

SU DUE FORME DIFFERENZIALI CHE INDIVIDUANO UNA CONGRUENZA O UN COMPLESSO DI RETTE.

Nota II^a di **Gustavo Sannia** (Torino).

Adunanza del 23 aprile 1911.

I. In una precedente Nota, recante lo stesso titolo ¹⁾, detti nuove risoluzioni di alcuni problemi che sono fondamentali nella geometria differenziale delle congruenze e dei complessi di rette. Or queste risoluzioni, più semplici di altre già note, ammettono una notevolissima semplificazione.

Consideriamo il risultato ottenuto nel n° 5, dal quale poi si deducono tutti gli altri:

I coefficienti della seconda forma fondamentale

$$(\beta) \quad -\mu = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$$

della più generale congruenza di rette avente come prima forma fondamentale una assegnata forma quadratica di curvatura 1

$$(\alpha) \quad ds'^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad ^2)$$

hanno le espressioni seguenti

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}D = \frac{\partial A}{\partial u} - \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 1 \end{array} \right\} A - \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 2 \end{array} \right\} B, \\ D' = \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} - 2 \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\} A - 2 \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 2 \end{array} \right\} B - \rho \Delta, \quad (\Delta = \sqrt{EG - F^2}), \\ \frac{1}{2}D'' = \frac{\partial B}{\partial v} - \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 1 \end{array} \right\} A - \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 2 \end{array} \right\} B, \end{array} \right.$$

ove A, B sono funzioni del tutto arbitrarie e ρ è una soluzione qualunque dell'equazione di LAPLACE:

$$(II) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 2 \end{array} \right\} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\} + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 2 \end{array} \right\} + F \right] \rho = 0.$$

¹⁾ Questi Rendiconti, tomo XXXI (1° semestre 1911), pp. 244-256.

²⁾ Detti X, Y, Z i coseni direttori del raggio (u, v) , si ha

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

quindi (α) è il quadrato dell'elemento lineare della *immagine sferica* della congruenza, sulla sfera che ha per centro l'origine e per raggio 1. Data (α) la determinazione di X, Y, Z dipende da un'equazione di RICCATI.

Note le funzioni X, Y, Z di u, v ³⁾, le coordinate x, y, z del punto medio dei raggi della congruenza si determinano con quadrature mediante le formole

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{D'}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{b_{112}}{\Delta} X, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{D''}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D'}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{b_{221}}{\Delta} X \end{cases}$$

e le analoghe in y, z , ove

$$(IV) \quad \begin{cases} \frac{b_{112}}{\Delta} = -\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) \right] + 2 \frac{FA - EB}{\Delta} + \frac{\partial \rho}{\partial u} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \rho, \\ \frac{b_{221}}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) \right] + 2 \frac{FB - GA}{\Delta} + \frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \rho. \end{cases}$$

Come si vede, tutto dipende dalla integrazione della (II), ad ogni soluzione della quale corrispondono infinite congruenze (per la arbitrarietà delle funzioni A, B) aventi l'assegnata prima forma fondamentale (α). Ciò vale in particolare per la evidente soluzione $\rho = 0$. Ora io dimostrerò che le congruenze che corrispondono ad una qualunque altra soluzione di (II) (diversa da 0) coincidono con quelle che corrispondono alla soluzione $\rho = 0$.

In tal modo il problema della determinazione delle congruenze aventi una data prima forma (α) viene ridotto a quadrature.

2. Premettiamo un lemma.

Se eseguiamo un cambiamento di variabili

$$u = u(u', v'), \quad v = v(u', v'),$$

la forma quadratica (α) e la forma lineare

$$(\gamma) \quad A du + B dv$$

si trasformano in altre dello stesso tipo

$$(\alpha') \quad E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2,$$

$$(\gamma') \quad A' du' + B' dv'.$$

Se i coefficienti della forma quadratica (β) sono formati con quelli di (α) e (γ) secondo la legge seguente

$$(I') \quad \begin{cases} \frac{1}{2} D = \frac{\partial A}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} A - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} B, & D' = \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} A - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} B, \\ \frac{1}{2} D'' = \frac{\partial B}{\partial v} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} A - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} B, \end{cases}$$

anche i coefficienti della forma trasformata (β') di (β) saranno formati con quelli di (α') e (γ') secondo la stessa legge.

