

Über eine Methode zur Behandlung gewisser ebener metrischer Probleme.

Von G. Majcen in Agram.

Wiederholt hatte ich Gelegenheit, auf eine räumliche Lösungsart von ebenen Problemen hinzuweisen, in welchen Strecken als gegebene Größen auftreten.¹⁾ Diese Strecken können als Bildlängen von Geraden aufgefaßt werden, welche in einer zentralen Projektion dargestellt sind. Die angedeuteten Probleme selbst können dann mit Zuhilfenahme der Verschwindungspunkte jener Geraden durch räumliche, mehr projektive Operationen erledigt werden.

In der vorliegenden Note möchte ich auf Grund der genannten Methode Beweise für zwei allgemeine Sätze von Steiner geben und die Sätze selbst mit einigen Zusätzen versehen. Ich erwähne zugleich, daß die angedeuteten Sätze bereits von H. E. M. O. Zimmermann mittels einer eigens dazu eingerichteten Transformation in der Ebene bewiesen worden sind,²⁾ wenn auch nicht in dem Umfange, wie es die Allgemeinheit der Sätze erfordert.

1. Der erste von den Steinerschen Sätzen ist der folgende³⁾: „Sind in gleicher Ebene irgend zwei Kurven, die eine vom p^{ten} , die andere vom q^{ten} Grade, in fester Lage gegeben, und bewegen sich die Endpunkte einer konstanten Strecke AB einer Geraden s' beziehlich in denselben, so umhüllt die Gerade eine Kurve $4pq^{\text{ter}}$ Klasse, welche die im Unendlichen liegende Gerade g_{∞} zur $2pq$ -fachen Tangente hat.“

Wir fassen die Ebene beider Kurven k^p und k^q als Bildebene Σ einer Zentralprojektion, wählen das Projektionszentrum C irgendwo im Raume und legen durch C die erste Parallelebene Σ' . (Fig. 1.) Die gegebene Kurve k^p sei eine solche, welche mit Bezug auf das zentrale Projizieren selbst in der Bildebene liegt; die andere Kurve k^q sei wieder die Zetralprojektion einer unendlich fernen Kurve k_{∞}^q .

¹⁾ Vgl. meine Arbeit „Sur quelques rapports entre les triangles et les coniques, Nouv. Ann. de Mathém., IV. Série (1903), T. III., p. 193., weiter die Anmerkung im Archiv d. Math. und Physik, III. R., Bd. III, p. 85; u. A.

²⁾ Schlömilchs Zeitschr. für Math. und Physik Bd. XXXII., p. 373.

³⁾ Steiners ges. Werke (Weierstraß), II. Bd., p. 667. — Offenbar ist unter der Bezeichnung „Grad“ die Ordnung der Kurve zu verstehen.

Diejenigen Geraden s'_i in Σ , welche Träger einer Strecke d sind, deren Endpunkte auf der Kurve k^p beziehungsweise k^q liegen, sind als Zentralprojektionen von solchen Raumgeraden s_i aufzufassen, welche gleiche Bildlängen (d) haben. Der eine Endpunkt D_i einer jeden solchen Strecke liegt auf der Kurve k^p und ist der Durchstoßpunkt, der andere Endpunkt F_i liegt auf der Kurve k^q und ist der Fluchtpunkt der entsprechenden Raumgeraden s_i .

Da alle diese Geraden s_i gleiche Bildlängen (d) haben müssen, so treffen alle die Ebene Σ' in Punkten eines Verschwindungskreises c ; sein Mittelpunkt ist C , sein Halbmesser ist gleich der gegebenen Strecke d .

Durch die drei Kurven k^p , k_∞^q und c ist eine windschiefe Fläche Φ bestimmt. Alle ihre Erzeugenden s_i werden zentral in Gerade s'_i von der Bildlänge d projiziert und es wird der Durchstoßpunkt D einer jeden von ihnen auf der Kurve k^p , der Fluchtpunkt F auf k^q liegen.

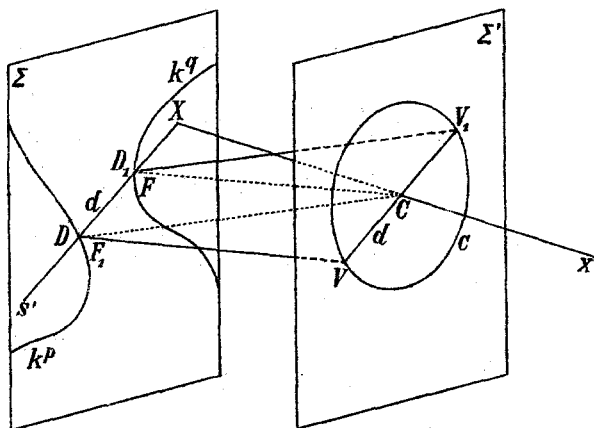


Fig. 1.

