y)} + y^2 = 1,$$

setzen wir

$$\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{X^2(x)} + x^2 = \sin^2 i, \qquad \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2}{Y^2(y)} + y^2 = \cos^2 i,$$

so wird

$$S = \int_0^x X(x)\sqrt{\sin^2 i - x^2}\,dx + \int_0^y Y(y)\sqrt{\cos^2 i - y^2}\,dy$$

und für die Extremalen erhalten wir

$$\int_0^x \frac{X(x)\,dx}{\sqrt{\sin^2 i - x^2}} - \int_0^y \frac{Y(y)\,dy}{\sqrt{\cos^2 i - y^2}} = \tau_0.$$

i und τ_0 sind die Integrationskonstanten*).

---

*) Beiläufig mag folgendes bemerkt werden. Wenn wir uns für den Fall $X(x) = 1$, $Y(y) = 1$ der im Kapitel 1 angegebenen physikalischen Deutung bedienen, so bedeutet i den Arcustangens des Amplituden-Verhältnisses der x und y Komponente der Schwingung, τ_0 die Phasenverschiebung. (Bei der zugehörigen Rotationsfläche hat die Integrationskonstante i jetzt eine andere Bedeutung als im ersten Kapitel.)

Für die in dieser Gleichung dargestellten Kurven verschaffen wir uns eine Parameterdarstellung, indem wir setzen:

$$\int_0^x \frac{X(x)\,dx}{\sqrt{\sin^2 i - x^2}} = \tau, \qquad \int_0^y \frac{Y(y)\,dy}{\sqrt{\cos^2 i - y^2}} = \tau - \tau_0.$$

Lösen wir die erste Gleichung nach x, die zweite Gleichung nach y auf, so erhalten wir nach einem Satz von Weierstraß*) x und y als periodische Funktionen von τ und zwar hat x die Periode

$$\Omega_x = 2\int_{-\sin i}^{+\sin i} \frac{X(x)\,dx}{\sqrt{\sin^2 i - x^2}}$$

und y hat die Periode

$$\Omega_y = 2\int_{-\cos i}^{+\cos i} \frac{Y(y)\,dy}{\sqrt{\cos^2 i - y^2}}.$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß $X(x)$ bez. $Y(y)$ im Intervall $-\sin i \leqq x \leqq \sin i$ bez. $-\cos i \leqq y \leqq \cos i$ ihr Zeichen nicht wechseln. Setzen wir

$$x = \sin i \sin \lambda, \qquad y = \cos i \cos \lambda,$$

daher

$$\Omega_x = \int_0^{2\pi} X(\sin i \sin \lambda)\,d\lambda,$$

$$\Omega_y = \int_0^{2\pi} Y(\cos i \cos \lambda)\,d\lambda$$

und ferner

$$\frac{\Omega_x}{\Omega_y} = q.$$

Im allgemeinen wird q eine Funktion von i sein.

Sollen die Extremalen geschlossen sein, so muß q einen rationalen Wert annehmen. (Wird q irrational, so schließt man ähnlich wie in der bereits in der Einleitung genannten Arbeit von Stäckel, daß dann die Extremalen den rechteckigen Bereich

$$-\sin i \leqq x \leqq \sin i, \qquad -\cos i \leqq y \leqq \cos i$$

überall dicht überdecken). Die Frage, die wir zu Anfang des Kapitels gestellt haben, verwandelt sich jetzt in die folgende: Wie müssen die Funktionen $X(x)$, $Y(y)$ bestimmt werden, damit die Relation

$$\int_0^{2\pi} X(\sin i \sin \lambda)\,d\lambda = q\int_0^{2\pi} Y(\cos i \sin \lambda)\,d\lambda$$

*) Vgl. Weierstraß, Werke Band 2, S. 1.

für alle Werte i erfüllt ist, wobei q jetzt eine feste rationale Zahl bedeuten soll? Die Antwort lautet: Man wähle die rationale Zahl q und die Funktion Y vollkommen willkürlich und berechne die linke Seite der obigen Gleichung. Man deute die so gebildete Funktion von i als Kreisintegral-Funktion und berechne nach den Vorschriften des vorigen Kapitels den geraden Bestandteil der dazu gehörigen Funktion des Ortes auf der Kugel. Schließlich ersetze man $\cos u$ durch x und füge noch irgend eine ungerade Funktion von x hinzu, auf diese Art findet man das allgemeinste Funktionenpaar, das der obigen Gleichung für alle Werte von i genügt.

