1915. № 15.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 47.

# 1. *Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie;*

*von M. v. Laue.*

In einer Arbeit mit derselben Überschrift behandeln Einstein und Hopf[1]) die Frage, ob es berechtigt ist, in einer Fourierreihe, welche die Schwingung natürlicher Strahlung darstellen soll, die Koeffizienten als statistisch voneinander unabhängig zu betrachten. Die Wichtigkeit dieser Frage für die Strahlungs- und damit für die gesamte Quantentheorie geht daraus hervor, daß alle die Überlegungen, welche zum Rayleigh-Jeansschen Strahlungsgesetz führen, auf ihrer Bejahung fußen. Das gilt unmittelbar von der von Jeans selbst herrührenden Ableitung[2]), die die Strahlung im Hohlraum in eine dreifache Fourierreihe entwickelt und auf jeden ihrer Koeffizienten den Gleichverteilungssatz der Energie anwendet, gleich als wäre er ein Freiheitsgrad im Sinne der Boltzmann-Gibbsschen Statistik. Das gilt aber auch für die Plancksche Hypothese der natürlichen Strahlung[3]), bei der die Phasen benachbarter Glieder solcher Reihen als unabhängig voneinander angenommen werden; und diese Hypothese führt zu jenem bekannten Zusammenhang zwischen der Energie $U$ eines Resonators von der Schwingungszahl $\nu$ und der Dichte der Strahlung $\mathfrak{u}_\nu$, der in der Formel

$$\mathfrak{u}_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U$$

ausgesprochen ist und unmittelbar das genannte Strahlungsgesetz enthält, wenn man auf $U$ den Gleichverteilungssatz

1) A. Einstein u. L. Hopf, Ann. d. Phys. **33.** p. 1096. 1910.

2) I. H. Jeans, Phil. Mag. **10.** p. 91. 1905. — Es ändert sich nichts Wesentliches daran, wenn man nach M. Laue (Ann. d. Phys. **44.** p. 1197. 1914) die Freiheitsgrade der Hohlraumstrahlung durch die des Strahlenbündels ersetzt.

3) M. Planck, Ann. d. Phys. **1.** p. 69. 1900.

$U = kT$ anwendet. Aber auch der Gedankengang von Einstein und Hopf[1]), der von der Brownschen Molekularbewegung zu diesem Strahlungsgesetz führt, macht von dieser Hypothese Gebrauch. Da nun doch in allen Ableitungen des Rayleigh-Jeansschen Gesetzes eine der Wirklichkeit nicht entsprechende Voraussetzung enthalten sein muß, und zwar vermutlich in allen die gleiche, so ist eine Prüfung der oben erwähnten Frage in der Tat von größter Wichtigkeit.

Einstein und Hopf kommen nun a. a. O. zu einer Bejahung ihrer Frage. Allein das Zusammenwirken vieler Strahlungsquellen soll nach ihnen die erforderliche Ungeordnetheit der Strahlung liefern. Ihre Überlegung besteht aus den folgenden zwei Schritten:

1. Wenn sich die statistische Unabhängigkeit der Fourierkoeffizienten unter Annahmen beweisen läßt, welche der Wirklichkeit gegenüber die Einführung eines Ordnungsprinzipes bedeuten, so besteht in Wirklichkeit diese Unabhängigkeit a fortiori.

2. Die statistische Unabhängigkeit der Koeffizienten läßt sich rechnerisch erweisen unter den folgenden Annahmen: Die Strahlung stammt aus einer großen Zahl punktförmiger Quellen, die auf einem kleinen Teil einer großen Kugelfläche um den Aufpunkt liegen, und deren Schwingungen durch die gleiche Fourierreihe dargestellt sind, nur daß diese Schwingungen eine rein zufällige Phasendifferenz gegeneinander besitzen.

An dieser Antwort müssen wir Kritik üben. Wir wollen nämlich auf anderem Wege, und zwar schrittweise von einfachen zu verwickelteren Fällen übergehend, den Einfluß räumlicher Ungeordnetheit der Strahlungsquellen untersuchen. Wir finden, daß dieser Einfluß im allgemeinen nicht zur statischen Unabhängigkeit der Fourierkoeffizienten führt. Da wir trotzdem das Ergebnis 2 von Einstein und Hopf ausdrücklich bestätigen müssen, so sind wir gezwungen, der in 1. ausgesprochenen Behauptung zu widersprechen. Und in der Tat scheint diese Behauptung, so plausibel sie auch klingt, leicht widerlegbar (Abschnitt IV).

---

1) A. Einstein u. L. Hopf, Ann. d. Phys. **33**. p. 1105. 1910.

Als Hilfsmittel benutzen wir einen Satz, der eigentlich schon vollständig bei Markoff[1]) zu finden ist. Doch müßten wir die dort benutzte Ausdrucksweise etwas verändern und auch den Satz etwas verallgemeinern. Es erscheint uns einfacher, ihn in der von uns gewünschten Form neu zu beweisen, obwohl wir im Grunde dabei nur Markoffs Verfahren anwenden.

### I. Der Wahrscheinlichkeitssatz.

Die Variablen $x_1, x_2, \ldots x_N$ ($N$ eine große Zahl) können unabhängig voneinander jeden Wert im Bereich zwischen $a$ und $b$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeit, daß sie in einem Teilintervall von der Größe $d\,x$ liegen, ist für alle die gleiche, nämlich $\varrho\,(x)\,d\,x$. Wir bilden die Funktionen

$$f_1\,(x_1),\ f_2\,(x_2),\ \ldots\ f_N(x_N) \text{ und } g_1\,(x_1),\ g_2\,(x_2),\ \ldots\ g_N(x_N)\,.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig

$$t' < \sum_1^N {}^n f_n\,(x_n) < t \tag{1}$$

und

$$u' < \sum_1^N {}^n g_n\,(x_n) < u \tag{2}$$

ist? Wir wollen dabei die Funktionen $f_n$ und $g_n$ keinen anderen Einschränkungen unterwerfen, als daß ihre mathematischen Hoffnungen

$$\int_a^b f_n\,(x_n)\,\varrho\,(x_n)\,d\,x_n = 0\,, \quad \int_a^b g_n\,(x_n)\,\varrho\,(x_n)\,d\,x_n = 0 \tag{3}$$

sein sollen. Die Allgemeinheit der Untersuchung wird damit kaum beschränkt; denn wäre

$$\int_a^b f_n\,(x_n)\,\varrho\,(x_n)\,d\,x_n = \alpha_n\,,$$

so müßten wir statt $f_n$ die Funktion $f_n - \alpha_n$ benutzen, welche der Gleichung (3) genügt. Die Übertragung des abzuleitenden

1) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von H. Liebmann, Leipzig und Berlin 1912, §§ 16 und 33. Derselbe Satz hat sich auch für die Theorie der Beugung des Lichtes an unregelmäßig verstreuten Teilchen nützlich erwiesen; vgl. M. Laue, Berliner Sitzungsberichte 1914. p. 1144.

Wahrscheinlichkeitsausdruckes auf diesen Fall wäre aber ein leichtes. Wir wollen noch von vornherein die Abkürzungen einführen:

$$(4)\quad \begin{cases} \sum_1^N {}_n \int_a^b f_n^2(x_n)\,\varrho(x_n)\,d\,x_n = J_{ff}, \quad \sum_1^N {}_n \int g_n^2(x)\,\varrho(x_n)\,d\,x_n = J_{gg}, \\ \sum_1^N {}_n \int_a^b f_n(x_n)\,g_n(x_n)\,\varrho(x_n)\,d\,x_n = J_{fg}. \end{cases}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Integral

$$\int\int\ldots\int \varrho(x_1)\,\varrho(x_2)\ldots\varrho(x_N)\,d\,x_1\,d\,x_2\ldots d\,x_N,$$

über den Teil eines $N$-dimensionalen Würfels von der Kantenlänge $a-b$ im Raume der $N$-rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_N$, in welchem beide Ungleichungen (1) und (2) erfüllt sind. Mit einem schon von Markoff a. a. O. angewandten Kunstgriff können wir dafür schreiben:

$$\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b H(f)\,H(g)\,\varrho(x_1)\,\varrho(x_2)\ldots\varrho(x_N)\,d\,x_1\,d\,x_2\ldots d\,x_N,$$

wenn wir die Faktoren $H(f)$ und $H(g)$ so wählen, daß

$$H(f) = \begin{cases} 1 \text{ wenn (1) erfüllt ist,} \\ 0 \text{ wenn (1) nicht erfüllt ist;} \end{cases}$$

$$H(g) = \begin{cases} 1 \text{ wenn (2) erfüllt ist,} \\ 0 \text{ wenn (2) nicht erfüllt ist.} \end{cases}$$

Solche Faktoren sind die Dirichletschen Integrale

$$(4\,\mathrm{a})\quad H(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha\xi}{\xi}\,e^{i\gamma\xi}\,d\,\xi, \quad H(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\beta\eta}{\eta}\,e^{i\delta\eta}\,d\,\eta,$$

wenn wir setzen

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(t-t'), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(t+t'), \quad \gamma = \sum_1^N {}_n f_n(x_n) - \varepsilon, \\ \beta = \frac{1}{2}(u-u'), \quad \zeta = \frac{1}{2}(u+u'), \quad \delta = \sum_1^N {}_n g_n(x_n) - \zeta. \end{cases}$$

