Geometria differenziale delle congruenze rettilinee.

Di

Gustavo Sannia a Torino.

---

§ 1.

Le forme fondamentali della congruenza.

La geometria differenziale dei sistemi ∞^2 di raggi (*congruenze*) ha fatto non grandi progressi dopo la pubblicazione della classica memoria di Kummer*); per convincersene basta paragonarli a quelli ben più rapidi ed importanti conseguiti dalla teoria dei sistemi ∞^2 di punti. Ciò è dovuto certamente alla maggiori difficoltà che presenta lo studio dello spazio rigato; ma non credo infondato il sospetto che possa anche esser dovuto in parte alla poca efficacia dei metodi fin qui adoperati.

Ed è perciò che io mi permetto di richiamare l'attenzione dei Geometri sopra alcuni recenti lavori**), nei quali ho posto i fondamenti di un metodo forse fecondo. Esso consiste nel ridurre lo studio delle congruenze rettilinee allo studio di una coppia di forme differenziali quadratiche, ed è quindi perfettamente analogo al metodo di Gauss per lo studio delle superficie.

Esso in sostanza non è del tutto nuovo, chè già il Kummer si propose lo stesso scopo. Ma una delle forme quadratiche da lui introdotte è poco conveniente per varie ragioni, che ho esposte nei lavori citati. Qui ne addurrò una sola, ma che è essenziale: *ad una stessa coppia di forme di Kummer corrispondono infinite congruenze ben distinte.*

Ciò premesso, riassumerò le parti fondamentali del nuovo metodo, senza insistere nei particolari e tralasciando le dimostrazioni.

Per definire analiticamente una congruenza di raggi consideriamo una *superficie di partenza* che incontri ogni raggio g della congruenza in

---

*) *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* (Crelles Journal, 57, 1859).

**) *Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee* (Annali di Matematica, T. 15, serie III, 1908), *Nuove formule utili per lo studio delle congruenze rettilinee* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 44, 1909); *Sull' inviluppata media di una congruenza di rette* (in corso di stampa, ibid. 45, 1910).

un punto M e diamo le coordinate x, y, z di M ed i coseni direttori X, Y, Z di g in funzione di due parametri u, v.

Il punto $M'(X, Y, Z)$ della sfera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

è l'immagine sferica di g e, variando u e v, descrive *l'immagine sferica della congruenza.* Supporremo sempre che questa non si riduca ad una linea.

L'angolo infinitesimo ds' dei due raggi infinitamente vicini $g(u, v)$, $g'(u + du, v + dv)$ non è che l'arco elementare sferico, ed è quindi definito dalla forma quadratica differenziale

$$ds'^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

ove

$$E = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}, \quad G = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2. \tag{1'}$$

La (1) *ha la curvatura* $+1$ *ed è definita,* essendo

$$EG - F^2 > 0.$$

La diremo *prima forma fondamentale* della congruenza.

Detta poi $d\sigma$ la minima distanza tra g e g', sarà $\mu = d\sigma\, ds'$ il *momento* dei raggi g e g', e sarà espresso da una forma quadratica

$$-\mu = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \tag{2}$$

che diremo *seconda forma fondamentale* della congruenza. I suoi coefficienti (e λ) sono funzioni di u, v definite dalle formole:

$$\left\{\begin{aligned} D &= \frac{1}{\Delta}\left(F\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - E\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right), \\ D' + \lambda &= \frac{1}{\Delta}\left(F\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - E\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \\ D' - \lambda &= \frac{1}{\Delta}\left(G\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - F\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right), \\ D'' &= \frac{1}{\Delta}\left(G\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - F\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

ove Δ è il valor positivo del radicale $\sqrt{EG - F^2}$.

§ 2.

Angolo. Parametro distributore.