Man kann eine zweite solche windschiefe Fläche Ψ bilden, indem man zu Leitlinien den Kreis $c \equiv (C, d)$, die Kurve k^q in Σ und diejenige unendlich ferne Kurve k_∞^p nimmt, welche zentral in die Kurve k^p projiziert wird. Beide Flächen Φ und Ψ haben gleiche Gradzahlen. Die Ordnungszahlen der drei Leitlinien sind in beiden Fällen gleich $p, q, 2$. Sind also k^p und k^q allgemeine Kurven und nicht in einer besonderen gegenseitigen Lage, dann ist der Grad der Fläche Φ sowie derjenige von Ψ gleich $4pq$.

Die Erzeugenden der Flächen Φ und Ψ lassen sich in Paare ordnen; je eine Erzeugende der einen Fläche und eine ihr zugehörige Erzeugende der anderen Fläche haben dasselbe zentrale Bild. Solche

Erzeugendenpaare haben ihre Verschwindungspunkte in den Endpunkten eines Durchmessers von c . Je zwei zusammenfallende Erzeugendenprojektionen DF und $F_1 D_1$ fallen verkehrt übereinander, je nachdem die Kurve k^p oder aber k^q zum Ort der Durchstoßpunkte angenommen wird.

Durch eine beliebige Gerade im Raume können $4pq$ Berührungsebenen an Φ und ebensoviele an Ψ gelegt werden. Da durch den Punkt C keine Erzeugende der Fläche hindurchgeht, so wird die Zahl der durch eine Gerade x , welche den Punkt C enthält, gelegten Berührungsebenen an Φ und Ψ je $4pq$ sein. Je zwei solche Berührungsebenen fallen zusammen, so daß es für beide Flächen nur $4pq$ verschiedene Berührungsebenen gibt, welche durch den Schnittpunkt X der Ebene Σ mit der Geraden x hindurchgehen. Denn irgend eine durch x gelegte Berührungsebene an Φ trifft den Kreis c in zwei Endpunkte V, V_1 eines Diameters; folglich liegt in jener Berührungsebene auch eine Erzeugende der Fläche Ψ , d. h. dieselbe Ebene berührt auch diese Fläche. Die in dieser gemeinschaftlichen Berührungsebene liegenden Erzeugenden, welche je einer von den beiden Flächen angehören, haben aber dieselbe Projektion, ohne Rücksicht auf den Sinn der bezeichneten Strecke DF . Die Anzahl der durch einen Punkt X von Σ hindurchgehenden Geraden, auf welchen Zentralprojektionen von der Bildlänge d im angegebenen Sinne erscheinen, ist also $4pq$. Die Klasse der von den Erzeugendenprojektionen s'_i eingehüllten Kurve k_d von der verlangten Beschaffenheit ist demnach $4pq$.

Nehmen wir auf dem Kreise c einen Punkt V an; diejenigen Erzeugenden der Fläche Φ , welche durch V hindurchgehen, werden zentral in parallele Geraden gleicher Bildlänge (d) projiziert. Da der Kreis c eine pq -fache Kurve der Fläche Φ ist, so gehen durch V pq Erzeugende der Fläche Φ , und es gibt ebenso pq Erzeugende durch den Punkt V , welche der Fläche Ψ angehören. Diese letzteren werden zentral in $p.q$ zu den ersteren parallelen Geraden gleicher Bildlänge d projiziert. Die letzteren pq Strecken d unterscheiden sich von den ersteren zu ihnen parallelen Strecken nur durch den Sinn, in welchen sie vom Durchstoßpunkte bis zum Fluchtpunkte gemessen werden. Die Strecken beider Gruppen von je pq Parallelen sind sämtlich von einander verschieden, was ihre gegenseitige Lage anbelangt, d. h. keine zwei fallen i. A. zusammen, denn alle haben denselben Verschwindungspunkt V . Durch den auf c zu V diametral gegenüberliegenden Verschwindungspunkt V_1 gehen wieder pq Erzeugende für beide Flächen Φ und Ψ , es fallen aber ihre Zentralprojektionen mit den ersteren, für V bestimmten Erzeugendenprojektionen, zusammen. Es gibt daher im Ganzen $2pq$ solcher zwischen k^p und k^q eingeschalteter gleicher Strecken d , welche parallel sind; denn der Sinn, in welchem die Strecken vom Durchstoßpunkt bis zum Fluchtpunkt gemessen werden, ist für die Anzahl gleichgiltig.