Denn die genannten Integrale sind gleich 1 oder 0, je nachdem

$$-\alpha < \gamma < \alpha, \quad -\beta < \delta < \beta$$

ist oder nicht; diese Ungleichungen sind aber mit (1) und (2) gleichbedeutend. Wir finden also für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, d\eta \frac{\sin\alpha\xi\cdot\sin\beta\eta}{\xi\eta} e^{-i(\varepsilon\xi+\zeta\eta)}\int_a^b e^{i(f_1(x_1)\xi+g_1(x_1)\eta)}\varrho(x_1)\,dx_1$$

$$\times\int_a^b e^{i(f_2(x_2)\xi+g_2(x_2)\eta)}\varrho(x_2)\,dx_2\ldots\times\int_a^b e^{i(f_N(x_N)\xi+g_N(x_N)\eta)}\varrho(x_N)\,dx_N.$$

Das hier auftretende Integral nach $x_1$ können wir in die folgende Reihe entwickeln (vgl. 3):

$$\int_a^b e^{i(f_1(x_1)\xi+g_1(x_1)\eta)}\varrho(x_1)\,dx_1$$

$$=\int_a^b \varrho(x_1)\,dx+i\int_a^b[f_1(x_1)\xi+g_1(x_1)\eta]\,\varrho(x_1)\,dx_1$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_a^b[f_1(x_1)\xi+g(x_1)\eta]^2\varrho(x_1)\,dx_1$$

$$=1-\tfrac{1}{2}\Big[\xi^2\int_a^b f_1{}^2(x_1)\varrho(x_1)dx_1+2\xi\eta\int_a^b f_1(x_1)g(x_1)\varrho(x_1)dx_1$$

$$+\eta^2\int_a^b g_1{}^2(x_1)\,\varrho(x_1)\,dx_1\Big].$$

Das Produkt aller Integrale nach den $x$ hat in derselben Näherung nach (4) den Wert:

$$1-\tfrac{1}{2}[J_{ff}\xi^2+J_{gg}\eta^2+2J_{fg}\xi\eta]=e^{-\frac{1}{2}[J_{ff}\xi^2+J_{gg}\eta^2+2J_{fg}\xi\eta]}.$$

Die Berechtigung, hierbei stehen zu bleiben, liegt darin, daß jedes der Integrale

$$\int_a^b e^{i(f_n(x_n)\xi+g_n(x_n)\eta)}\varrho(x_n)\,dx_n$$

dem absoluten Wert nach kleiner als

$$\int_a^b \varrho\,dx=1$$

ist, außer wenn $\xi=\eta=0$. Das Produkt dieser $N$ Integrale wird also nur bei sehr kleinen Werten von $\xi$ und $\eta$ überhaupt einen mit 1 vergleichbaren Wert besitzen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit dargestellt durch das Integral:

$$J = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, d\eta\, \frac{\sin\alpha\,\xi\,\sin\beta\,\eta}{\xi\,\eta}\, e^{-i(\varepsilon\xi+\zeta\eta)-\frac{1}{2}(J_{ff}\xi^2+J_{gg}\eta^2+2J_{fg}\xi\eta)};$$

seine Abhängigkeit von $t$, $t'$, $u$ und $u'$ ist durch die Gleichungen (5) bedingt.

Um es umzuformen, differentiieren wir es nach $t$ und nach $u$:

$$(5\text{a})\qquad \frac{d^2 J}{dt\,du} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, d\eta\, e^{-i(t\xi+u\eta)-\frac{1}{2}(J_{ff}\xi^2+J_{gg}\eta^2+2J_{fg}\xi\eta)}$$

Dies Integral bedeutet nach Multiplikation mit $dt\,.\,du$ die Wahrscheinlichkeit $w\,dt\,du$, daß gleichzeitig

$$t < \sum_1^N {}^n f_n(x_n) < t + dt \quad \text{und} \quad u < \sum_1^N {}^n g_n(x_n) < u + du$$

ist. Hier lassen sich beide Integrationen nach $\xi$ und $\eta$ durch Benutzung der Formel

$$(5\text{b})\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}pz^2-qz}\,dz = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi p}}\; e^{\frac{q^2}{2p}} \\ (p \text{ reell, } > 0,\ g \text{ beliebig komplex}) \end{array}\right.$$

ausführen und liefern unmittelbar die Wahrscheinlichkeit $w\,dt\,du$,

$$(6)\qquad w\,dt\,du = \frac{1}{2\pi\sqrt{J_{ff}J_{gg} - J_{fg}^2}}\; e^{-\frac{J_{gg}t^2 - 2J_{fg}tu + J_{ff}u^2}{2(J_{ff}J_{fg} - J_{fg}^2)}}\,.$$

Für die endlichen Bereiche von $t'$ bis $t$ und $u'$ bis $u$ folgt daraus die Wahrscheinlichkeit durch Integration nach $t$ und $u$ über diese Bereiche.

Zur Probe auf die Richtigkeit wollen wir hier die Integration nach $u$ von $-\infty$ bis $+\infty$ ausführen; sie liefert als die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe $\Sigma f_n(x_n)$ zwischen $t$ und $t + dt$ liegt,

$$(6\text{a})\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi J_{ff}}}\, e^{-\frac{t^2}{2J_{ff}}}\,dt$$

was mit sonst bekannten Ergebnissen übereinstimmt. Die Wahrscheinlichkeit, daß $\Sigma\, g_n(x_n)$ zwischen $u$ und $u + du$ liegt, ist entsprechend gleich

$$(6\text{b})\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi J_{gg}}}\, e^{-\frac{u^2}{2J_{gg}}}\,du\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit (6), daß beides zugleich stattfindet, ist aber keineswegs das Produkt dieser letzteren Wahrscheinlichkeiten. Das trifft nur zu, wenn $J_{fg}^2$ gegen $J_{ff}J_{gg}$ vernachlässigt werden kann. Das Verhältnis $J_{fg}^2/J_{ff}J_{gg}$ mißt somit den Grad der statistischen Abhängigkeit der Summen $\Sigma f_n(x_n)$ und $\Sigma g_n(x_n)$.

Der Gang der Rechnung zeigt die Zulässigkeit der folgenden Verallgemeinerung: die Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig

$$\begin{gathered} t < \Sigma f_n(x_n) < t + dt\,, \\ u < \Sigma g_n(x_n) < u + du\,, \\ v < \Sigma h_n(x_n) < v + dv\,. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

ist, ist der Gleichung (5a) entsprechend:

$$\text{(6c)}\quad \left\{\begin{aligned} & w\,dt\,du\,dv\ldots \\ & \quad = \frac{dt\,du\,dv}{(2\pi)^M}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots e^{-i(t\xi+u\eta+v\zeta\ldots)-\frac{1}{2}F}, \end{aligned}\right.$$

wo $M$ die Anzahl der betrachteten Summen

$$\Sigma f_n(x_n),\quad \Sigma g_n(x_n)\ldots$$

bedeutet, und

$$\text{(7)}\quad \left\{\begin{aligned} F = J_{ff}\,\xi^2 + 2J_{fg}\,\xi_\eta &+ 2J_{fh}\,\xi\zeta + \ldots \\ + \;J_{gg}\,\eta^2 &+ 2J_{gh}\,\eta\zeta + \ldots \\ &+ \;J_{hh}\,\zeta^2 \;+ \ldots \\ \left(J_{fg} = \sum_1^N{}_n\int_a^b f_n(x_n)\cdot g_n(x_n)\cdot \varrho(x_n)\,dx_n\right) & \end{aligned}\right.$$

ist. Statt hier die Integrationen nach $\xi$, $\eta$, $\zeta$ usw. nacheinander auszuführen, was sehr umständlich wäre, transformieren wir die homogene quadratische Form $F$ auf eine reine Quadratsumme:

$$\text{(7')}\qquad F = a_1\,\xi_0^{\,2} + a_2\,\eta_0^{\,2} + a_3\,\zeta_0^{\,2} + \ldots$$

Dazu dient uns eine orthogonale Substitution

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \alpha_1^{(1)}\,\xi + \alpha_2^{(1)}\,\eta + \alpha_3^{(1)}\,\zeta + \ldots \\ \eta_0 &= \alpha_1^{(2)}\,\xi + \alpha_2^{(2)}\,\eta + \alpha_3^{(2)}\,\zeta + \ldots \\ \zeta_0 &= \alpha_1^{(3)}\,\xi + \alpha_2^{(3)}\,\eta + \alpha_3^{(3)}\,\zeta + \ldots \end{aligned}$$

Zwischen deren Koeffizienten bestehen die Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum^j \alpha_j^{(m)2} = 1\,, \quad \sum^j \alpha_j^{(m)} \alpha_j^{(n)} = 0\,,$$

aus denen in bekannter Weise folgt, daß die Determinante dieser Koeffizienten, die zugleich die Funktionaldeterminante der $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0 \ldots$ nach $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ist, den Wert 1 hat. Die Werte $a_1$, $a_2 \ldots a_N$ aber sind die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} J_{ff} - a & J_{fg} & J_{fh} & \ldots \\ J_{gf} & J_{gg} - a & J_{gh} & \ldots \\ J_{hf} & J_{hg} & J_{hh} - a & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