³⁾ Cfr. ²⁾.

In altre parole: la forma (5), con i coefficienti espressi dalle (I'), è covariante al sistema delle due forme (α) e (γ).

Per dimostrarlo nel modo più rapido, cambiamo per poco le notazioni, ponendo:

$$u = x_1, \quad v = x_2, \quad A = A_1, \quad B = A_2, \\ E = a_{11}, \quad F = a_{12} = a_{21}, \quad G = a_{22}.$$

Allora le (α) e (γ) diventano

$$(1) \quad \sum_{r,s} a_{rs} dx_r dx_s, \quad \sum_r A_r dx_r \quad (r, s = 1, 2)$$

e per effetto della trasformazione

$$(2) \quad x_r = x_r(x'_1, x'_2) \quad (r = 1, 2)$$

si mutano in altre dello stesso tipo

$$(1') \quad \sum_{r,s} a'_{rs} dx'_r dx'_s, \quad \sum_r A'_r dx'_r.$$

Precisamente

$$(3) \quad A'_r = \sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_r},$$

da cui

$$\frac{\partial A'_r}{\partial x'_s} = \sum_{i,h} \frac{\partial A_i}{\partial x_h} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} + \sum_i A_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_s},$$

eliminando le derivate seconde mediante le note formole di CHRISTOFFEL

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_s} = \sum_{\mu} \left\{ \begin{matrix} rs \\ \mu \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x_i}{\partial x'_\mu} - \sum_{i,h} \left\{ \begin{matrix} ih \\ t \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \quad 4),$$

si ha

$$\frac{\partial A'_r}{\partial x'_s} = \sum_{i,h} \frac{\partial A_i}{\partial x_h} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} + \sum_{i,\mu} \left\{ \begin{matrix} rs \\ \mu \end{matrix} \right\}' A_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_\mu} - \sum_{i,i,h} \left\{ \begin{matrix} ih \\ t \end{matrix} \right\} A_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial x'_s}$$

o, per le (3),

$$\frac{\partial A'_r}{\partial x'_s} - \sum_{\mu} \left\{ \begin{matrix} rs \\ \mu \end{matrix} \right\}' A'_\mu = \sum_{i,h} \frac{\partial A_i}{\partial x'_h} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} - \sum_{i,i,h} \left\{ \begin{matrix} ih \\ t \end{matrix} \right\} A_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial x'_s};$$

infine, scambiando gli indici i, t nell'ultima somma, si ha

$$\frac{\partial A'_r}{\partial x'_s} - \sum_{\mu} \left\{ \begin{matrix} rs \\ \mu \end{matrix} \right\}' A'_\mu = \sum_{i,h} \left\{ \frac{\partial A_i}{\partial x_h} - \sum_i \left\{ \begin{matrix} th \\ i \end{matrix} \right\} A_i \right\} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial x'_s}.$$

Queste formole mostrano che, se alla forma quadratica

$$(4) \quad \sum_{r,s} \left(\frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \sum_{\mu} \left\{ \begin{matrix} rs \\ \mu \end{matrix} \right\}' A'_\mu \right) dx_r dx_s,$$

4) ove i simboli $\left\{ \begin{matrix} ih \\ t \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} rs \\ \mu \end{matrix} \right\}'$ si intendono formati rispettivamente con i coefficienti delle forme quadratiche (1) e (1'). Cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 2ª edizione (Pisa, Spoerri), vol. I (1902), p. 64.

si applica la trasformazione (2), si ha la forma

$$\sum_{r,s} \left(\frac{\partial A'_r}{\partial x'_s} - \sum_{\mu} \{rs\}' A'_\mu \right) dx'_r dx'_s,$$

ossia che la forma (4) è covariante al sistema (1). Ritornando alle primitive notazioni, si vede subito che la (4) coincide con la (3), quando i coefficienti di (3) sieno definiti dalle (1'). Con ciò il lemma è dimostrato.