Die resultierende Kurve $4pq$ -ter Klasse k_d besitzt demnach in jeder beliebigen Richtung $2pq$ parallele Tangenten, woraus wieder folgt, daß die unendlich ferne Gerade g_∞ eine $2pq$ -fache Tangente der Kurve sein muß.

Man kann dem soeben bewiesenen Satze noch einige besonderen Fälle hinzufügen. Die Klasse der Kurve k_d wird nämlich erniedrigt, wenn die gegebenen Kurven k^p und k^q entweder einzelne gemeinschaftliche Punkte auf der unendlich fernen Geraden haben oder wenn sie ähnlich sind und ähnlich liegen, schließlich wenn eine von ihnen oder beide zugleich zirkuläre, bizirkuläre etc. Kurven sind.

Es ist leicht einzusehen, daß für den Fall, wo die gegebenen Kurven r unendlich ferne gemeinschaftliche Punkte haben, die Klassenzahl der resultierenden Kurve k_d gleich $2(2pq - r)$ sein wird.

2. Steiner gibt einen zweiten Satz,¹⁾ welcher zwar dem soeben behandelten untergeordnet ist, und auf diesen zurückgeführt werden kann, welcher jedoch wegen einigen Vereinfachungen eine besondere Behandlung erfordert. Dieser Satz lautet: „Bewegen sich die beiden Endpunkte der konstanten Strecke AB in einer festen Kurve n -ten Grades, so umhüllt die Gerade s' eine Kurve $2n(n-1)$ -ter Klasse, welche die gegebene Kurve in jedem ihrer im Unendlichen liegenden n Punkte vierpunktig berührt und welche die Gerade g_∞ zur $n(n-1)$ -fachen Tangente hat. Demzufolge gibt es in der gegebenen Kurve nach jeder bestimmten Richtung nur je $n(n-1)$ Sehnen von irgend einer gegebenen Länge AB . Die Mitten solcher $n(n-1)$ gleichen und parallelen Sehnen liegen allemal in irgend einer Kurve $(n-1)$ -ten Grades, und in gleichen Kurven liegen auch die nach gleicher Seite hin liegenden Endpunkte der Sehnen.“

Es sei wieder die Ebene der Kurve k^n zugleich die Bildebene Σ einer Zentralprojektion und irgend ein Punkt C außerhalb Σ das Projektionszentrum. Die Kurve k^n kann als doppelt gedacht werden; einerseits als eine Kurve der Ebene Σ , andererseits als Zentralprojektion einer unendlich fern liegenden Kurve k_∞^n . Legt man durch das Projektionszentrum C irgend eine Gerade x , welche die Bildebene Σ in einem Punkte X trifft und bestimmt die Erzeugenden der windschiefen Fläche Φ , welche durch die Leitlinien k^n , k_∞^n und x erzeugt wird, so werden diese Erzeugenden aus C zentral in Strecken abgebildet, welche sämtlich durch den Punkt X hindurchgehen. Der Durchstoßpunkt einer jeden Erzeugenden als auch deren Fluchtpunkt werden auf k^n liegen. Um aus allen diesen Erzeugenden diejenigen auszuschalten, welche eine gegebene Bildlänge d haben, wird man die Fläche Φ mit einem aus C in der vorderen Parallelebene Σ' beschriebenen Kreise c vom Halbmesser

¹⁾ Steiner-Weierstraß, I. c., p. 667.

d zum Schnitte bringen. Diejenigen Erzeugenden von Φ , welche die Schnittpunkte (Φ, c) enthalten, werden in Strecken von der Länge d projiziert, welche durch den Punkt X gehen und ihre beiden Endpunkte auf der Kurve k^n haben.

Zur Anzahbestimmung solcher Strecken ist vor allem die Gradzahl der Fläche Φ notwendig. Da die Ordnungen der drei genannten Leitlinien gleich $n, n, 1$ sind, so ist i. A. die Ordnung der Fläche gleich $2n^2$; da aber beide Kurven k^n, k_∞^n auf der unendlich fernen Geraden n gemeinschaftliche Schnittpunkte haben, so ist die Ordnungszahl der Fläche um $n.1$ zu vermindern. Von der resultierenden Fläche zweigt sich auch noch der Kegel n -ter