Da deren absolutes Glied (abgesehen vom Vorzeichen)

$$\text{(7a)} \qquad D = \begin{vmatrix} J_{ff} & J_{fg} & J_{fh} \ldots \\ J_{gf} & J_{gg} & J_{gh} \ldots \\ J_{hf} & J_{hg} & J_{hh} \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

ist, ist das Produkt

$$\text{(8)} \qquad a_1 a_2 \ldots a_N = D\,.$$

Durch diese Substitution wird aus (6c)

$$w\,dt\,du\,dv \ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_0\, e^{-iA_1\xi_0 - \frac{1}{2}a_1\xi_0^2} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_0\, e^{-iA_2\eta_0 - \frac{1}{2}a_2\eta_0^2} \times \ldots dt\,du\,dv \ldots$$

$$(A_n = \alpha_1^{(n)} t + \alpha_2^{(n)} u + \alpha_3^{(n)} v + \ldots)$$

und, wenn man Gleichung (5b) anwendet[1]:

$$w\,dt\,du\,dv = \frac{dt\,du\,dv \ldots}{\sqrt{(2\pi)^M a_1 a_2 \ldots a_N}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{A_1^2}{a_1} + \frac{A_2^2}{a_2} + \frac{A_3^2}{a_3} + \ldots\right)}.$$

1) Daß die Koeffizienten $a_n$ in (7') alle positiv sind, geht aus der Gleichung

$$F = \sum_1^N {}^n \int (f_n(x_n)\,\xi + g_n(x_n)\,\eta + h_n(x_n)\,\zeta + \ldots)^2\, dx_n$$

hervor, da nach ihr $F$ eine positiv definite Funktion der $\xi, \eta, \zeta$ ist. Aus demselben Grunde ist auch die Determinante $D$ samt allen ihren Unterdeterminanten, welche gleiche obere und untere Indizes tragen, positiv. In den Formeln (9) und (10) haben deswegen die Quadrate von $t, u, v \ldots$ alle negative Koeffizienten.

Nach einer in der Determinantentheorie bekannten Formel[1]) ist aber

$$\frac{A_1^2}{a_1} + \frac{A_2^2}{a_2} + \ldots = \frac{1}{D}\Big(D_1^{(1)} t^2 + D_2^{(2)} u^2 + D_3^{(3)} v^2 + \ldots + 2 D_1^{(2)} t u + 2 D_1^{(3)} t v + 2 D_2^{(3)} u v + \ldots\Big),$$

wobei die $D_m^{(n)}$ die Unterdeterminanten von $D$ sind. Da nach (7a) und (7) $D$ eine symmetrische Determinante ist, ist dabei

$$D_m^{(n)} = D_n^{(m)}.$$

Unter Berücksichtigung von (8) wird also:

$$(9)\begin{cases} w\,d t\,d u\,d v \ldots \\ = \dfrac{d t\,d u\,d v \ldots}{\sqrt{(2\pi)^M D}}\, e^{-\frac{1}{2D}(D_1^{(1)} t^2 + D_2^{(2)} u^2 + D_3^{(3)} v^2 + \ldots + 2 D_1^{(2)} t u + 2 D_1^{(3)} t v + D_2^{(3)} u v + \ldots)} \end{cases}$$

Man erkennt leicht die Formel (6) als besonderen Fall dieser Verallgemeinerung, da dort

$$M = 2\,,\ D = J_{ff} J_{gg} - J_{fg}^2,\ D_1^{(1)} = J_{gg},\ D_2^{(2)} = J_{ff},\ D_1^{(2)} = -J_{fg}$$

ist. Auch ist es nicht schwer, die Formel (6) aus (9) durch fortgesetzte Integration nach $v$, $u$ usw. von $-\infty$ bis $+\infty$ herzustellen, bis nur noch zwei von den Variablen $t$, $u$ usw. übrig sind. Die Integration nach $t$ liefert nämlich im Hinblick auf (5b)

$$d u\, d v \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} w\, d t$$

$$= \frac{d u\, d v \ldots}{\sqrt{(2\pi)^{M-1}}}\, e^{-\frac{1}{2D}[D_2^{(2)} u^2 + D_3^{(3)} v^2 + \ldots 2 D_2^{(3)} u v + \ldots]}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2D}[D_1^{(1)} t^2 + 2 t (D_1^{(2)} u + D_1^{(3)} v + \ldots)]}$$

$$= \frac{d u\, d v \ldots}{\sqrt{(2\pi)^{M-1} D_1^{(1)}}}\, e^{-\frac{1}{2 D D_1^{(1)}}[(D_1^{(1)} D_2^{(2)} - D_1^{(2)2}) u^2 + (D_1^{(1)} D_3^{(3)} - D_1^{(3)2}) v^2 + (D_1^{(1)} D_2^{(3)} - D_2^{(1)} D_1^{(3)}) u v + \ldots]}$$

Die Faktoren von $u^2$, $v^2$ und von $2\,u\,v$ sind hier die Determinanten

---

1) G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie. § 104. p. 241 u. f. besonders p. 243. Leipzig 1909.

$$\begin{vmatrix} D_1^{(1)} & D_1^{(2)} \\ D_1^{(2)} & D_2^{(2)} \end{vmatrix} = D \cdot D_{12}^{12}, \qquad \begin{vmatrix} D_1^{(1)} & D_1^{(3)} \\ D_1^{(3)} & D_3^{(3)} \end{vmatrix} = D \cdot D_{13}^{13}$$

$$\begin{vmatrix} D_1^{(1)} & D_1^{(3)} \\ D_2^{(1)} & D_2^{(3)} \end{vmatrix} = D \cdot D_{13}^{12}.$$

Somit findet sich die Wahrscheinlichkeit, daß ohne Rücksicht auf den Wert von $\Sigma f_n(x_n)$

$$u < \Sigma g_n(x_n) < u + du, \quad v < \Sigma h_n(x_n) < v + dv \ldots$$

ist, zu:

$$\text{(10)} \qquad \frac{du\, dv \ldots}{\sqrt{(2\pi)^{M-1} D_1^{(1)}}} e^{-\frac{1}{2 D_1^{(1)}} (D_{12}^{12} u^2 + D_{13}^{13} v^2 + \ldots D_{13}^{12} u v + \ldots)}.$$

Bedenkt man, daß die Determinante $D_1^{(1)}$ für die Summen $\Sigma g_n(x_n)$, $\Sigma h_n(x_n) \ldots$ dieselbe Rolle spielt, wie $D$ für diese Summen einschließlich $\Sigma f_n(x_n)$, so erkennt man, daß sich die Formel (9) beim Schluß von $M$ auf $M-1$ wiederherstellt, so daß man schließlich zu dem Wahrscheinlichkeitsgesetz (6) und von da zu (6a) und (6b) zurückgelangt. Wären in (7) alle Koeffizienten $I$ mit gemischten Indizes gleich 0, so wäre der Ausdruck (9) einfach das Produkt der Wahrscheinlichkeiten (6a), (6b) und der entsprechenden für $v$, $w$ usw. Denn in diesem Fall wäre

$$D = J_{ff} J_{gg} J_{hh} \ldots, \quad D_1^{(1)} = J_{gg} J_{hh} \ldots, \quad D_2^{(2)} = J_{ff} J_{hh} \ldots,$$
$$D_1^{(2)} = D_1^{(3)} \ldots = 0,$$

also

$$w\, dt\, du\, dv = \frac{dt\, du\, dv \ldots}{\sqrt{(2\pi)^M J_{ff} J_{gg} J_{hh} \ldots}} e^{-\frac{t^2}{2 J_{ff}} - \frac{u^2}{2 J_{gg}} - \frac{v^2}{2 J_{hh}} - \ldots}.$$

Daß die Summen $\Sigma f_n(x_n)$, $\Sigma g_n(x_n) \ldots$ im allgemeinen nicht voneinander statistisch unabhängig sind, beruht somit auf dem Auftreten der Koeffizienten $I$ mit gemischten Indizes. *Das Kennzeichen für statistische Unabhängigkeit dieser Summen ist, daß in der Determinante $D$ (in 7a) die Diagonalglieder gegen die anderen sehr groß sind.*

Eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes bezieht sich auf den Fall, daß jede der Funktionen $f_n$, $g_n$, $h_n$ usw. von mehr als einer Veränderlichen abhängt. Und zwar sollen

$$f_1,\ g_1,\ h_1 \text{ Funktionen von } x_1,\ y_1,\ z_1 \ldots$$
$$f_2,\ g_2,\ h_2 \text{ Funktionen von } x_2,\ y_2,\ z_2 \ldots$$
usw.

sein. Für die Variablen $x_n, y_n, z_n \ldots$ soll unabhängig vom Index $n$ der gleiche Bereich in einem mehrdimensionalen Raum vorgeschrieben sein; die Wahrscheinlichkeit, daß sie in dem durch $dx, dy, dz \ldots$ gemessenen Teilbereich liegen, soll ebenfalls unabhängig vom Index $n$ gleich $\varrho(x, y, z \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots$ sein. Die einzige Änderung, die an unserem Ergebnis dadurch notwendig wird, ist, daß in (7) alle Integrale nach $x_n, y_n, z_n \ldots$ über den ganzen genannten Bereich auszuführen sind; also:

$$(11)\qquad \begin{cases} J_{ff} = \sum\limits_1^N {}^{n} \int\int\int \ldots f_n^2\, \varrho\, d x_n\, d y_n\, d z_n \ldots, \\ J_{fg} = \sum\limits_1^N {}^{n} \int\int\int \ldots f_n\, g_n\, \varrho\, d x_n\, d y_n\, d z_n \ldots \end{cases}$$

usw. Das Wahrscheinlichkeitsgesetz (9) aber bleibt unverändert bestehen.