Il punto Q ove la comune perpendicolare $d\sigma$ a g e g' incontra g ed il piano $g\,d\sigma$ sono il *punto centrale* ed il *piano centrale* di g relativi a g'. Q è un punto della linea di stringimento per ogni rigata della congruenza contenente g e g'. Tali rigate si toccano in ogni punto di g, perchè in ciascuno di essi hanno a comune il piano tangente: questo piano nel punto Q è il piano centrale e in ogni altro punto di g si può determinare con la nota *legge di Chasles* sulla distribuzione dei piani tangenti

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{t}{p},$$

ove t è l'ascissa del punto rispetto al punto centrale, Θ è l'angolo del piano tangente corrispondente col piano centrale e p è il *parametro distributore*

$$p = \frac{d\sigma}{ds'} = -\frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{3}$$

Considerando due rigate della congruenza passanti per g e rispettivamente per due raggi infinitamente vicini

$$g'(u + du,\ v + dv), \quad g''(u + \delta u,\ v + \delta v),$$

diremo *angolo delle due rigate in* g l'angolo dei corrispondenti piani centrali, ossia l'angolo che formano tra loro le minime distanze $d\sigma$ e $\delta\sigma$ di g da g' e g''. Si vede facilmente che l'angolo di due rigate è eguale all' angolo delle loro immagini sferiche, ed è quindi dato dalla formola

$$\cos(d\sigma, \delta\sigma) = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)(E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2)}}.$$

§ 3.
Indicatrice. Rigate notevoli.

L'espressione (3) di p è identica a quella della curvatura delle sezioni normali di una superficie in un suo punto, e però dà luogo a considerazioni analoghe che ci limiteremo ad accennare.

p è costante in quei raggi nei quali risulta

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}$$

e che diremo *circolari*.

In ogni altro caso varia col rapporto $du:dv$, ossia col piano centrale, ed ammette un valor massimo ed un valor minimo p_1 e p_2, che chiameremo *parametri distributori principali*.

Sono principalmente importanti le due seguenti funzioni di essi

$$K = p_1 p_2, \quad H = p_1 + p_2$$

che diremo *parametro assoluto* e *parametro medio* della congruenza in g. Essi si esprimono in funzione dei coefficienti delle due forme fondamentali mediante le formole

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2},$$

e però sono due invarianti algebrici simultanei delle due forme.

Noti p_1 e p_2, ogni altro valore di p può dedursi dalla formola

$$p = p_2 \cos^2\Theta + p_1 \operatorname{sen}^2\Theta, \tag{4}$$

ove Θ è l'angolo che il piano centrale corrispondente a p fa con quello corrispondente a p_2.

Questa formola, come quella di Eulero per le curvature delle sezioni normali di una superficie, conduce nel modo più naturale al concetto di *indicatrice*.

In un punto qualunque C di g conduciamo il piano π normale a g, consideriamo su questo piano le tracce dei piani centrali passanti per g e su ciascuna traccia portiamo il segmento

$$CP = \frac{1}{\sqrt{|p|}}.$$

Il luogo dei punti P è l'indicatrice.

Essa è una ellisse nei raggi in cui $K > 0$, e che diremo *ellittici;* è una coppia di iperboli coniugate nei raggi in cui $K < 0$, e che diremo *iperbolici*.

In generale, in ogni congruenza esiste una regione di raggi ellittici ed una di raggi iperbolici, confinanti con una rigata di *raggi parabolici* nei quali è $K = 0$.

Diremo *superficie distributrice* ogni rigata della congruenza i cui piani centrali hanno per traccia sul piano π un asse dell' indicatrice. In ogni congruenza si ha dunque un doppia sistema ortogonale sempre reale di superficie distributrici, di equazione differenziale

$$\Theta = \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'dv & D'du + D''\,dv \end{vmatrix} = 0,$$

il cui primo membro è il covariante simultaneo delle due forme fondamentali. Assumendole come rigate coordinate u, v, si ha $F = 0$, $D' = 0$.

Diremo *superficie asintotica* ogni rigata della congruenza i cui piani centrali hanno per traccia su π un asintoto dell' indicatrice.

Essa è una sviluppabile, perchè in ogni suo raggio è $p = 0$. In ogni congruenza si ha dunque un doppio sistema di sviluppabili, di equazione differenziale

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''dv^2 = 0.$$

Esse però sono reali solo nelle regioni dei raggi iperbolici; sono immaginarie nelle regioni dei raggi ellittici. Assumendole come rigate coordinate u, v, risulta $D = D'' = 0$.

Ed ora si capisce come si possano definire i doppi sistemi *coniugati* di rigate.

Diremo infine *superficie principali* della congruenza quelle rigate i cui piani centrali bisecano uno degli angoli formati dai piani centrali delle superficie distributrici. Esse formano un doppio sistema ortogonale sempre reale.

§ 4.

Superficie luoghi di punti centrali.