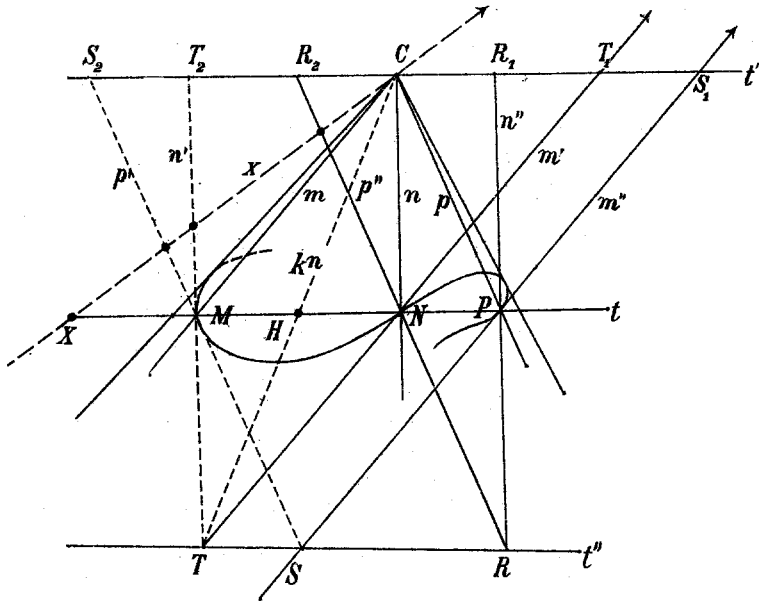


Fig. 2.

Ordnung ab, dessen Spitze das Projektionszentrum C ist und auf welchem die beiden Kurven k^n, k_∞^n liegen, denn die Leitgerade x enthält diese Spitze C . Die Ordnung der Fläche Φ ist also gleich $2n^2 - 2n = 2n(n-1)$. Wie es weiter oben angedeutet wurde, ist nun die Fläche Φ mit dem Kreise (C, d) in Σ' zum Schnitte zu bringen. Die Anzahl $4n(n-1)$ ist doppelt so groß, als es verschiedene Strecken d , d. h. Zentralprojektionen von Erzeugenden der Fläche Φ gibt, welche für die Lösung in Betracht kommen. Man kann nämlich leicht einsehen, daß von den Schnittpunkten des Kreises (C, d) und der Schnittlinie (Φ, Σ') je zwei auf demselben

Kreisdurchmesser liegen. Der Beweis hiefür wird erbracht werden, sobald die Symmetrie der Schnittkurve (Φ, Σ') mit C als Mittelpunkt bewiesen wird.

Ein Blick auf die Fig. 2 gibt den Beweis für diese Symmetrie. Legt man durch die gerade Leitlinie x der Fläche Φ irgend eine Ebene τ , welche die Bildebene Σ in t schneidet, und verbindet den Punkt C mit den Schnittpunkten $M, N, P \dots$ der Kurve k^n und der Trace t , so sind die Verbindungslinien $CM, CN, CP \dots$ Fluchtlinien von ebensovielen Flächenerzeugenden. Eine solche Erzeugende ist z. B. die durch N zu $CM \equiv m$ gezogene Parallele $NT_1 \equiv m'$. In der Tat, diese Gerade m' trifft x und k^n ; da sie zu m (also zu einer Erzeugenden des Kegels C, k^n) parallel ist, so trifft sie auch die dritte Leitlinie k_∞^n . Aus demselben Grunde ist wieder $MT_2 \equiv n'$, d. i. die durch M zu $NC \equiv n$ gezogene Parallele, eine Erzeugende der Fläche Φ . Beide Erzeugenden m' und n' haben aber dasselbe zentrale Bild MN , denn ihre Verschwindungspunkte T_1 und T_2 stehen auf t' gleich weit von C ab; es ist nämlich $MN = CT_1 = CT_2$. Ist $MN = d$, so sind T_1 und T_2 zwei von den Schnittpunkten des Kreises (C, d) mit der Fläche Φ . Beide Schnittpunkte führen aber nur zu einer zentralen Projektion von der Länge d , welche ihren Flucht- und Durchstoßpunkt auf k^n hat.

Es folgt also daraus, daß die Anzahl der verlangten Strecken von der Länge d , welche in k^n eingeschaltet werden können, gleich ist der Hälfte von der Schnittpunktzahl des Kreises (C, d) mit der Linie (Φ, Σ') . Solcher Strecken, welche sämtlich durch den Punkt $(x, \Sigma) \equiv X$ hindurchgehen, gibt es daher $2n(n-1)$, d. h. die Klasse der Kurve, welche von jenen Strecken eingehüllt wird, ist $2n(n-1)$.