Um den Voraussetzungen zu genügen, die nötig sind, damit der Weierstraßsche Satz anwendbar wird, wollen wir $Y(y)$ als eine Funktion denken, die im Intervall $-1 < y < 1$ nur positive Werte annimmt. Ebenso wollen wir die rationale Zahl q positiv annehmen. Jetzt könnte es aber vorkommen, daß $X(x)$ an einzelnen Stellen Null oder negativ wird. In diesem Fall wollen wir nachträglich zu $Y(y)$ eine geeignet gewählte Konstante addieren, sodaß dann auch $X(x)$ beständig positiv ausfällt. Gleichzeitig erreichen wir dadurch, daß das Flächenelement im Innern des Gebietes $x^2 + y^2 < 1$ nicht verschwindet.

Der Gleichung, die zwischen $X(x)$ und $Y(y)$ besteht, können wir folgende einfache geometrische Bedeutung geben. Deuten wir den Wert der Funktion $X(x)$ als das halbe Quadrat des Radiusvektors einer Rotationsfläche R_x, die Variable x als den Cosinus der Neigung des Radiusvektors gegen die Rotationsachse, verfahren wir ebenso mit der Funktion $Y(y)$ und bezeichnen die zugehörige Rotationsfläche mit R_y, dann können wir sagen: Auf je zwei Ebenen durch den Ursprung mit komplementärer Neigung gegen die Rotationsachse schneiden R_x bez. R_y Flächeninhalte aus, die zueinander in einem festen rationalen Verhältnis stehen.

Im Fall $X(x) = 1$, $Y(y) = 1$ arten die Ellipsen zu Geraden aus, wenn $\tau_0 = h\pi$, wobei h irgend eine ganze positive oder negative Zahl oder Null bedeutet. Das Analoge tritt natürlich auch im allgemeinen Fall auf und zwar wenn

$$\tau_0 = \int_0^{\sin i} \frac{X(x)\,dx}{\sqrt{\sin^2 i - x^2}} - \int_0^{\cos i} \frac{Y(y)\,dy}{\sqrt{\cos^2 i - y^2}} + h\Omega_x + k\Omega_y,$$

wobei h und k ganze Zahlen oder Null bedeuten. Für diese singulären Werte von i und τ_0 erhalten wir keine geschlossenen Extremalen.

4. Kapitel.

Ein Ansatz zur Aufstellung sämtlicher Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, die durch kontinuierliche Variation aus der Kugel hervorgehen.

Der von Herrn Prof. Hilbert herrührenden Problemstellung, wie man die Kugel variieren muß, damit aus ihr wieder eine Fläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien entsteht, wollen wir jetzt folgende Form geben: Wie müssen im Variationsproblem

$$\int \Big(1 + \sum_1^\infty \mu^\nu \Phi_\nu\Big) \sqrt{y'^2 + \cos^2 y}\, dx = \text{Min.}$$

der Reihe nach $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ als eindeutige Funktionen des Ortes auf der Kugel bestimmt werden, damit in der vollständigen Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichung, die wir in der Form

$$y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \cdots$$

ansetzen, der Reihe nach $y_1, \cdots, y_n$ für alle Werte der Integrationskonstanten, periodische Funktionen von x mit der Periode 2π werden? Dabei verwenden wir jetzt im Gegensatz zum 2. Kapitel x statt v und y statt $\frac{\pi}{2} - u$ zur Bezeichnung der Koordinaten eines Punktes auf der Kugel. Im übrigen behalten wir die Bezeichnungen des 2. Kapitels bei.