3. Or passiamo a dimostrare quanto abbiamo asserito in fine del n° 1, cioè che le (1'), che si deducono dalle (1) ponendovi $\rho = 0$, danno i coefficienti della seconda forma (3) della più generale congruenza di rette avente (α) come prima forma.

Supponiamo che ciò sia stato dimostrato per una particolare forma (α) (di curvatura 1), sicchè (α) e (3), con i coefficienti (1'), determinino la più generale congruenza di rette. Se eseguiamo un qualsiasi cambiamento di variabili

$$u = u(u', v'), \quad v = v(u', v'),$$

le forme trasformate (α') e (3') rappresenteranno ancora la più generale congruenza di rette e, in virtù del lemma, i coefficienti di (3') saranno formati con i coefficienti di (α') (e con due funzioni A' , B') secondo la medesima legge (1'); dunque quel che si è ammesso per la particolare forma (α) vale anche per (α'). Ma, con una trasformazione di variabili, si può passare da una forma quadratica di curvatura 1 a qualunque altra (avente la stessa curvatura 1); dunque quel che si è ammesso per (α) vale per ogni forma quadratica di curvatura 1.

Ora è facile verificare che la cosa sussiste per la particolare forma di curvatura 1

$$(5) \quad ds'^2 = \frac{4 du dv}{(uv + 1)^2},$$

che rappresenta ⁵⁾ il quadrato dell'elemento lineare della sfera di raggio 1 riferita ai parametri u , v (complessi coniugati) delle sue linee di lunghezza nulla. Qui, essendo

$$E = G = 0, \quad F = \frac{2}{(uv + 1)^2}, \quad \Delta = \frac{2i}{(uv + 1)^2},$$

si ha ⁶⁾

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0,$$

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{2v}{uv + 1}, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{2u}{uv + 1};$$

quindi le (I) e (II) diventano

$$(6) \quad \frac{1}{2} D = \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{2vA}{uv + 1}, \quad D' = \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{2i\rho}{uv + 1}, \quad \frac{1}{2} D'' = \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{2uB}{uv + 1},$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \frac{2\rho}{(uv + 1)^2} = 0.$$

⁵⁾ BIANCHI, loc. cit. 4), p. 110.

⁶⁾ BIANCHI, loc. cit. 4), p. 92.

Giusta il teorema del n° 1, possiamo affermare che le (6) definiscono i coefficienti della seconda forma fondamentale della più generale congruenza di rette avente la prima forma (5), ove A, B sono funzioni qualunque e ρ è una soluzione qualunque della (7), cioè una funzione del tipo

$$(8) \quad \rho = \frac{d\varphi(u)}{du} + \frac{d\psi(v)}{dv} - 2 \frac{\varphi(u)v + \psi(v)u}{uv + 1},$$

ove $\varphi(u), \psi(v)$ sono funzioni arbitrarie. Or vogliamo dimostrare che, fissate A, B, ρ in tal modo, si possono ottenere le stesse tre funzioni D, D', D'' mediante le (6) nelle quali si ponga $\rho = 0$ e per A e B due convenienti funzioni A', B' , ossia che si ha pure

$$(9) \quad \frac{1}{2}D = \frac{\partial A'}{\partial u} + \frac{2vA'}{uv+1}, \quad D' = \frac{\partial A'}{\partial v} + \frac{\partial B'}{\partial u}, \quad \frac{1}{2}D'' = \frac{\partial B'}{\partial v} + \frac{2uB'}{uv+1}.$$

Sottraendo rispettivamente (6) e (9) e ponendo

$$A - A' = A'', \quad B - B' = B'',$$

si tratta di dimostrare che possono coesistere le tre equazioni

$$\frac{\partial A''}{\partial u} + \frac{2vA''}{uv+1} = 0, \quad \frac{\partial A''}{\partial v} + \frac{\partial B''}{\partial u} = \frac{2i\rho}{uv+1}, \quad \frac{\partial B''}{\partial v} + \frac{2uB''}{uv+1} = 0.$$