Soll der Punkt $(x, \Sigma) \equiv X$ unendlich fern sein, so wird man x durch C in der vorderen Parallelebene Σ' wählen. Diese Gerade x trifft dann den Kreis (C, d) in zwei Punkten, welche Diametral gegenüberliegen. Der Schnitt der Ebene Σ' mit der so erhaltenen Fläche Φ setzt sich zusammen aus der Geraden x , welche eine $n(n-1)$ -fache Gerade der Fläche sein wird, und aus der $n(n-1)$ -fachen unendlich fernen Geraden der Ebene Σ' . Die Schnittpunkte des Kreises (C, d) mit der Geraden x zählen daher für $2n(n-1)$ Punkte, von welchen je zwei diametrale Paare zu je einer zentralen Strecke d führen. Durch den unendlich fernen Punkt X können also $n(n-1)$ im Endlichen verlaufende Strecken d in die Kurve k_d eingeschaltet werden. Die übrigen $n(n-1)$ fallen mit der unendlich fernen Geraden von Σ zusammen, woraus wieder folgt, daß diese Gerade eine $n(n-1)$ -fache Tangente der Kurve sein wird.

Für alle möglichen Lagen des Punktes X in Σ werden verschiedene Flächen Φ erhalten, weil die Gerade CX sich im Bündel bewegt. Die aus einem jeden Punkte X gezogenen Strecken d ,

welche in k^n eingeschaltet sind, werden Tangenten derselben Kurve $2n(n-1)$ -ter Klasse sein, denn diese kann als Einhüllende der durch alle Geraden CX gelegten Tangentialebenen der Fläche Γ der drei festen Leitkurven $k^n, k_\infty^n, (C, d)$ erhalten werden.

Wir lassen hier einige Verhältnisse, die in Verbindung mit der Fläche Γ entstehen, in Kürze folgen, weil dadurch am einfachsten Wege der Beweis für eine weitere Behauptung Steiners erbracht werden kann.

Wäre der Mittelpunkt des Kreises $(C, d) \equiv k^2$ nicht zugleich die Spitze des Kegels (C, k^n) , auf welchem beide Leitkurven k^n, k_∞^n liegen, so würde der Grad der Fläche Γ gleich $4n^2 - 2n$ sein; der Kreis k^2 ist in diesem Falle eine $n(n-1)$ -fache Kurve und er zählt im Schnitte der Ebene Σ' des Kreises mit der Fläche Γ als ein Bestandteil vom Gewichte $2n(n-1)$. Zieht man in den $2n$ Schnittpunkten des Kreises k^2 mit dem Kegel (C, k^n) die Erzeugenden des Kegels, so gehören diese zugleich als Erzeugende der Fläche Γ an; denn eine jede von ihnen schneidet zugleich alle drei Leitlinien.

Geht die Ebene Σ' des Kreises k^2 durch den Mittelpunkt des Kegels, so übergehen die vorher erwähnten $2n$ Erzeugenden in die doppelt zu nehmenden n Erzeugenden des Kegels (Ck^n) , in welchen dieser von der Ebene des Kreises geschnitten wird. An der Gradzahl der Fläche Γ selbst kann auch diese Lage der Kreisebene Σ' nichts ändern. Der Kreis k^2 trifft die unendlich ferne Gerade g_∞ von Σ (oder Σ') in den beiden Kreispunkten J_1 und J_2 . Sind A und B zwei von den n gemeinschaftlichen Punkten beider Leitkurven k^n und k_∞^n verschiedene Punkte auf g_∞ , so ist $J_1 AB$ eine Erzeugende von Γ , weil man annehmen kann, daß g_∞ in A die eine von jenen Leitkurven, in B jedoch die andere trifft. Diese Kombination gibt für J_1 mit g_∞ zusammenfallende Flächen-erzeugende in der Anzahl $n(n-1)$ und ebensoviele führt der Punkt J_2 mit sich. Die Gerade g_∞ ist also eine $2n(n-1)$ -fache Erzeugende der Fläche Γ . In der Tat setzt sich der Schnitt der Fläche Γ mit der Ebene Σ' aus dem $2n(n-1)$ -fach zu zählenden Kreise k^2 , aus den $2n$ Kegelerzeugenden und aus der $2n(n-1)$ -fach zu nehmenden unendlich fernen Geraden zusammen. Die Summe dieser Gewichte liefert die Gradzahl $4n(n-1) + 2n = 4n^2 - 2n$ der Fläche Γ .