Für $\mu = 0$ ist die allgemeine Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichung gegeben durch:

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} i \sin (x - \vartheta). \tag{1}$$

Insbesondere erhalten wir für $i = 0$ als partikuläre Lösung $y = 0$. Wir bezeichnen den Wert von y_1 für $i = 0$ mit $\bar{y}_1$ und suchen die Differentialgleichung, der $\bar{y}_1$ genügen muß. Wir werden sie erhalten, indem wir in der linken Seite der Euler-Lagrangeschen Gleichung für y: $\mu \bar{y}_1$ einsetzen und hierauf den Koeffizienten der ersten Potenz von μ gleich Null setzen. Es ist nun, wenn wir zur Abkürzung den Integranden unseres obigen Integrales gleich F setzen,

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{d F_{y'}}{dx} - F_y\right)\right]_{\mu=0} = \frac{d}{dx}(F_{y'y'}\bar{y}_1' + F_{y'y}\bar{y}_1 + F_{y'\mu}) - (F_{yy'}\bar{y}_1' + F_{yy}\bar{y}_1 + F_{y\mu}).$$

Dabei sind von den Funktionen $F_{y'y'}, F_{y'y}, F_{yy}, F_{y'\mu}, F_{y\mu}$ die Werte für $y = y' = \mu = 0$ zu nehmen. Da aber für diese Werte

$$F_{y'y'} = 1, \quad F_{yy'} = 0, \quad F_{yy} = -1,$$

$$F_{y\mu} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad F_{y'\mu} = 0,$$

so erhalten wir für die gesuchte Differentialgleichung

$$\bar{y}_1'' + \bar{y}_1 = f_1(x),$$

wobei zur Abkürzung

$$f_1(x) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=0}$$

gesetzt ist. Die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung ist

$$\bar{y}_1 = \int_0^x f_1(\xi) \sin(x-\xi)\, d\xi + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x.$$

Wann ist nun $\bar{y}_1$ eine periodische Funktion mit der Periode 2π? Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür lauten: 1. Es muß $f_1(x)$ diese Periode besitzen. Diese Bedingung ist stets erfüllt sobald nur Φ_1 eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Kugel ist. 2. Es müssen die Integrale $\int_0^{2\pi} f_1(x) \sin x\, dx$ und $\int_0^{2\pi} f_1(x) \cos x\, dx$ verschwinden. Diese beiden Integrale sind aber identisch mit den Differentialquotienten der Kreisintegral-Funktion von Φ_1: $\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial i}\right)_{\substack{i=0\\ \vartheta=0}}$ bez. $\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial i}\right)_{\substack{i=0\\ \vartheta=-\frac{\pi}{2}}}$. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i} \int_0^{2\pi} \Phi_1 \frac{d\lambda}{dx}\, dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial i} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \Phi_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\, \partial i}\right) dx.$$

Hierbei haben wir uns y und λ vermöge der Gleichungen (1) und

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg}(x-\vartheta)}{\cos i}$$

als Funktionen von x ausgedrückt zu denken. Es ergibt sich allgemein für $i = 0$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\, \partial i} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial i} = \sin(x-\vartheta),$$

also

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial i}_{i=0} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=0} \sin(x-\vartheta)\, dx^{*})$$

---

*) Im Anschluß an diese Gleichung wollen wir folgende Bemerkung anfügen. Bezeichnet $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, $\frac{\partial \chi}{\partial n}$ den Differentialquotienten normal zur Richtung $\Phi = \text{const.}$ bez. $\chi = \text{const.}$, ferner M das Maximum von $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|$, so wird $\left|\frac{\partial \chi}{\partial n}\right| \leq \int_0^{2\pi} M |\sin(x-\vartheta)|\, dx \leq 4M$. Hieraus kann man Folgendes schließen: Sei $\Phi_{(1)}$ die durch 2π dividierte Kreisintegral-

und somit

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial i}_{\substack{i=0\\ \vartheta=0}} = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=0} \sin x\,dx, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial i}_{\substack{i=0\\ \vartheta=-\frac{\pi}{2}}} = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=0} \cos x\,dx.$$