### II. Die Strahlungsquellen liegen vom Aufpunkt aus alle in derselben Richtung und führen die gleiche Schwingung aus.

Wir nehmen an, eine Reihe von Resonatoren, welche wir durch die Nummern $1, 2, \ldots n, \ldots N$ unterscheiden, führen in der Zeit von $-T$ bis $+T$ alle die gleiche Schwingung in der gleichen Richtung aus, die durch die Reihe

$$(12)\qquad \Re\left\{ \sum{}^{p}\, a_p\, e^{i\left(\frac{\pi p t}{T} - \vartheta_p\right)} \right\}$$

dargestellt ist. Vom Aufpunkt aus gesehen, liegen sie alle in einem kleinen körperlichen Winkel, dessen Richtung wir beliebig gegen die Schwingungsrichtung legen dürfen. Von dieser Wahl hängt im folgenden nur ein konstanter und deswegen überhaupt unterdrückter Faktor ab. Innerhalb dieses körperlichen Winkels sind die Resonatoren über eine gegen die Wellenlänge große Strecke von der Länge $2\, c\, \tau$ lediglich nach Zufall, und zwar mit unveränderlicher Wahrscheinlichkeitsdichte, verteilt (d. h. die Wahrscheinlichkeit eines Teiles dieser Strecke ist seiner Länge proportional). Die Schwingung im Aufpunkt wird dann dargestellt durch:

$$(13)\qquad \begin{cases} \Re\left\{ \sum{}^{p} a_p \sum\limits_1^N {}^{n} e^{i\left(\frac{\pi p (t - t_n)}{T} - \vartheta_p\right)} \right\} \\ = \Re\left\{ \sum{}^{p} a_p\, e^{i \frac{\pi p t}{T}} \sum\limits_1^N {}^{n} \left[\cos\left(\frac{\pi p\, t_n}{T} + \vartheta_p\right) - i \sin\left(\frac{\pi p\, t_n}{T} + \vartheta_p\right)\right] \right\}. \end{cases}$$

Den Abstand aller Resonatoren vom Aufpunkt betrachten wir vorläufig als so groß gegen die Strecke $2c\tau$, daß die Abstandsunterschiede keinen merklichen Einfluß auf die Intensität der im Aufpunkt ankommenden Strahlung haben. Dabei sind die Verzögerungen $t_n$ rein nach Zufall über eine der genannten Strecke entsprechende Zeit *verteilt*, als deren Grenzen wir $+\tau$ und $-\tau$ wählen. $\tau$ muß kleiner als $T$ sein. Denn die Reihe (12) stellt die Schwingung nur für einen Zeitraum von der Länge $2T$ dar; darüber hinaus ergibt sie eine der Wirklichkeit nicht entsprechende periodische Wiederholung derselben Schwingung. Die von den Resonatoren Nr. $n$ und Nr. $n'$ erregten Schwingungen kommen aber mit der Zeitdifferenz $t_n - t_{n'}$ im Aufpunkt an. Die $N$ betrachteten Schwingungen überlagern sich im Aufpunkt daher nur in einem Zeitraum von der Länge $T-\tau$; nur für diesen gilt die Reihe (13). Wollte man $\tau = T$ setzen, so gälte sie überhaupt nicht mehr.

Die Koeffizienten der Reihe (13) sind nun

$$(14)\quad A_p = a_p \sum_1^N{}_n \cos\left(\frac{\pi p t_n}{T} + \vartheta_p\right),\quad B_p = a_p \sum_1^N{}_n \sin\left(\frac{\pi p t_n}{T} + \vartheta_p\right).$$

Wir wollen den Wahrscheinlichkeitssatz (9) auf diese Summen und auf

$$(15)\quad A_{p'} = a_{p'} \sum_1^N{}_n \cos\left(\frac{\pi p' t_n}{T} + \vartheta_{p'}\right),\quad B_{p'} = a_{p'} \sum_1^N{}_n \sin\left(\frac{\pi p' t_n}{T} + \vartheta_{p'}\right)$$

anwenden; dazu setzen wir

$$(15\text{a})\quad \begin{cases} f_n(t_n) = a_p \cos\left(\frac{\pi p t_n}{T} + \vartheta_p\right), & g_n(t_n) = a_p \sin\left(\frac{\pi p t_n}{T} + \vartheta_p\right), \\ f_n'(t_n) = a_{p'} \cos\left(\frac{\pi p' t_n}{T} + \vartheta_{p'}\right), & g_n'(t_n) = a_{p'} \sin\left(\frac{\pi p' t_n}{T} + \vartheta_{p'}\right). \end{cases}$$

Zunächst müssen wir nachweisen, daß für diese Funktionen entsprechend der Annahme (3) die mathematischen Hoffnungen verschwinden. Da nach unserer Annahme über die statistische Gleichwertigkeit aller Teile des Zeitraumes von $-\tau$ bis $+\tau$

$$(16)\qquad \varrho(t_n) = \frac{1}{2\tau}$$

ist, so wird die mathematische Hoffnung für $f_n$

$$\frac{a_p}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau}\cos\left(\frac{\pi p t_n}{T}+\vartheta_p\right)d t_n,$$

d. h. proportional zu dem Mittelwerte der Kosinusfunktion für die Zeit $2\tau$. Diesen Mittelwert dürfen wir gleich Null setzen, da nach Voraussetzung $2\tau$ gegen die Periode sehr groß, also

$$\frac{\pi p \tau}{T} \gg 1$$

ist. Entsprechendes gilt für die Funktionen $f_n'$, $g_n$ und $g_n'$.

Nach (7), (15a) und (16) wird die Größe

$$(17)\quad \begin{cases} J_{ff} = \sum\limits_1^N{}_n \int\limits_{-\tau}^{+\tau} f_n^2 \varrho\, d t_n \\ \qquad = \dfrac{N a_p^2}{4\tau}\int\limits_{-\tau}^{+\tau}\left[1+\cos\left(2\left(\dfrac{\pi p t}{T}+\vartheta_p\right)\right)\right] d t = \dfrac{1}{2} N a_p^2, \end{cases}$$

da man den Mittelwert der Kosinusfunktion wieder gleich Null setzen kann; ebenso:

$$(18)\qquad J_{gg} = \tfrac{1}{2} N a_p^2, \quad J_{f'f'} = J_{g'g'} = \tfrac{1}{2} N a_{p'}^2.$$

Hingegen sind

$$(19)\quad J_{fg} = \sum_1^N{}_n \int_{-\tau}^{+\tau} f_n g_n \varrho\, d t_n = 0, \quad J_{f'g'} = \sum_1^N{}_n \int_{-\tau}^{+\tau} f_n' g_n' \varrho\, d t_n = 0.$$

Besonders wichtig ist nun, daß

$$(20)\quad \begin{cases} J_{ff'} = \sum\limits_1^N{}_n \int\limits_{-\tau}^{+\tau} f_n f_n' \varrho\, d t_n \\ \qquad = \dfrac{N a_p a_{p'}}{2\tau}\int\limits_{-\tau}^{+\tau}\cos\left(\dfrac{\pi p t}{\tau}+\vartheta_p\right)\cos\left(\dfrac{\pi p' t}{T}+\vartheta_{p'}\right) d t \\ \qquad = \dfrac{1}{2} N a_p a_{p'} \cos(\vartheta_p - \vartheta_{p'}) \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi (p-p')\tau}{T}\right)}{\dfrac{\pi(p-p')\tau}{T}} \,{}^{1)} \end{cases}$$

1) Bei der Umrechnung ist der Mittelwert von $\cos\left(\frac{\pi(p+p')t}{T}+\vartheta_p+\vartheta_{p'}\right)$ vernachlässigt, da $\frac{\pi(p+p')\tau}{T}$ gegen 1 groß ist; den Mittelwert von $\cos\left(\frac{\pi(p-p')t}{T}+\vartheta_{p'}-\vartheta_{p'}\right)$ müssen wir aber beibehalten, da $|p-p'|=1$ sein kann und $\tau < T$ ist.

$$(20)\quad \begin{cases} J_{gg'} = \sum\limits_1^N{}_n \int\limits_{-\tau}^{+\tau} g_n g_n' \varrho \, d t_n \\ \qquad = \dfrac{N a_p a_{p'}}{2\tau} \int\limits_{-\tau}^{+\tau} \sin\left(\dfrac{\pi p t}{T} + \vartheta_p\right) \sin\left(\dfrac{\pi p' t}{T} + \vartheta_{p'}\right) d t \\ = \dfrac{1}{2} N a_p a_{p'} \cos(\vartheta_p - \vartheta_{p'}) \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi(p-p')\tau}{T}\right)}{\dfrac{\pi(p-p')\tau}{T}}. \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} J_{fg'} = \sum\limits_1^N{}_n \int\limits_{-\tau}^{+\tau} f_n g_n' \varrho \, d t_n \\ \qquad = \dfrac{N a_p a_{p'}}{2\tau} \int\limits_{-\tau}^{+\tau} \cos\left(\dfrac{\pi p t}{T} + \vartheta_p\right) \sin\left(\dfrac{\pi p' t}{T} + \vartheta_{p'}\right) d t \\ \qquad = -\dfrac{1}{2} N a_p a_{p'} \sin(\vartheta_p - \vartheta_{p'}) \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi(p-p')\tau}{T}\right)}{\dfrac{\pi(p-p')\tau}{T}} \\ J_{f'g} = \sum\limits_1^N{}_n \int\limits_{-\tau}^{+\tau} f_n' g_n \varrho \, d \tau \\ \qquad = \dfrac{N a_p a_{p'}}{2T} \int\limits_{-\tau}^{+\tau} \sin\left(\dfrac{\pi p t}{T} + \vartheta_p\right) \cos\left(\dfrac{\pi p' t}{T} + \vartheta_{p'}\right) d t \\ \qquad = \dfrac{1}{2} N a_p a_{p'} \sin(\vartheta_p - \vartheta_{p'}) \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi(p-p')\tau}{T}\right)}{\dfrac{\pi(p-p')\tau}{T}} \end{cases}$$