Ist also l_i irgend eine Erzeugende von Γ , welche die Kurven k_∞^n, k^n und k^2 bzw. in den Punkten K_∞, K', K'' trifft, so ist l_i zu CK_∞ parallel und der Durchstoßpunkt (CK_∞, Σ) liegt auf k^n . Es ist demnach die Zentralprojektion der Geraden l_i eine in k^n eingeschaltete Strecke von der Länge d , denn l_i trifft den Kreis k^2 im Verschwindungspunkte K'' . Dies, für irgend eine nicht besondere Erzeugende von Γ gesagte, hat keine Geltung mehr, wenn man die angedeuteten Operationen an einer von den n Flächen-erzeugenden in Σ' vollführt, welche zugleich Erzeugende des Kegels (C, k^n) sind. Es sei j_{12} irgend eine (doppelt zu zählende) von jenen

Erzeugenden; sie treffe den Kreis k^2 in den beiden Punkten J_1, J_2 . Zieht man durch C eine Parallele zu j_{12} , so fällt diese mit der Erzeugenden zusammen. Der Flucht- und Durchstoßpunkt der Zentralprojektion für die Erzeugende j_{12} fällt daher mit dem unendlich fernen Punkt von j_{12} , d. h. mit einem von den n Schnittpunkten der Kurven k^n, k_∞ auf g_∞ zusammen. Da aber jene beiden Punkte auf der Kurve k^n liegen müssen, so sieht man, daß die Zentralprojektion von j_{12} eine Nullstrecke sein wird, welche durch die längs j_{12} gelegte Tangentialebene des Kegels (C, k^n) erhalten wird. Es folgt daraus daß für eine feste Kurve k^n und für irgend eine Strecke d je zwei Tangenten der resultierenden Kurve k_d mit je einer Asymptote von k^n zusammenfallen. Aus irgend einem von den n Schnittpunkten (k^n, g_∞) können also an die Kurve k_d nicht $n(n-1)$ Tangenten gezogen werden, wie aus irgend einem der Kurve k^n nicht angehörigen Punkte von g_∞ , sondern nur $n^2 - n - 2$ solche Tangenten, welche von der Asymptote von k^n im betreffenden Punkte verschieden sind. Jeder unendlich ferne Punkt (k^n, g_∞) ist also zugleich ein Punkt von k_d . Das Zusammenfallen zweier Tangenten von k_d mit je einer Asymptote von k^n führt zu einer vierpunktigen Berührung beider Kurven k^n, k_d in je einem Punkte (k^n, g_∞) und es wäre die Art dieser Berührung noch besonders zu prüfen.

Genau so wie früher, erhält man die Klassenzahl der Kurve k_d , wenn man durch C irgend eine Gerade x legt, welche die Ebene Σ in einem i. A. nicht auf k^n liegenden Punkte X trifft. Die $2n$ Erzeugenden der Fläche Γ , welche durch den Punkt C hindurchgehen, führen zu keiner Tangente von k_d durch X , denn die Verbindungslinien von X mit den n Punkten (k^n, g_∞) sind bloß Parallelen zu den Asymptoten von k^n . Es ist demnach die für die Bestimmung von Tangenten an k_d durch den Punkt X in Betracht kommende Anzahl der Schnittpunkte von x mit Γ gleich $4n^2 - 2n - 2n = 4n(n-1)$. Durch die Gerade x können an Γ $4n(n-1)$ Berührungsebenen gelegt werden, von welchen jedoch je zwei zusammenfallen. Es sei P irgend ein von C verschiedener Schnittpunkt (x, Γ). Die durch P gehende Erzeugende p von Γ wird aus C nach Σ in eine Tangente von k_d projiziert, welche den Punkt X enthält, und es wird die Bildlänge von p gleich $\overline{DF} = d$ sein, wo sowohl D als auch F auf k^n liegt. Die Erzeugende p trifft den Kreis k^2 in einem Punkte P' ; diesem Punkte liegt auf k^2 diametral gegenüber der Schnittpunkt P'' von k^2 mit der durch x und p gelegten Ebene. Das zentrale Bild \overline{DF} von p ist also zugleich das zentrale Bild einer anderen Geraden q , für welche F der Durchstoßpunkt, D der Fluchtpunkt sein wird. Solche verkehrt übereinander liegende Zentralprojektionen sind in der Tat Bilder

zweier Geraden, deren Verschwindungspunkte (hier P', P'') die Endpunkte eines Diameters von k^2 sind. Die Gerade q liegt in der Ebene (xp) , sie trifft k^2 in P'' , k^n in F , und ist zur Erzeugenden CD des Kegels (C, k^n) parallel. Diese Gerade q ist demnach eine Erzeugende von Γ ; ihr zentrales Bild geht durch X , hat die Bildlänge d und ist somit identisch mit dem Bilde von p , wenn man von dem umgekehrten Sinn der Strecken DF und FD absieht, da er für die Anzahl der durch X gehenden Tangenten von k_d nicht in Betracht kommt. Die Anzahl dieser Tangenten durch X ist also gleich der Hälfte der Schnittpunkteanzahl (Γ, x) und es ist also die Klassenzahl der Kurve k_d^2 in $2n(n-1)$ wieder wie früher gewonnen.