Nun wollen wir ja, daß y_1 nicht nur für den Wert $i = 0$ periodisch in x mit der Periode 2π sei, sondern y_1 soll für alle Werte von i und ϑ diese Eigenschaft besitzen, demnach müssen wir fordern, daß die Differentialquotienten von χ_1 in sämtlichen Punkten der Kugel verschwinden d. h. χ_1 muß eine Konstante sein. Nach dem 2. Kapitel erhalten wir somit:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß y_1 für alle Werte der Integrationskonstanten periodisch in x mit der Periode 2π sei, lautet: Die Kreisintegral-Funktion von Φ_1 und somit der gerade Bestandteil der Funktion Φ_1 muß eine Konstante sein.

Wir behaupten nun den folgenden Satz: Angenommen

1. Die Funktionen $y_0, y_1, \cdots, y_n$ seien so bestimmt, daß in der linken Seite der Euler-Lagrangeschen Gleichung unseres Variationsproblemes

$$\frac{dF_{y'}}{dx} - F_y = 0,$$

nachdem für

$$y = y_0 + \mu y_1 + \cdots + \mu^n y_n \tag{2}$$

eingesetzt wurde, das von μ freie Glied und die Koeffizienten von $\mu^1, \cdots, \mu^n$ identisch verschwinden,

2. die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_{n-1}$ seien bereits so gewählt, daß $y_1, \cdots, y_{n-1}$ periodisch in x mit der Periode 2π sind,

dann ergibt die Forderung, es möge auch y_n diese Periode besitzen, eine Gleichung für die Kreisintegral-Funktion von Φ_n als notwendige und hinreichende Bedingung.

Bevor wir den Beweis für die aufgestellte Behauptung erbringen, führen wir zunächst zur Abkürzung einige Bezeichnungen ein. Wir setzen

$$F_0 = \sqrt{\cos^2 y + y'^2}, \quad F_n = \left(1 + \sum_1^n \mu^\nu \Phi_\nu\right) \sqrt{y'^2 + \cos^2 y}.$$

Denken wir uns in irgend eine Funktion $F(yy'\mu)$ für y und y'

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \mu y_1 + \cdots + \mu^m y_m, \\ y' &= y_0' + \mu y_1' + \cdots + \mu^m y_m' \end{aligned} \tag{2a}$$

Funktion von Φ und allgemein $\Phi_{(\nu+1)}$ die durch 2π dividierte Kreisintegral-Funktion von $\Phi_{(\nu)}$, so ist $\mathop{\mathrm{L}}\limits_{\nu=\infty} \Phi_{(\nu)}$ eine Konstante und zwar nach Satz VI im 2. Kapitel gleich dem Mittelwert von Φ.

eingesetzt und entwickeln wir hierauf die Funktion nach Potenzen von μ, so bezeichnen wir den Koeffizienten von μ^p mit $\{F\}_m^p$. Wird für y und y'

$$
\tag{2b}
\begin{aligned}
y &= \mu \bar{y}_1 + \cdots + \mu^m \bar{y}_m, \\
y' &= \mu \bar{y}_1' + \cdots + \mu^m \bar{y}_m'
\end{aligned}
$$

eingesetzt und denken wir uns dann denselben Prozeß durchgeführt, so bezeichnen wir den Koeffizienten von μ^p mit $\{\bar{F}\}_m^p$.