Aus (19) folgt unmittelbar, daß die Koeffizienten $A_p$ und $B_p$ (und desgleichen $A_{p'}$ und $B_{p'}$) voneinander statistisch unabhängig sind. Da ferner nach (17) und (18) für $A_p$ und $B_p$ das gleiche Wahrscheinlichkeitsgesetz gilt, so ist für die Phase der durch $p$ gekennzeichneten Schwingung jeder Wert zwischen 0 und $2\pi$ gleich wahrscheinlich, solange man die Phasen der anderen Schwingungen noch nicht kennt; dasselbe gilt natürlich für die Phase der Schwingung $p'$. Nach (20) und (21) hingegen sind weder $A_p$ und $A_{p'}$, noch $B_p$ und $B_{p'}$, noch $A_p$ und $B_{p'}$, noch $B_p$ und $A_{p'}$ voneinander statistisch unabhängig. Sie werden auch durch Vergrößerung von $N$ nicht unabhängiger voneinander; denn dabei wachsen alle in (17) bis (21) aufgezählten Glieder der Determinante $D$ (vgl. 7a) proportional zu $N$.

Selbstverständlich besteht diese statistische Koppelung nicht für weit voneinander entfernte Glieder unserer Fourierschen Reihe; ihr Maß ist nach (20) und (21) im wesentlichen der Bruch

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi(p-p')\tau}{T}\right)}{\frac{\pi(p-p')\tau}{T}}\right|.$$

Die Kurve, welche ihn als Funktion von $(p-p')$ darstellt, ist aus der Theorie der Beugung am Spalt wohl bekannt. Er besitzt seinen größten Wert 1 bei $p-p'=0$, verschwindet, wenn

$$p-p'=h\frac{T}{\tau} \qquad (h \text{ eine ganze Zahl, außer } 0)$$

und nimmt dazwischen eine Reihe von allmählich immer niedriger werdenden Maximalwerten an. Zu vernachlässigen ist er gegen 1 erst, wenn

$$\pi\,|p-p'|\gg\frac{T}{\tau}.$$

Bedenken wir, daß $T/\tau>1$ ist, so finden wir zwischen den Koeffizientenpaaren $A_p$ und $A_{p\pm 1}$, oder $B_p$ und $B_{p\pm 1}$, oder $A_p$ und $B_{p\pm 1}$, oder $B_p$ und $A_{p\pm 1}$ im allgemeinen sogar eine ziemlich enge Koppelung.

Man darf übrigens auf die besondere Form dieser Koppelungsfunktion keinen Nachdruck legen. Sie ist lediglich durch zwei recht willkürliche Annahmen bedingt, nämlich erstens durch die Voraussetzung, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(t_n)$ in dem ganzen Bereich von $-\tau$ bis $+\tau$ konstant ist — sowie der die Strahlungsquellen enthaltende Körper von veränderlicher Dichte wäre, träfe dies nicht mehr zu —; zweitens dadurch, daß wir unseren Aufpunkt als von allen Resonatoren so weit entfernt angenommen haben, daß alle Schwingungen mit der gleichen Amplitude in ihm ankommen — genau genommen aber ist die Amplitude der vom $n$ten Resonator herrührenden Schwingung umgekehrt proportional zu $R+c\,t_n$, wenn $R$ die Entfernung des Mittelpunktes jener Strecke $2c\tau$ angibt, auf welcher unsere Resonatoren verstreut sind. Wir wollen jetzt diese beiden Voraussetzungen fallen lassen.

Dann ist zunächst die Reihe (13) zu ersetzen durch eine andere, in der die Koeffizienten statt durch (14) und (15) durch

$$
(22) \quad \begin{cases}
A_p = a_p \sum_1^N {}^n \frac{1}{R + c\, t_n} \cos\left(\frac{\pi p\, t_n}{T} + \vartheta_p\right) \\
A_{p'} = a_{p'} \sum_1^N {}^n \frac{1}{R + c\, t_n} \cos\left(\frac{\pi p'\, t_n}{T} + \vartheta_{p'}\right) \\
B_p = a_p \sum_1^N {}^n \frac{1}{R + c\, t_n} \sin\left(\frac{\pi p\, t_n}{T} + \vartheta_p\right) \\
B_{p'} = a_{p'} \sum_1^N {}^n \frac{1}{R + c\, t_n} \sin\left(\frac{\pi p'\, t_n}{T} + \vartheta_{p'}\right)
\end{cases}
$$

gegeben sind. An die Stelle von (15a) tritt deswegen

$$
f_n = \frac{a_p}{R + c\, t_n} \cos\left(\frac{\pi p\, t_n}{T} + \vartheta_p\right) \qquad g_n = \frac{a_p}{R + c\, t_n} \sin\left(\frac{\pi p\, t_n}{T} + \vartheta_p\right)
$$

$$
f_n' = \frac{a_{p'}}{R + c\, t_n} \cos\left(\frac{\pi p'\, t_n}{T} + \vartheta_{p'}\right) \qquad g_n' = \frac{a_{p'}}{R + c\, t_n} \sin\left(\frac{\pi p'\, t_n}{T} + \vartheta_{p'}\right).
$$

Wir haben zuerst nachzuweisen, daß die mathematischen Hoffnungen dieser vier Funktionen verschwinden.

Dazu dient uns der aus der Theorie der Fourierschen Integrale entnommene Satz, daß, wenn $F(\zeta)$ eine stetige Funktion ist,

$$
(23) \qquad \lim_{k = \infty} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} F(\zeta)\, e^{i k \zeta}\, d\zeta = -\, i \lim_{k = \infty} \left(\frac{1}{k} \left| F e^{i k \zeta} \right|_{\zeta_1}^{\zeta_2}\right)
$$

ist. $R + c t_n$ ist aber im Integrationsbereich eine langsam veränderliche Funktion und von $\varrho(t_n)$ dürfen wir dasselbe voraussetzen. Wenn dann

$$
(24) \qquad \frac{2\pi p \tau}{T} \gg 1\,,
$$

können wir diesen Satz unbedenklich auf die mathematische Hoffnung von $f_n$

$$
a_p \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\varrho(t_n)\, d t_n}{R + c\, t_n} \cos\left(\frac{\pi p\, t_n}{T} + \vartheta_p\right)
$$

anwenden und finden für sie und ebenfalls für die mathematischen Hoffnungen von $g_n$, $f_n'$ und $g_n'$ einen zu vernachlässigenden Wert.

Wenn wir dann zur Berechnung der Glieder $I_{ff}$, $I_{gg}$ usw. der Determinante $D$ nach (7) übergehen, so stoßen wir auf die Integrale:

$$\int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\varrho\, d\, t}{(R + c\, t)^2} = A\,, \quad \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\varrho\, d\, t}{(R + c\, t)^2} \cos\left(\frac{\pi\,(p - p')\, t}{T}\right) = B\,,$$

$$\int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\varrho\, d\, t}{(R + c\, t)^2} \sin\left(\frac{\pi\,(p - p')\, t}{T}\right) = C\,,$$

$$\int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\varrho\, d\, t}{(R + c\, t)^2} \cos\left[2\left(\frac{\pi\, p\, t}{T} + \vartheta_p\right)\right] = E\,,$$

$$\int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\varrho\, d\, t}{(R + c\, t)^2} \sin\left[2\left(\frac{\pi\, p\, t}{T} + \vartheta_p\right)\right] = F\,,$$

$$\int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\varrho\, d\, t}{(R + c\, t)^2} \cos\left[\frac{\pi\,(p + p')\, t}{T} + \vartheta_p + \vartheta_{p'}\right] = G\,,$$

$$\int_{-\tau}^{+\tau} \frac{\varrho\, d\, t}{(R + c\, t)^2} \sin\left[\frac{\pi\,(p + p')\, t}{T} + \vartheta_p + \vartheta_{p'}\right] = H\,.$$

Die Integrale $E$, $F$, $G$ und $H$ verschwinden nach dem Satz (23) unter der Bedingung (24). Deswegen wird:

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} J_{ff} = J_{gg} = \frac{1}{2} N\, a_p^{\,2} A\,, \quad J_{fg} = 0\,, \\ J_{f'f'} = J_{g'g'} = \frac{1}{2} N\, a_{p'}^{\,2} A\,, \quad J_{f'g'} = 0\,. \end{array} \right.$$

$$(26) \quad J_{ff'} = J_{gg'} = \tfrac{1}{2} N\, a_p\, a_{p'} \left[\cos(\vartheta_p - \vartheta_{p'})\, B - \sin(\vartheta_p - \vartheta_{p'})\, C\right].$$

$$(27) \quad -J_{fg'} = J_{f'g} = \tfrac{1}{2} N\, a_p\, a_{p'} \left[\sin(\vartheta_p - \vartheta_{p'})\, B + \cos(\vartheta_p - \vartheta_{p'})\, C\right].$$

Da

$$\frac{\varrho}{(R + c\, t)^2} > 0\,,$$

sind zwar stets $B$ und $C$ kleiner als $A$, und dasselbe gilt daher auch von den Klammern in (26) und (27); damit aber diese Klammern gegen $A$ verschwinden, damit also die vier Koeffizienten (22) statistisch unabhängig sind, muß ganz wie oben

$$(28) \qquad \frac{2\,\pi\, |\, p - p'\, |\, \tau}{T} \gg 1$$

sein. Die an die Gleichungen (17) bis (21) angeschlossene Erörterung läßt sich also in allen wesentlichen Zügen auf diese Formeln übertragen.