Consideriamo una rigata della congruenza passante per g e g'. Per conoscere il punto centrale Q di g relativo a g', basta conoscere l'ascissa $r = MQ$ su g rispetto al punto M ove g seca la superficie di partenza della congruenza. Quest' ascissa è data dalla formola

$$r = \frac{[FD - E(D' - \lambda)]\,du^2 + (GD - ED'' + 2F\lambda)\,du\,dv + [G(D' + \lambda) - FD'']\,dv^2}{\Delta(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)}$$

λ è una funzione nota definita dalle (2).

In particolare, si trova che *i punti centrali di g relativi alle due superficie distributrici coincidono in un unico punto Q_0 di ascissa*

$$r_0 = \frac{\lambda}{\Delta}.$$

Questo punto dicesi *punto medio* del raggio. *Superficie media* della congruenza è il luogo dei punti medii dei suoi raggi. Essa è il luogo delle linee di stringimento di tutte le superficie distributrici della congruenza. Assumendola come superficie di partenza, risulta $\lambda = 0$.

Ottenuto il punto medio, si può ottenere ogni altro punto centrale di g mediante la formola

$$r = r_0 + \frac{1}{2}(p_1 - p_2)\,\mathrm{sen}\,2\Theta, \tag{5}$$

ove Θ è l'inclinazione della correspondente rigata sulla rigata distributrice di parametro p_2.

I valori estremi di r

$$r_1 = r_0 + \frac{1}{2}(p_1 - p_2), \quad r_2 = r_0 - \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$$

si hanno per $\Theta = \pm \frac{\pi}{4}$, dunque: *i punti centrali corrispondenti alle superficie principali hanno per ascisse i valori estremi di r; tutti gli altri punti centrali cadono nell' interno del segmento da essi determinato.* Perciò si chiamano i *punti limiti* del raggio. La loro distanza è

$$2l = |p_1 - p_2| = \sqrt{H^2 - 4K}.$$

Il luogo dei punti limiti è una superficie a due falde, ciascuna delle quali si chiama una *superficie limite* della congruenza.

Dalle (4) e (5) risulta, eliminando Θ,

$$(r - r_0)^2 + p^2 - Hp + K = 0.$$

In particolare, per $p=0$, si ha che *i punti centrali relativi alle sviluppabili sono simmetrici rispetto al punto medio Q_0 ed hanno per ascisse*

$$r = r_s \pm \sqrt{-K}.$$

Si dicono i *fuochi* del raggio. La loco distanza è $2\sqrt{-K}$. Ciascun fuoco genera una *superficie focale*, luogo degli spigoli di regresso delle sviluppabili di uno dei due sistemi.

L'angolo φ dei *piani focali* (piani tangenti alle superficie focali nei punti di contatto col raggio g) è definito da

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{2\sqrt{-K}}{\sqrt{H^2-4K}}, \quad \cos\varphi = \frac{H}{\sqrt{H^2-4K}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{-K}}{H}.$$

§ 5.
Congruenze notevoli.

Le congruenze *normali*, cioè i cui raggi sono normali ad una superficie, sono caratterizzate da $H=0$.

Le congruenze i cui raggi son tutti parabolici son quelle costituite dalle tangenti ad un sistema di asintotiche di una superficie. Esse sono caratterizzate da $K=0$.

Congruenze *isotrope* son quelle i cui raggi son tutti circolari e son caratterizzate da

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}.$$

§ 6.
Teorema fondamentale.

a) *Date le due forme differenziali quadratiche*

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \end{cases}$$

la prima delle quali definita ed a curvatura $+1$, *affinchè esse sieno rispettivamente la prima e la seconda forma fondamentale di una congruenza è necessario e sufficiente che tra i loro coefficienti passi l'unica relazione*

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{221}}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right)\right\} = H,$$

ove si è posto per brevità

$$b_{112} = \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} D + \left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right) D' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} D'',$$

$$b_{221} = \frac{\partial D''}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} D + \left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right) D' - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} D''.\text{*)}$$

*) b_{112} e b_{221} sono i coefficienti distinti e non nulli di una certa forma trilineare

La corrispondente congruenza è individuata.

b) *Ad ogni funzione r_0 di u, v, assegnata ad arbitrio, corrisponde una superficie di partenza per la congruenza. Note X, Y, Z in funzione di u, v, essa si ottiene mediante quadrature con le formole*

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left(\dfrac{D'}{\Delta} - r_0\right)\dfrac{\partial X}{\partial u} - \dfrac{D}{\Delta}\dfrac{\partial X}{\partial v} + \left(\dfrac{b_{112}}{\Delta} - \dfrac{\partial r_0}{\partial u}\right) X, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{D''}{\Delta}\dfrac{\partial X}{\partial u} - \left(\dfrac{D'}{\Delta} + r_0\right)\dfrac{\partial X}{\partial v} - \left(\dfrac{b_{221}}{\Delta} + \dfrac{\partial r_0}{\partial v}\right) X \end{cases}$$

e le analoghe in y e z.