Setzen wir nun in der linken Seite der Euler-Lagrangeschen Gleichung für y: $\sum\limits_0^\infty \mu^\nu y_\nu$ ein und entwickeln wir nach Potenzen von μ, so erhalten wir

$$\sum_0^\infty \mu^\nu \left[\frac{d}{dx}\{F_{\nu y'}\}_\nu^\nu - \{F_{\nu y}\}_\nu^\nu\right] = 0.$$

Bezeichnen wir allgemein den Wert von y_ν für $i = 0$ mit $\bar{y}_\nu$. Soll der Koeffizient von μ^n in der Euler-Lagrangeschen Gleichung verschwinden, so muß $\bar{y}^n$ der Differentialgleichung

$$\tag{3} \frac{d}{dx}\{\bar{F}_{ny'}\}_n^n - \{\bar{F}_{ny}\}_n^n = 0$$

genügen. Untersuchen wir, wie $\bar{y}_n$ und $\bar{y}_n'$ in $\{\bar{F}_{ny'}\}_n^n$ und $\{\bar{F}_{ny}\}_n^n$ vorkommt, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\{\bar{F}_{ny'}\}_n^n &= \bar{y}_n' + \{\bar{F}_{ny'}\}_{n-1}^n, \\
\{\bar{F}_{ny}\}_n^n &= -\bar{y}_n + \{\bar{F}_{ny}\}_{n-1}^n,
\end{aligned}
$$

somit erhalten wir für die obige Differentialgleichung

$$\tag{3a} \bar{y}_n'' + \bar{y}_n = f_n(x),$$

also:

$$\bar{y}_n = \int_0^x f_n(\xi) \sin(x - \xi)\, d\xi + \alpha_n \cos x + \beta_n \sin x,$$

wobei zur Abkürzung:

$$f_n(x) = -\frac{d}{dx}\{\bar{F}_{ny'}\}_{n-1}^n + \{\bar{F}_{ny}\}_{n-1}^n$$

gesetzt ist. $f_n(x)$ setzt sich in rationaler Weise aus den Funktionen

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_{n-1};\; \bar{y}_1', \bar{y}_2', \cdots, \bar{y}_{n-1}';\; \bar{y}_1'', \bar{y}_2'', \cdots, \bar{y}_{n-1}''$$

und den Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ und deren Ableitungen zusammen und ist somit periodisch mit der Periode 2π. Damit nun auch $\bar{y}_n$ diese Periode besitze, muß wieder

$$\int_0^{2\pi} f_{(n)}(x) \sin x\, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} f_n(x) \cos x\, dx = 0$$

sein.

Zunächst formen wir diese beiden Integrale durch Anwendung partieller Integration um. Indem wir dabei die Periodizität der Funktionen $\{\bar{F}_{ny'}\}_{n-1}^{n} \sin x$, bez. $\{\bar{F}_{ny'}\}_{n-1}^{n} \cos x$ berücksichtigen, erhalten wir:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \sin x\, dx = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{d}{dx}\{\bar{F}_{ny'}\}_{n-1}^{n} + \{\bar{F}_{ny}\}_{n-1}^{n}\right] \sin x\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} [\{\bar{F}_{ny'}\}_{n-1}^{n} \cos x + \{\bar{F}_{ny}\}_{n-1}^{n} \sin x]\, dx$$

und ebenso wird:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \cos x\, dx = \int_0^{2\pi} [-\{\bar{F}_{ny'}\}_{n-1}^{n} \sin x + \{\bar{F}_{ny}\}_{n-1}^{n} \cos x]\, dx.$$

Wieder lassen sich diese beiden Integrale als Differentialquotienten eines einzigen auffassen. Setzen wir

$$\{S_n\}_m^r = \int_0^{2\pi} \{F_n\}_m^r\, dx,$$

so behaupten wir

$$(4) \qquad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_n(x) \sin x\, dx &= \left(\frac{\partial}{\partial i}\{S_n\}_{n-1}^{n}\right)_{\substack{i=0\\ \vartheta=0}}, \\ \int_0^{2\pi} f_n(x) \cos x\, dx &= \left(\frac{\partial}{\partial i}\{S_n\}_{n-1}^{n}\right)_{\substack{i=0\\ \vartheta=-\frac{\pi}{2}}}. \end{aligned}$$