### III. Die Lage der Resonatoren ist beliebig, ihre Schwingungen gehorchen nur demselben Wahrscheinlichkeitsgesetz.

Wir betrachten wieder $N$ in der gleichen Richtung schwingende Resonatoren, deren Lage wir durch die vom Aufpunkt gemessenen Polarkoordinaten $r$, $\Theta$, $\varphi$ festlegen. Dabei können wir wieder wie in Abschnitt II statt $r_n$ die Verzögerungszeit $t_n$ benutzen, indem wir $r_n = R + c\,t_n$ setzen. Der für die Resonatoren zur Verfügung stehende Raum soll innerhalb zweier Kugelflächen um den Aufpunkt von den Radien $R \pm c\tau_n$ liegen. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Koordinaten des $n$ten Resonators zwischen $t_n$ und $t_n + dt_n$, $\Theta_n$ und $\Theta_n + d\,\Theta_n$, $\varphi_n$ und $\varphi_n + d\varphi_n$ liegen, bezeichnen wir mit

$$\omega\,(t_n, \Theta_n, \varphi_n)\,dt_n\,d\,\Theta_n\,d\varphi_n\,.$$

Da $\omega$ in gewissen Teilen jener Kugelschale Null sein kann, ist der wirkliche Verteilungsraum noch in weitem Maße willkürlich begrenzt.

Die Schwingung des $n$ten Resonators stellen wir für die von $-T$ bis $+T$ durch die Reihe

$$\Re\left\{\sum\nolimits^{p} a_{pn}\,e^{i\left(\frac{\pi p t}{T} - \vartheta_{pn}\right)}\right\} \tag{29}$$

dar. Wie früher soll $T > \tau$ sein. Die Koeffizienten $a_{pn}$, $a_{p'n}$ und $\vartheta_{pn}$, $\vartheta_{p'n}$ sollen nun unabhängig von dem Index $n$ einem Wahrscheinlichkeitsgesetz gehorchen; die Wahrscheinlichkeit, daß sie bei einem bestimmten Resonator in den Grenzen $a_{pn}$ und $a_{pn} + da_{pn}$, $a_{p'n}$ und $a_{p'n} + da_{p'n}$ usw. liegen, soll gleich

$$\sigma\,(a_{pn}, a_{p'n}, \vartheta_{pn}, \vartheta_{p'n})\,d\,a_{pn}\,d\,a_{p'n}\,d\,\vartheta_{pn}\,d\,\vartheta_{p'n}$$

sein. Darin liegt ausgesprochen, daß die Schwingungsform aller Resonatoren einem unbekannten, aber gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsprinzip unterliegt; außerdem, da doch von diesen Koeffizienten die Intensität der Schwingung abhängt, daß sie im zeitlichen Durchschnitt alle die gleiche Intensität haben.

Im Aufpunkt betrachten wir die resultierende elektrische Schwingung in einer beliebigen Richtung, die mit der Schwingungsrichtung der Resonatoren nicht übereinzustimmen braucht. Jedenfalls ist diese dargestellt durch eine Reihe

$$\left\{\begin{aligned}&\Re\left\{\sum\nolimits^{p} e^{i\frac{\pi p t}{T}} \sum_{1}^{N}{}^{n}\, \Phi\,(t_n, \Theta_n, \varphi_n)\,a_{pn}\right.\\ &\qquad\left.\times\left[\cos\left(\frac{\pi p\,t_n}{T} + \vartheta_{pn}\right) - i\sin\left(\frac{\pi p\,t_n}{T} + \vartheta_{pn}\right)\right]\right\},\end{aligned}\right. \tag{30}$$

in der $\Phi\,(t_n, \Theta_n, \varphi_n)$ eine leicht angebbare, aber für uns belanglose Funktion der Entfernung und der Richtung des $n$ten Resonators vom Aufpunkt aus bedeutet. Die Koeffizienten dieser Reihe haben die Werte:

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_p &= \sum_1^N {}^n a_{pn}\, \Phi(t_n, \Theta_n, \varphi_n) \cos\left(\frac{\pi p t_n}{T} + \vartheta_{pn}\right) \\
A_{p'} &= \sum_1^N {}^n a_{p'n}\, \Phi(t_n, \Theta_n, \varphi_n) \cos\left(\frac{\pi p' t_n}{T} + \vartheta_{p'n}\right) \\
B_p &= \sum_1^N {}^n a_{pn}\, \Phi(t_n, \Theta_n, \varphi_n) \sin\left(\frac{\pi p t_n}{T} + \vartheta_{pn}\right) \\
B_{p'} &= \sum_1^N {}^n a_{p'n}\, \Phi(t_n, \Theta_n, \varphi_n) \sin\left(\frac{\pi p' t_n}{T} + \vartheta_{p'n}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Um den Markoffschen Wahrscheinlichkeitssatz (9) anzuwenden, müssen wir setzen:

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
f_n &= a_{pn}\, \Phi(t_n, \Theta_n, \varphi_n) \cos\left(\frac{\pi p t_n}{T} + \vartheta_{pn}\right) \\
f_n' &= a_{p'n}\, \Phi(t_n, \Theta_n, \varphi_n) \cos\left(\frac{\pi p' t_n}{T} + \vartheta_{p'n}\right) \\
g_n &= a_{pn}\, \Phi(t_n, \Theta_n, \varphi_n) \sin\left(\frac{\pi p t_n}{T} + \vartheta_{pn}\right) \\
g_n' &= a_{p'n}\, \Phi(t_n, \Theta_n, \varphi_n) \sin\left(\frac{\pi p' t_n}{T} + \vartheta_{p'n}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

und jede dieser Funktionen als abhängig von den sieben Veränderlichen $t_n$, $\Theta_n$, $\varphi_n$, $a_{pn}$, $a_{p'n}$, $\vartheta_{pn}$ und $\vartheta_{p'n}$ betrachten. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese in einem gewissen unendlich kleinen Bereich liegen, ist nach den Voraussetzungen dieses Abschnittes

$$
\begin{aligned}
\varrho(t_n, \Theta_n, \varphi_n, a_{pn}, a_{p'n}, \vartheta_{pn}, \vartheta_{p'n})\, dt_n\, d\Theta_n\, d\varphi_n\, da_{pn}\, da_{p'n}\, d\vartheta_{pn}\, d\vartheta_{p'n} \\
= \omega(t_n, \Theta_n, \varphi_n) \cdot \sigma(a_{pn}, a_{p'n}, \vartheta_{pn}, \vartheta_{p'n}) \\
\times\, dt_n\, d\Theta_n\, d\varphi_n\, da_{pn}\, da_{p'n}\, d\vartheta_{pn}\, d\vartheta_{p'n}\,.
\end{aligned}
$$

Die mathematische Hoffnung von $f_n$ ist infolgedessen gleich

$$
\iiiint a_{pn}\, \sigma\, da_{pn}\, da_{p'n}\, d\vartheta_{pn}\, d\vartheta_{p'n} \iint d\Theta_n\, d\varphi_n \int_{-\tau}^{+\tau} \omega\, \Phi \cos\left(\frac{\pi p t_n}{T} + \vartheta_{pn}\right) dt_n\,.
$$