Or le due estreme esigono che sia

$$A'' = \frac{V(v)}{(uv+1)^2}, \quad B'' = \frac{U(u)}{(uv+1)^2},$$

ove $U(u), V(v)$ sono funzioni arbitrarie, ed affinché sia soddisfatta la rimanente occorre e basta che si possano determinare le funzioni U, V in modo che sia

$$\frac{dU(u)}{du} + \frac{dV(v)}{dv} - 2 \frac{U(u)v + V(v)u}{uv+1} = 2i\rho.$$

Ricordando l'espressione (8) di ρ , si vede subito che lo scopo si raggiunge assumendo

$$U(u) = 2i\varphi(u), \quad V(v) = 2i\psi(v).$$

Raccogliendo, possiamo enunciare il seguente teorema fondamentale:

I coefficienti della seconda forma fondamentale (2) della più generale congruenza di rette avente come prima forma fondamentale (1) sono espressi dalle formole

$$(I') \quad \begin{cases} \frac{1}{2}D = \frac{\partial A}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} A - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} B, \\ D' = \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} A - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} B, \\ \frac{1}{2}D'' = \frac{\partial B}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} A - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} B, \end{cases}$$

ove A, B sono funzioni arbitrarie di u, v .

Note le funzioni X, Y, Z di u, v , le coordinate x, y, z del punto medio dei raggi

della congruenza si hanno con quadrature mediante le formole (III) e le analoghe in y, z , ove

$$(IV') \quad \begin{cases} \frac{b_{112}}{\Delta} = -\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) \right] + 2 \frac{FA - EB}{\Delta}, \\ \frac{b_{221}}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) \right] + 2 \frac{FB - GA}{\Delta}. \end{cases}$$

4. La grande semplificazione apportata al teorema fondamentale della Nota precedente si ripercuote in tutti gli altri teoremi della Nota stessa. Eccoli nella loro forma definitiva.

I coefficienti della seconda forma fondamentale

$$-\mu = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 + 2Mdudw + 2Ndvdw$$

del più generale complesso di rette avente (x) come prima forma fondamentale sono definiti dalle formole (I') e

$$M = \frac{\partial A}{\partial w}, \quad N = \frac{\partial B}{\partial w},$$

ove A e B sono funzioni arbitrarie di u, v, w .

Note le funzioni X, Y, Z di u, v , le coordinate di un punto di una retta generica del complesso si determinano con quadrature mediante le formole (III) e

$$\frac{\partial x}{\partial w} = 2 \frac{N}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - 2 \frac{M}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} \right) X$$

(con le analoghe in y e z), ove b_{112}, b_{221} hanno i valori (IV').

Così anche il problema della ricerca dei complessi aventi una data prima forma (x) è ridotta a quadrature.

5. Tornando alle congruenze, supponiamo tracciato sulla sfera un doppio sistema di linee (u, v) , e sia (x) il corrispondente elemento lineare sferico. La più generale congruenza di rette che ammette il dato sistema (u, v) come immagine sferica delle sue sviluppabili è definita dalle due forme quadratiche (x) e

$$-\mu = 2D'dudv,$$

ove

$$D' = \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} A - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} B$$

ed A, B sono due funzioni qualunque soddisfacenti il sistema

$$(10) \quad \frac{\partial A}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} A - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} B = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} A - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} B = 0.$$

Le coordinate del punto medio dei raggi della congruenza si hanno con quadrature dalle formole

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{D'}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial u} - \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D'}{\Delta} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{D'}{\Delta} \right] X, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{D'}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D'}{\Delta} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{D'}{\Delta} \right] X \end{aligned}$$

e dalle analoghe in y, z .

La risoluzione del problema dipende dall'integrazione del sistema (10) e questa a sua volta dipende in generale dalla risoluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo di LAPLACE, che si ottiene eliminando A o B dalle (10); dunque *in generale* questa risoluzione del problema non differisce sostanzialmente da quella data dal GUICHARD 7), la quale dipende dalla integrazione della (II).

Ma se uno almeno dei due dati sistemi sferici è costituito da circoli massimi, il sistema (10) si integra con sole quadrature. Perchè se per es. le v son circoli massimi (geodetiche), si ha $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ 8). In tal caso il cono direttore di una sviluppabile v si riduce al piano del circolo v , ossia ogni sviluppabile v è costituita dalle tangenti ad una curva piana.