In particolare, assumendo

$$r_0 = 0 \quad \text{o} \quad r_0 = \pm\sqrt{-K}, \quad \text{o} \quad r_0 = \pm\sqrt{H^2 - 4K},$$

si hanno rispettivamente la superficie media, le superficie focali, le superficie limiti.

Per brevità non ci fermeremo a dimostrare che dalla (II) si possono dedurre i notissimi teoremi di Malus-Dupin e di Beltrami sulle congruenze normali ed altri, in un certo senso, più generali. Nè ci fermeremo a considerare il caso, particolarmente notevole, delle congruenze normali, e del modo come si possono ritrovare le formole di Codazzi per le superficie ortogonali ai raggi. Infine non ci fermeremo ad esaminare tutti i semplici e notevoli aspetti che prende il teorema fondamentale, quando come rigate coordinate u, v si assumono le superficie distributrici, le sviluppabili, ecc.

§ 7.

Coordinate radiali.

Una congruenza si può anche definire dando le sei coordinate radiali di un raggio

$$X,\ Y,\ Z,\ l,\ m,\ n$$

in funzione di due parametri u, v legate dalle relazione

$$Xl + Ym + Zn = 0.$$

Precisamente assumeremo

$$l = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix},$$

dove x, y, z sono le coordinate di un punto qualunque del raggio.

I coefficienti delle due forme fondamentali si calcoleranno facilmente mediante le (1') e le altre

covariante rispetto al sistema delle due forme (I). I simboli $\left\{\begin{matrix} rs \\ t \end{matrix}\right\}$ sono i noti simboli di Christoffel costruiti con i coefficienti della prima forma (I).

$$-D=\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u},\quad -2D'=\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v}+\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u},\quad -D''=\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial v},$$

essendo

$$-\mu=\sum dl\,dX.$$

Viceversa: date le due forme fondamentali, le X, Y, Z si calcoleranno integrando un' equazione di Riccati ed l, m, n integrando il sistema illimitatamente integrabile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 l}{\partial u^2}=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial l}{\partial u}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial l}{\partial v}-El+2D\ X+A_{111}\dfrac{\partial X}{\partial u}+A_{112}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 l}{\partial u\,\partial v}=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial l}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial l}{\partial v}-Fl+2D'\ X+A_{121}\dfrac{\partial X}{\partial u}+A_{122}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 l}{\partial v^2}=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial l}{\partial u}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial l}{\partial v}-Gl+2D''X+A_{221}\dfrac{\partial X}{\partial u}+A_{222}\dfrac{\partial X}{\partial v} \end{cases}$$

e gli analoghi in m, Y ed in n, Z.

I simboli a tre indici $A_{111}, \cdots$ sono certe funzioni note dei coefficienti delle due forme fondamentali e delle loro derivate parziali prime, che non trascriviamo per brevità.

E non trascriviamo altre relazioni pure interessanti.

Per finire consideriamo il determinante

$$\begin{vmatrix} D & A_{111} & A_{112} \\ D' & A_{121} & A_{122} \\ D'' & A_{221} & A_{222} \end{vmatrix}.$$

Esso è un invariante differenziale simultaneo delle due forme fondamentali che ha un importante significato geometrico: *il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè la congruenza individuata dalle due forme* (I) *sia una congruenza W* (ossia una congruenza sulle cui falde focali si corrispondano le asintotiche).

Nota. Quanto precede credo che sia sufficiente a provare che questo metodo ha sugli altri il vantaggio di ridurre al minimo gli elementi indispensabili per individuare e studiare una congruenza: questi elementi sono le forme (I) ed hanno un significato geometrico che non dipende da elementi estranei alla congruenza.

Esso è anche applicabile allo studio dei sistemi ∞^3 di rette (*complessi*).

Torino, 10 luglio 1909.