Nach dem Satz (23) liefert die Integration nach $t_n$ etwas zu Vernachlässigendes, so daß $f_n$ und ebenso $g_n$, $f_n'$ und $g_n'$ der Voraussetzung (3) genügt. Bei der Berechnung der Koeffizienten $I_{ff}$, $I_{gg}$, $I_{fg}$ … nach (7) haben wir die folgenden Integrale auszuwerten:

$$\iiiint a_{pn}^{\,2}\,\sigma\,d\,a_{pn}\,d\,a_{p'n}\,d\,\vartheta_{pn}\,d\,\vartheta_{p'n}\iint d\,\Theta\,d\,\varphi\int\limits_{-\tau}^{+\tau}\Phi^2\,\omega\,d\,t$$
$$= \overline{a_p^{\,2}}\cdot A\,,$$

wenn wir mit $\overline{a_p^2}$ die mathematische Hoffnung von $a_{pn}^{\,2}$, mit $A$ das Integral:

$$\iint d\,\Theta\,d\,\varphi\int\limits_{-\tau}^{+\tau}\Phi^2\,\omega\,d\,t$$

bezeichnen. Ferner:

$$\iiiint a_{pn}\,a_{p'n}\,{\cos \atop \sin}(\vartheta_{pn}-\vartheta_{p'n})\,d\,a_{pn}\,d\,a_{p'n}\,d\,\vartheta_{pn}\,d\,\vartheta_{p'n}\iint d\,\Theta\,d\,\varphi$$
$$\int\limits_{-\tau}^{+\tau}\Phi^2\,\omega\,\cos\frac{\pi\,(p-p')\,t}{T}\,d\,t$$
$$= \overline{a_p\,a_{p'}\,{\cos \atop \sin}(\vartheta_p-\vartheta_{p'}}\cdot B$$

$$\iiiint a_{pn}\,a_{p'n}\,{\cos \atop \sin}(\vartheta_{pn}-\vartheta_{p'n})\,d\,a_{pn}\,d\,a_{p'n}\,d\,\vartheta_{pn}\,d\,\vartheta_{p'n}\iint d\,\Theta\,d\,\varphi$$
$$\int\limits_{-\tau}^{+\tau}\Phi^2\,\omega\,\sin\frac{\pi\,(p-p')\,t}{T}\,d\,t$$
$$= \overline{a_p\,a_{p'}\,{\cos \atop \sin}(\vartheta_p-\vartheta_{p'}}\cdot C\,,$$

wo
$$\overline{a_p\,a_p\,{\cos \atop \sin}(\vartheta_p-\vartheta_{p'})}$$
die mathematische Hoffnung von
$$a_{pn}\,a_{p'n}\,{\cos \atop \sin}(\vartheta_{pn}-\vartheta_{p'n})$$
bedeutet und

$$\iint d\,\Theta\,d\,\varphi\int\limits_{-\tau}^{+\tau}\Phi^2\,\omega\,\cos\frac{\pi\,(p-p')\,t}{T}\,d\,t = B,$$

$$\iint d\,\Theta\,d\,\varphi\int\limits_{-\tau}^{+\tau}\Phi^2\,\omega\,\sin\frac{\pi\,(p'-p)\,t}{T}\,d\,t = C$$

gesetzt ist. Den Index $n$ haben wir bei diesen mathematischen Hoffnungen fortlassen dürfen, weil sie nach Voraussetzung für alle Resonatoren den gleichen Wert haben. In allen anderen bei diesen Berechnungen auftretenden Integralen kommen stets Integrale nach $t$ vor, die von einer der Formen

$$\int\limits_{-\tau}^{+\tau}\Phi^2\,\omega\,{\cos \atop \sin}\left[2\left(\frac{\pi\,p\,t_n}{T}+\vartheta_{pn}\right)\right]d\,t_n,$$

$$\int_{-\tau}^{+\tau} \Phi^2 \omega \frac{\cos}{\sin}\left[\frac{\pi(p+p')t_n}{T} + \vartheta_{pn} + \vartheta_{p'n}\right] d t_n$$

sind und nach (23) vernachlässigt werden dürfen. Infolgedessen finden wir:

(33) $J_{ff} = J_{gg} = \frac{1}{2} N \overline{a_p^{\,2}} A,\ J_{ff} = 0,\ J_{f'f'} = J_{g'g'} = \frac{1}{2} N \overline{a_{p'}^{\,2}} A,\ J_{f'g'} = 0$

(34) $J_{ff'} = J_{gg'} = \frac{1}{2} N [\overline{a_p a_{p'} \cos(\vartheta_p - \vartheta_{p'})} \cdot B - \overline{a_p a_{p'} \sin(\vartheta_p - \vartheta_{p'})} \cdot C]$

(35) $-J_{fg'} = J_{f'g}$

$$= \tfrac{1}{2} N [\overline{a_p a_{p'} \sin(\vartheta_p - \vartheta_{p'})} \cdot B + \overline{a_p a_{p'} \cos(\vartheta_p - \vartheta_{p'})} \cdot C].$$

Ähnlich wie in Abschnitt II sind hier die Integrale $B$ und $C$ stets kleiner als $A$, weil $\Phi^2\omega > 0$ ist. Damit sie aber gegen $A$ zu vernachlässigen sind, muß wieder die Bedingung (28),

$$\frac{2\pi|p-p'|\tau}{T} \gg 1,$$

erfüllt sein. Sollen daher *alle* Koeffizienten der Reihe (30) voneinander unabhängig sein, so ist dazu notwendig, daß für den einzelnen Resonator die Mittelwerte $\overline{a_p a_{p'} \frac{\cos}{\sin} (\vartheta_p - \vartheta_{p'})}$ gegen die Mittelwerte $\overline{a_p^2}$ und $\overline{a_{p'}^2}$ verschwinden. Diese Bedingung wäre z. B. dann erfüllt, wenn die Phasen $\vartheta_p$ und $\vartheta_{p'}$ in der Schwingung des einzelnen Resonators unabhängig voneinander und von den $a_{pn}$ und $a_{p'n}$ alle Werte von 0 bis $2\pi$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit annehmen könnten. Aber weder räumliche Ungeordnetheit in der Verteilung der Resonatoren noch eine Vergrößerung ihrer Anzahl $N$ vermag diese statistische Unabhängigkeit herbeizuführen.

Hiermit wollen wir unsere Berechnungen abschließen. Die einzige weitere Verallgemeinerung, die noch leicht durchzuführen wäre, bestände darin, daß man jedem Resonator drei zueinander senkrechte, statistisch unabhängige, aber dem gleichen, durch die Funktion $\sigma$ gegebenen Wahrscheinlichkeitsgesetz gehorchende Schwingungen zuschreibt. Da aber diese Verallgemeinerung zu sehr umständlichen Formeln führt, begnügen wir uns mit der Angabe des Ergebnisses, daß sie nichts Neues bringt.[1])

1) Zu den in (33), (34) und (35) auftretenden Integralen $A$, $B$ und $C$ kommen dabei einfach aus zwei anderen Funktionen $\Phi'(t_n, \Theta_n, \varphi_n)$ und $\Phi''(t_n, \Theta_n, \varphi_n)$ genau ebenso gebildete Integrale $A'$ und $A''$, $B'$ und $B''$, $C'$ und $C''$ additiv hinzu.

Vernachlässigt haben wir in allen Betrachtungen die gegenseitige Beeinflussung der Resonatoren, die sich als Absorption, Dispersion und Zerstreuung der Strahlung äußert. Wir können sie auch nicht ohne eine Verallgemeinerung des Markoffschen Wahrscheinlichkeitssatzes nachträglich berücksichtigen. Wir glauben aber kaum, daß bei Beseitigung dieses Mangels das Ergebnis wesentlich anders lautete. Denn solange wir nichts Näheres über den Mechanismus des einzelnen Resonators festgesetzt haben, ist die Frage nach der Stärke dieser Beeinflussung gar nicht zu beantworten. Wir könnten sie z. B. durch starke Dämpfung weitgehend herabsetzen. Es dünkt uns wenig wahrscheinlich, daß der Grad der Geordnetheit der Strahlung von solchen Einzelheiten im Mechanismus der Resonatoren abhängen sollte.

### IV. Die Fragestellung von Einstein und Hopf.

Eine ganz von unseren bisherigen Voraussetzungen abweichende Annahme über die Resonatoren legen Einstein und Hopf[1]) ihrer Betrachtung zugrunde. Sie sollen nämlich alle auf einem kleinen Teil einer großen Kugelfläche liegen, deren Mittelpunkt der Aufpunkt ist. Ferner sollen ihre Schwingungen dargestellt sein durch

$$\mathfrak{R}\left\{\Sigma\, a_p\, e^{i\left(\frac{\pi p (t - t_n)}{T} - \vartheta_p\right)}\right\},$$

wobei die Verzögerungen $t_n$ zwischen $-T$ und $+T$ mit überall gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte liegen. Diese Schwingungen sind somit verschiedene, aber gleich große Ausschnitte aus derselben sich mit der Periode $2T$ wiederholenden Schwingungskurve.

Die Schwingung im Aufpunkt ist infolgedessen dargestellt durch die Reihe (13); für $I_{ff}$ usw. können wir unmittelbar die in (18), (19), (20) und (21) angegebenen Werte benutzen, wenn wir $\tau = T$ setzen. Dabei verschwinden alle $I$ mit gemischten Indizes, so daß die Koeffizienten $A_p$, $B_p$, $A_p'$, $B_p'$ voneinander statistisch unabhängig werden. Dies ist genau das Ergebnis von Einstein und Hopf.

Da wir somit in einem durch höhere Geordnetheit ausgezeichneten Fall statistische Unabhängigkeit finden, im all-

1) Vgl. p. 1.

gemeinen aber nicht, so müssen wir dem Satz (1) von Einstein und Hopf: „Können wir die statistische Unabhängigkeit unter Zugrundelegung von Ordnungsprinzipien beweisen, so gilt sie a fortiori für den Fall, daß man diese Ordnungsprinzipien fallen läßt" unsere Anerkennung versagen. Auch ist es leicht zu verstehen, warum er im allgemeinen nicht zutrifft. Ist $M$ die Zahl der möglichen Fälle, so bedeutet die Einführung eines Ordnungsprinzips die Einschränkung dieser Zahl. Wie sich dabei die Zahl $G$ der für ein bestimmtes Ereignis günstigen Fälle ändert, ist ohne nähere Angaben nicht zu übersehen; man kann dessen Wahrscheinlichkeit dabei noch in den weitesten Grenzen abändern. Besteht das Ereignis aus zwei Teilereignissen, so können diese sehr wohl ohne das Ordnungsprinzip statistisch abhängig, mit diesem Prinzip aber unabhängig sein.