Ist X ein Punkt der Kurve k^n , so können durch ihn $2n^2 - 4n = 2n(n-2)$ Gerade gezogen werden, auf welchen die Kurve je eine gegebene Strecke d einschneidet, ohne daß ein Endpunkt dieser Strecken mit X zusammenfällt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Klasse $2n(n-1)$ von k_d verringert wird, wenn die gegebene Kurve zirkular, bizirkular u. s. w. ist. Denn in diesen Fällen sind 2, 4 u. s. w. von den unendlich fernen Punkten von k^n in den Kreispunkten auf g_∞ enthalten, was eine Erniedrigung der Gradzahl von Γ zur Folge hat.

Es sei m' irgend eine Erzeugende von Γ (Fig. 2). Die Zentralprojektion von m' sei $MN = d$, wobei mit N der Durchstoßpunkt, mit M der Fluchtpunkt bezeichnet werden möge; H sei die Mitte von \overline{MN} . Der Punkt, in welchem m' den Kreis k^2 trifft, sei T_1 , und der Schnittpunkt von m' mit der zweiten Parallelebene Σ'' , d. i. mit der im Abstände $(C\Sigma)$ parallel zu Σ auf der entgegengesetzten Seite von C gelegten Ebene, sei T . Die Projektion von T aus C auf Σ fällt mit dem Punkte H zusammen. Wie oben gezeigt wurde, gibt es für eine jede Richtung, also auch für die Richtung CT_1 , an die Kurve k_d parallele Tangenten in der Anzahl $n(n-1)$. Diese Tangenten sind Zentralprojektionen von ebensovielen Flächenerzeugenden, welche durch denselben Punkt T_1 hindurchgehen, d. h. welche denselben Verschwindungspunkt haben. In der Tat gehen durch einen jeden Punkt von $k^2 \equiv (C, d)$ $n(n-1)$ Erzeugende, denn der Kreis k^2 ist eine $n(n-1)$ -fache Kurve der Fläche Γ . Die soeben genannten Erzeugenden seien mit m'_i bezeichnet, ($i = 1, 2, \dots, n[n-1]$). Bestimmt man für eine jede von den m'_i Erzeugenden die Schnittpunkte T_i mit Σ'' , und projiziert man die Kurve k^n aus C nach Σ'' in die Kurve n -ter Ordnung k^{*n} , so erhält man auf dieser Kurve eine Gruppe von $n(n-1)$ Punkten T_i . Diese Gruppe kann somit als Schnittgruppe der Kurve n -ter Ordnung k^{*n} mit einer Kurve $k^{*(n-1)}$ angesehen werden. Projiziert man wieder diese Kurve aus C auf Σ zurück, so wird die Projektion eine Kurve k^{n-1} von der Ordnung $n-1$ sein und sämtliche Mitten H_i der $n(n-1)$ parallelen Strecken $M_i N_i$ enthalten. Ist schließlich T_2 der zu T_1 auf k^2 diametral gegenüberliegende

Punkt, und projiziert man die Kurve $k^{*(n-1)}$ aus T_1 und T_2 auf Σ , so wird in den beiden Fällen je eine Kurve von der Ordnung $n-1$ erhalten; die erstere enthält die Endpunkte N_i , die zweite die Endpunkte M_i der parallelen Sehnen.

Hiemit ist also auch der zweite Satz von Steiner vollständig bewiesen.

3. In der anfangs erwähnten Note von Zimmermann wird dem zweiten Steinerschen Satze die folgende Ergänzung beigelegt: „Trägt man vom Mittelpunkt (H) einer jeden von den $n(n-1)$ parallelen Sehnen, deren Länge d ist, nach der einen oder nach der anderen Seite hin eine konstante Strecke d_1 ab, so liegen die so erhaltenen Endpunkte wieder auf einer Kurve $(n-1)$ -ter Ordnung, welche mit der Kurve der Mittelpunkte (H) kongruent und in ähnlicher Lage ist.“

Auch diese Behauptung kann zusammenhängend mit der obigen Darstellungsform bewiesen werden (Fig. 3).