Pure con quadrature si risolve il problema di *costruire le congruenze con assegnata immagine sferica di uno dei due sistemi di superficie sviluppabili*. Perchè, assunte queste immagini come linee u (e come linee v quelle di un altro sistema qualunque) l'equazione differenziale delle sviluppabili delle congruenze richieste dev'essere soddisfatta ponendovi $u = \text{costante}$; or questa equazione è 9)

$$-\mu = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = 0,$$

quindi dev'essere $D'' = 0$, per la terza delle (I'),

$$\frac{\partial B}{\partial v} - \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} A - \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} B = 0.$$

Per ogni coppia di funzioni A, B soddisfacenti questa equazione, le (I') danno i coefficienti della seconda forma fondamentale di una delle congruenze richieste.

6. Le linee sferiche u, v sieno ortogonali, quindi l'elemento lineare sferico abbia la forma

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

I coefficienti della seconda forma fondamentale della più generale congruenza avente le linee sferiche u, v come immagini delle superficie principali sono

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A}{\sqrt{E}} \right) + \frac{B}{2G} \frac{\partial E}{\partial v}, \\ D' &= E \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{A}{E} \right) + G \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{B}{G} \right), \\ D'' &= \sqrt{G} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B}{\sqrt{G}} \right) + \frac{A}{2E} \frac{\partial G}{\partial u}, \end{aligned}$$

ove A, B sono due funzioni qualunque soddisfacenti la relazione

$$(11) \quad G \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A}{\sqrt{EG}} \right) = E \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B}{\sqrt{EG}} \right).$$

7) Loc. cit. 1), n° 10.

8) BIANCHI, loc. cit. 4), § 87.

9) Infatti μ rappresenta il momento di due raggi vicinissimi della congruenza [cfr. Nota I^a, loc. cit. 1), n° 1].

Le coordinate del punto medio dei raggi si calcolano con quadrature mediante le formole (III) e le analoghe in y, z , ove

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{b_{112}}{\Delta} = -\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) \right] - 2B \sqrt{\frac{E}{G}}, \\ \frac{b_{221}}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) \right] - 2A \sqrt{\frac{G}{E}}. \end{cases}$$

7. La seconda forma fondamentale della più generale congruenza di rette avente le linee sferiche ortogonali u, v come immagini delle sue rigate medie è

$$\left[\sqrt{G} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A}{\sqrt{E}} \right) + \frac{B}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} \right] du^2 + \left[\sqrt{G} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B}{\sqrt{G}} \right) + \frac{A}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} \right] dv^2,$$

ove A, B sono due funzioni qualunque soddisfacenti la relazione

$$(13) \quad E \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{A}{E} \right) + G \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{B}{G} \right) = 0.$$

Le coordinate del punto medio dei raggi si calcolano con quadrature mediante le formole

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = - \left[\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A}{\sqrt{E}} \right) + \frac{B}{G\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right] \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{b_{112}}{\Delta} X, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \left[\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B}{\sqrt{G}} \right) + \frac{A}{E\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right] \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{b_{221}}{\Delta} X, \end{cases}$$

e le analoghe in y, z , ove $\frac{b_{112}}{\Delta}, \frac{b_{221}}{\Delta}$ hanno i valori (12).

8. Le coppie di funzioni A, B soddisfacenti la (11) o la (13) si hanno tutte con quadrature, dunque abbiamo ridotta a quadrature la risoluzione dei due ultimi problemi ¹⁰). Come abbiamo visto (n° 5) lo stesso non accade in generale pel problema di GUICHARD. Cadono quindi tutte le considerazioni fatte, nei n° 19 e 20 della Nota precedente, circa l'equivalenza analitica dei tre problemi; ma la caduta è provvidenziale!

Torino, 20 marzo 1911.

GUSTAVO SANNIA.

¹⁰) di BIANCHI e BURGATTI [cfr. Nota I^a, loc. cit. ¹), n° 14 e 17].