Es ist nämlich:

$$\left(\frac{\partial}{\partial i}\{S_n\}_{n-1}^{n}\right)_{i=0} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial \mu^n}\int_0^{2\pi}\left(F_{ny'}\frac{\partial y'}{\partial i} + F_{ny}\frac{\partial y}{\partial i}\right) dx\right)_{\substack{\mu=0\\ i=0}}.$$

Da es sich um die Bildung des Koeffizienten von μ^n handelt, so brauchen wir die Potenzreihen für F_{ny} und $F_{ny'}$ nur bis zum n^{ten} Glied zu entwickeln und erhalten

$$(5\text{a}) \quad \left(\frac{\partial}{\partial i}\{S_n\}_{n-1}^{n}\right)_{i=0} = \frac{1}{n!}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial^n}{\partial \mu^n}\left(\sum_0^n \mu^\nu \{\bar{F}_{\nu y'}\}_\nu^\nu \sum_0^{n-1}\mu^\nu \left(\frac{\partial y'_\nu}{\partial i}\right)_{i=0} + \sum_0^n \mu^\nu \{\bar{F}_{\nu y}\}_\nu^\nu \sum_0^{n-1}\mu^\nu\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial i}\right)_{i=0}\right)\right]_{\mu=0} dx,$$

$$(5\mathrm{b})\quad \left(\frac{\partial}{\partial i}\{S_n\}_{n-1}^{n}\right)_{\substack{i=0\\ \mu=0}} = \frac{1}{n!}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}\left(\sum_0^{n-1}\mu^\nu\{\overline{F}_{\nu y'}\}_\nu^\nu \sum_1^{n-1}\mu^\nu\left(\frac{\partial y_\nu'}{\partial i}\right)_{i=0} + \sum_0^{n-1}\mu^\nu\{\overline{F}_{\nu y}\}_\nu^\nu \sum_1^{n-1}\mu^\nu\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial i}\right)_{i=0}\right)\right]_{\mu=0} dx$$
$$+\int_0^{2\pi}\left[\{\overline{F}_{ny'}\}_n^n\left(\frac{\partial y_0'}{\partial i}\right)_{i=0} + \{\overline{F}_{ny}\}_n^n\left(\frac{\partial y_0}{\partial i}\right)_{i=0}\right]dx.$$

Indem wir die Differentiationen nach μ für das erste Integral in (5b) ausführen, erhalten wir für dasselbe:

$$\sum_1^{n-1}\int_0^{2\pi}\left[\{\overline{F}_{\nu y'}\}_\nu^\nu\left(\frac{\partial y_{n-\nu}'}{\partial i}\right)_{i=0} + \{\overline{F}_{\nu y}\}_\nu^\nu\left(\frac{\partial y_{n-\nu}}{\partial i}\right)_{i=0}\right]dx.$$

Jedes einzelne Glied in dieser Summe ist aber identisch gleich Null. Denn durch Anwendung von partieller Integration können wir ihnen die Form geben

$$\left[\{\overline{F}_{\nu y'}\}_\nu^\nu\left(\frac{\partial y_{n-\nu}}{\partial i}\right)_{i=0}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\left[\{F_{\nu y}\}_\nu^\nu - \frac{d}{dx}\{F_{\nu y'}\}_\nu^\nu\right]\left(\frac{\partial y_{n-\nu}}{\partial i}\right)_{i=0} dx.$$