Betrachten wir z. B., wie am Anfang des Abschnittes I, die Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig

$$t < \Sigma f_n(x_n) < t + dt, \quad u < \Sigma g_n(x_n) < u + du$$

ist, wenn alle $x_n$ nach demselben Wahrscheinlichkeitsgesetz $\varrho(x)$ zwischen $a$ und $b$ liegen können. Es bedeutet die Einführung eines Ordnungsprinzips, wenn wir $\varrho(x)$ so abändern, daß es nur in dem Teilbereich von $a'$ bis $b'$ von Null verschieden ist, in diesem Teilbereich aber Werte erhält, die zu den alten bis auf einen konstanten Faktor proportional sind. Bei dieser Veränderung kann nach (4) $I_{fg}$ auch dann Null werden, wenn es zunächst nicht Null ist.

Soviel wir sehen, liegen im Grunde die gleichen Verhältnisse auch schon in ganz einfachen Beispielen geometrischer Wahrscheinlichkeiten vor. Es soll etwa den (im gewöhnlichen Sinn) unabhängigen Veränderlichen $x$ und $y$ das Innere des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

vorgeschrieben sein, und zwar so, daß gleichen Flächenstücken die gleiche Wahrscheinlichkeit entspricht. Die Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig

$$x_0 < x < x_0 + dx \quad \text{und} \quad y_0 < y < y_0 + dy$$

ist, ist dann

$$\frac{dx\,dy}{\pi r^2}, \text{ wenn } x_0{}^2 + y_0{}^2 < r^2, \text{ sonst } 0. \tag{36}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei vorgeschriebenem $y$

$$x_0 < x < x_0 + d\,x$$

ist, ist aber

$$\frac{d\,x}{2\sqrt{r^2 - y_0^2}}, \text{ wenn } |x_0| < \sqrt{r^2 - y_0^2}, \text{ sonst } 0;$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß, ohne daß man etwas von $y$ weiß,

$$x_0 < x < x_0 + d\,x$$

ist, beträgt

$$2\,d\,x\frac{\sqrt{r^2 - x_0^2}}{\pi\,r^2}, \text{ wenn } |x_0| < r, \text{ sonst } 0;$$

ganz entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für $y$ bei unbekanntem $x$

$$2\,d\,y\frac{\sqrt{r^2 - y_0^2}}{\pi\,r^2}, \text{ wenn } |y_0| < r, \text{ sonst } 0.$$

Das Produkt der beiden letzten Ausdrücke ist keineswegs gleich der Wahrscheinlichkeit (36), $x$ und $y$ sind somit statistisch nicht unabhängig. Will man für das Innere des Kreises statistisch unabhängige Veränderliche haben, so muß man, wie leicht einzusehen, zu Polarkoordinaten übergehen, die vom Mittelpunkt des Kreises aus gerechnet werden.

Beschränken wir aber durch ein Ordnungsprinzip den Bereich für $x$ und $y$ auf ein Rechteck im Innern jenes Kreises, dessen Begrenzungen durch die Gleichungen $x = \pm a$, $y = \pm b$ gegeben sind, so finden wir als Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig

$$x_0 < x < x_0 + d\,x_0 \quad \text{und} \quad y_0 < y < y_0 + d\,y_0$$

den Wert

$$\frac{d\,x\,d\,y}{a\,b}, \text{ wenn } |x_0| < a \text{ und } |y_0| < b, \text{ sonst } 0;$$

die Wahrscheinlichkeit, daß bei bekannten oder unbekanntem $y$

$$x_0 < x < x_0 + d\,x_0$$

ist, beträgt

$$\frac{d\,x}{2\,a}, \text{ wenn } |x_0| < a, \text{ sonst } 0;$$

und die entsprechende Wahrscheinlichkeit für $y$ ist

$$\frac{d\,y}{2\,b}, \text{ wenn } |y_0| < b, \text{ sonst } 0.$$

Es sind also die Veränderlichen $x$ und $y$, die ursprünglich nicht unabhängig waren, durch Einführung eines Ordnungsprinzips statistisch unabhängig geworden.

### V. Ergebnis.

*Das Zusammenwirken noch so vieler, räumlich ungeordneter Schwingungszentren kann der Strahlung nicht den Grad von Ungeordnetheit verleihen, der zur statistischen Unabhängigkeit benachbarter Koeffizienten in den Fourierschen Reihen für die Strahlung notwendig wäre. Ist in Wirklichkeit eine solche Ungeordnetheit bei der Strahlung vorhanden, so beruht sie auf einer Ungeordnetheit in der Schwingung des einzelnen Resonators.*

Mit diesem Ergebnis stellen wir die folgenden Tatsachen zusammen:

1. Die theoretische Unmöglichkeit des Jeansschen Strahlungsgesetzes beruht darauf, daß die wellentheoretisch berechnete Zahl der Freiheitsgrade der Strahlung[1]) zu groß ist, und zwar besonders für hohe Schwingungszahlen und niedrige Temperaturen, d. h. geringe Energien.

2. Nach der von Einstein aus der Quantentheorie abgeleiteten Formel[2]) sind die Schwankungen der Strahlung größer, als es der Zahl der wellentheoretisch berechneten Freiheitsgrade entspricht; es sieht rein qualitativ so aus, als hätte man wenigstens für schwache Schwingungen diese Zahl zu groß angesetzt.

3. Schon die Plancksche Hypothese der Energiestufen für den einzelnen linearen Resonator bedeutet eine Beschränkung des einen Freiheitsgrades, den dieser hat; eine Beschränkung, die freilich mit wachsender Energie immer bedeutungsloser wird.

Wir knüpfen daran die Frage: Gibt es vielleicht ein Naturgesetz, das die höchste denkbare Ungeordnetheit in der Schwingung des einzelnen Resonators erst bei großen Energiebeträgen zuläßt und infolgedessen die Zahl der Freiheitsgrade bei der Strahlung im allgemeinen unter das wellentheoretische Maß

---

1) J. H. Jeans, Phil. Mag. **10**. p. 91. 1905. — M. Laue, Ann. d. Phys. **44**. p. 1197. 1914.

2) A. Einstein, La théorie du rayonnement et les quanta, rapports et discussions de la réunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911 sous les auspices de M. E. Solvay, p. 419ff.; M. Laue, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**. p. 198. 1915.

herabsetzt? Der für die Quantentheorie kennzeichnende Quotient aus dem Produkt des Planckschen *h* mit der Schwingungszahl und aus der Energie müßte dann vermutlich ein Maß für die Geordnetheit abgeben.[1])

Nun gibt es sicherlich eine große Reihe von Einwänden gegen diese Vermutung, die sich erst entkräften ließen, wenn es gelänge, sie mathematisch zu formulieren und Folgerungen aus ihr zu ziehen. Vorläufig mag aber schon auf einen Einwand gegen die Vereinbarkeit der Quantentheorie mit der sonstigen theoretischen Physik hingewiesen werden, der durch ein solches Ordnungsgesetz sofort beseitigt wäre. Betrachten wir nämlich in einem von vollkommen spiegelnden Wänden abgeschlossenen Hohlraum die Strahlung im Gleichgewicht mit einem System Planckscher Resonatoren, so mußte man bisher eine proportionale Vergrößerung aller Schwingungsamplituden (bei der Strahlung und den Resonatoren) ohne sonstige Veränderung, also eine Erhöhung der Energie ohne die Wiensche Spektralverschiebung, für möglich erklären.[2]) Die Einführung eines von der Energie abhängigen Ordnungsgesetzes macht diese Vergrößerung unmöglich.

Frankfurt, Juni 1915.

---

1) *Zusatz bei der Korrektur*: Ganz ähnlich äußert sich W. Wien, (Festrede „Über die Ziele und Methoden der theoretischen Physik“ zur Feier des 332jährigen Bestehens der Universität Würzburg, gehalten am 11. Mai 1914): „Wie nun auch die Theorie des Atoms und ihre Beziehung zu den Energieelementen sich in Zukunft gestalten mag, eines muß man doch vor allem im Auge behalten, daß diese Energieelemente nur durch die Statistik eingeführt sind. Und man kann die Ergebnisse der Theorie auch so deuten, daß die Unordnung in den Molekularbewegungen, wie sie durch die Wärmebewegung hervorgerufen wird, nur bei sehr hohen Temperaturen eine vollständige ist, sonst aber in einer von der Schwingungszahl abhängigen Weise mit der Temperatur die Bewegung in eine vollständig geordnete übergeht. Die gewöhnliche Wahrscheinlichkeitsrechnung können wir auf molekulare Vorgänge nur anwenden, wenn wir nach dem Satz vom zureichenden Grund jede Abweichung von der völligen Unregelmäßigkeit leugnen. Wenn aber in der Natur der Molekularbewegungen irgendwelche Regelmäßigkeiten liegen, so kann die Anwendung der gewöhnlichen Statistik versagen . . .“

2) Nach einer mündlichen Mitteilung von A. Einstein.

(Eingegangen 17. Juni 1915.)