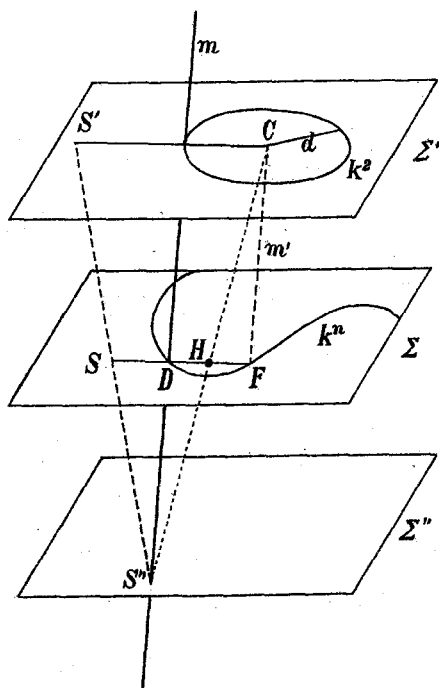


Fig. 3.

Es sei DF eine von den $n(n-1)$ untereinander parallelen Strecken d , welche in k^n eingeschaltet sind, H die Mitte von DF . Die Gerade CH treffe die Ebene Σ'' im Punkte S'' . Trägt man

von H auf DF etwa gegen die Seite von D hin eine Strecke $HS = d_1$ ab und von C im gleichen Sinne eine zu HS parallele Strecke von der Länge $CS' = 2d_1$, so wird der Punkt S'' aus S' nach Σ in den Punkt S projiziert. Da die Punkte S'' für alle $n(n-1)$ parallele Strecken DF auf einer vorhin betrachteten Kurve $k^{*(n-1)}$ von der Ordnung $n-1$ liegen, so werden sie aus dem Punkte S' in eine Kurve k_1^{n-1} derselben Ordnung nach Σ projiziert. Auf dieser Kurve liegen die $n(n-1)$ Punkte S , denn der Punkt S' ist für alle Strecken der parallelen Gruppe derselbe geblieben. Die Kurve k^{n-1} der Mittelpunkte H in Σ und ihre Projektion $k^{*(n-1)}$ aus C nach Σ'' sind ähnliche und ähnlich liegende Kurven vom Verhältnisse 1:2. Die Kurve $k^{*(n-1)}$ und ihre Projektion k_1^{n-1} aus S' nach Σ sind wieder ähnliche und ähnlich liegende Kurven vom Verhältnisse 2:1. Es sind folglich die Kurven k^{n-1} und k_1^{n-1} kongruente Kurven in ähnlicher Lage. Dies bestätigt auch der Umstand, daß k_1^{n-1} durch $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ Punkte bestimmt wird, und daß

$$n(n-1) \geq \frac{1}{2}(n-1)(n+2)$$

ist. Die Kurve k_1^{n-1} ist also tatsächlich durch eine parallele Verschiebung der Kurve k^{n-1} um die Strecke HS entstanden. Das Gleiche gilt für die Kurve, deren $n(n-1)$ -Punkte um die Strecke d_1 von den Punkten H auf der Seite von F abstehen. — Spezielle Kurven, welche mit Strecken im Zusammenhange stehen, wie die Konchoide, Strophoide u. A., können auf die angegebene Weise geometrisch untersucht werden und es lassen sich auf diesem Wege leicht einige Beweise erbringen, welche sonst mit größeren Schwierigkeiten verbunden sind.

Es sei schließlich bemerkt, daß die den Steinerschen analog gebauten Sätze für zwei gegebene Flächen, für zwei Raumkurven, oder eine Fläche und Raumkurve am Wege der Zentralprojektion des vierdimensionalen Raumes erledigt werden können. Hiebei kommen in diesem Raume Strahlengebilde in Betracht, welche den im dreidimensionalen Raum auftretenden windschiefen Flächen, Komplexen und Kongruenzen entsprechen.¹⁾ Man kann bekanntlich eine jede Strecke unseres Raumes als eine Zentralprojektion einer Geraden des vierdimensionalen Raumes auffassen und es sind im Prinzip die Sätze im dreidimensionalen Raume ebenso zu beweisen, wie dies oben für die Steinerschen Sätze in der Ebene getan wurde.

¹⁾ Diese Fragen behandelte ich in einer Note: „Lösung eines allgemeinen metrischen Problems des gewöhnlichen Raumes mit Zuhilfenahme des vierdimensionalen Raumes,“ Berichte der kgl. serb. Akademie der Wissenschaften, Belgrad Bd. 83, p. 197.