Wegen der Annahme 1 verschwindet der Klammerausdruck unter dem Integralzeichen und wegen der Annahme 2 verschwindet der Klammerausdruck vor dem Integralzeichen. Indem wir

$$\left(\frac{\partial y_0}{\partial i}\right)_{\substack{i=0\\ \vartheta=0}},\quad \left(\frac{\partial y_0'}{\partial i}\right)_{\substack{i=0\\ \vartheta=0}}\quad \text{bez.}\quad \left(\frac{\partial y_0}{\partial i}\right)_{\substack{i=0\\ \vartheta=-\frac{\pi}{2}}},\quad \left(\frac{\partial y_0'}{\partial i}\right)_{\substack{i=0\\ \vartheta=-\frac{\pi}{2}}}$$

nach Gleichung (1) bilden und im zweiten Integral von (5b) einsetzen, ergibt sich in der Tat die Richtigkeit der Gleichungen (4). Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\overline{y}_n$ eine periodische Funktion von x mit der Periode 2π ist, läßt sich somit ausdrücken: Es müssen die beiden Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial}{\partial i}\{S_n\}_{n-1}^n\right)_{\substack{i=0\\ \vartheta=0}},\quad \left(\frac{\partial}{\partial i}\{S_n\}_{n-1}^n\right)_{\substack{i=0\\ \vartheta=-\frac{\pi}{2}}}$$

verschwinden.

Hieraus schließen wir wie im Fall $n=1$:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß y_n für alle Werte der Integrationskonstanten eine periodische Funktion von x mit der Periode 2π sei, lautet:

$$(6)\qquad \{S_n\}_{n-1}^n = c_n,$$

wobei c_n eine willkürlich wählbare Konstante bedeutet.

Nun ist

$$\{S_n\}_{n-1}^n = \{S_{n-1}\}_{n-1}^n + \int_0^{2\pi} \Phi_n \sqrt{\cos^2 y_0 + y_0'^2}\, dx$$

und

$$\sqrt{\cos^2 y_0 + y_0'^2} = \frac{d\lambda}{dx};$$

somit ist das zweite Glied auf der rechten Seite die Kreisintegral-Funktion von Φ_n. Also ist Gleichung (6) in der Tat eine Gleichung für die Kreisintegral-Funktion von Φ_n. Wenn wir nun fordern, daß y_n für alle Werte von $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_n, \beta_n$ periodisch von der Periode 2π ist, so muß Gleichung (6) für alle Werte von $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$ identisch erfüllt sein. Dies ist nur dann möglich, wenn $\{S_{n-1}\}_{n-1}^n$ von allen diesen Größen unabhängig ist. Das ist aber auch wirklich der Fall. Denn differenzieren wir $\{S_{n-1}\}_{n-1}^n$ etwa nach $\alpha_\varkappa$, wobei $\varkappa$ irgendeine Zahl der Reihe $1, 2, \cdots, n-1$ ist, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha}\{S_{n-1}\}_{n-1}^n &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial \mu^n}\int_0^{2\pi}\left(F_{n-1\,y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_\varkappa} + F_{n-1\,y}\frac{\partial y}{\partial \alpha_\varkappa}\right)dx\right)_{\mu=0} \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial^n}{\partial \mu^n}\left(\sum_0^{n-1}\mu^\nu \{F_{\nu y'}\}_\nu^{\prime} \sum_\varkappa^{n-1}\mu^\nu \frac{\partial y_\nu'}{\partial \alpha_\prime}\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \sum_0^{n-1}\mu^\nu \{F_{\nu y}\}_\nu^\nu \sum_\varkappa^{n-1}\mu^\nu \frac{\partial y_\iota}{\partial \alpha_\varkappa}\right)\right]_{\mu=0} dx.\end{aligned}$$

Genau so wie beim ersten Integral der Gleichung (5b) zeigt sich, daß dieses Integral identisch verschwindet. Es ist also tatsächlich gezeigt, daß sich unter den gemachten Annahmen die Kreisintegral-Funktion von Φ_n und mithin Φ_n selbst so bestimmen läßt, daß y_n für alle Werte der Integrationskonstanten die gewünschte Periodizität besitzt. Wie im Fall $n=1$ ist wieder nur der gerade Bestandteil von Φ_n eindeutig bestimmt und der ungerade Bestandteil kann noch vollkommen willkürlich gewählt werden.

Nun fragen wir noch nach der geometrischen Bedeutung der Konstanten c_n. Setzen wir

$$S = \int_0^{2\pi} F\, dx,$$

wobei wir uns für y irgendeine Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichung eingesetzt denken, so wird

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n S}{\partial \mu^n}\right)_{\mu=0} = \{S_n\}_n^n;$$

nun ist aber

$$\{S_n\}_n^n = \int_0^{2\pi} [(F_{0\,y'})_{\substack{y=y_0\\y'=y_0'}} y_n' + (F_{0\,y})_{\substack{y=y_0\\y'=y_0'}} y_n]\,dx + \{S_n\}_{n-1}^n$$

oder, indem wir auf das erste Integral partielle Integration anwenden und die Differentialgleichung für y_0 berücksichtigen

$$\{S_n\}_n^n = [(F_{0\,y'})_{\substack{y=y_0\\y'=y_0'}} y_n]_0^{2\pi} + \{S_n\}_{n-1}^n,$$

wenn nun alle geodätischen Linien doppelpunktfrei und geschlossen sind, so ist y_n periodisch von der Periode 2π, und mithin verchwindet der Klammerausdruck auf der rechten Seite. S bedeutet die Länge der geodätischen Linien und wir erhalten somit

$$c_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n S}{\partial \mu^n}\right)_{\mu=0}.$$

Wollen wir die Kugel so variieren, daß dabei die Länge der geschlossenen geodätischen Linien erhalten bleibt, so müssen demnach die Konstanten $c_n = 0$ gewählt werden.

Aus dem Obigen folgt auch der Satz: Wenn auf einer Fläche alle geodätischen Linien doppelpunktfrei und geschlossen sind, so besitzen sie alle die gleiche Länge. Dieser Satz findet sich auch schon bei Zoll. Der Vollständigkeit halber wollen wir für ihn noch einen einfachen Beweis angeben. Wir beschränken uns auf eine Schar geodätischer Linien, die durch einen Punkt gehen. Es ist dies erlaubt, denn alle geschlossenen doppelpunktfreien geodätischen Linien müssen sich mindestens zweimal schneiden, wie man aus dem Satz über die Totalkrümmung leicht erkennt. Das Koordinatensystem auf der Fläche denken wir uns nun so gewählt, daß $y = 0$ eine beliebige geodätische Linie ist und x die Bogenlänge auf ihr bedeutet. Nun bezeichnen wir den Winkel, den eine beliebige andere geodätische Linie unserer Schar mit $y = 0$ im Schnittpunkt $x = x_0$ einschließt mit α, ferner die Länge von $y = 0$ mit s. Für die Länge einer beliebigen Kurve unserer Schar erhalten wir somit ein Integral von der Form

$$S = \int_{x_0}^{x_0+s} F(xyy')\,dx.$$

Jetzt bilden wir

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_0+s} \left(F_{y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + F_y \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) dx.$$

Dieses Integral ist aber die erste Variation von S und somit Null, weil $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ am Anfangs- und Endpunkt des Intervalles verschwindet. Da aber $y = 0$ eine beliebige Kurve unserer Schar ist, so gilt allgemein $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0$ und S muß somit eine Konstante sein.

Um den obigen Ansatz zur Aufstellung sämtlicher singularitätenfreier Flächen mit lauter geschlossenen doppelpunktfreien geodätischen Linien zu vervollständigen, wären insbesondere noch zwei Fragen zu beantworten:

1. Es wäre eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der aufgestellten Reihe $\left(1 + \sum_{1}^{\infty} \mu^\nu \Phi_\nu\right)$ aufzustellen.

2. Es wäre die Bedingung anzugeben, der der Flächenmaßstab bei konformer Abbildung der Fläche auf die Kugel, aufgefaßt als Funktion des Ortes auf der Kugel, bei uns der Ausdruck $\left(1 + \sum_{1}^{\infty} \mu^\nu \Phi_\nu\right)$, zu genügen hat, damit man ihm eine geschlossene singularitätenfreie Fläche zuordnen kann.