ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.
Band 205. Nr. 4912. 16.

Das Newtonsche Gesetz in nichteuklidischen Räumen. Von *J. Lense.*

(Auszug aus einer gleichbetitelten, in die Sitzungsber. d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien aufgenommenen Abhandlung.)

In einem während der Heidelberger Astronomenversammlung gehaltenen Vortrag über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes (V. J. S. d. A. G. 1900) kam *Schwarzschild* zu dem Resultat, daß bei Annahme eines hyperbolischen Raumes mit der konstanten Krümmung $-1/R^2$ der Krümmungsradius R mindestens 4 Millionen Erdbahnradien betragen müßte, dagegen bei Voraussetzung eines elliptischen Raumes mit der konstanten Krümmung $+1/R^2$ mindestens 100 Millionen, widrigenfalls Widersprüche mit feststehenden Tatsachen bezüglich der Parallaxen und Verteilung der Sterne entstünden. *W. Killing* übertrug in seiner Abhandlung »Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen«, Crellesches Journal f. Math. **98**, 1885, das Newtonsche Gesetz sinngemäß auf einen elliptischen Raum konstanter Krümmung, sodaß wie im euklidischen Raum durch konzentrische Kugelflächen immer derselbe Kraftfluß dringt. Er gelangte so zu dem Anziehungsgesetz $K = -\mu/(R^2 \sin^2 \varrho/R)$, wo μ und ϱ Massenfaktor und nichteuklidische Entfernung bedeuten. Unter dem Einfluß dieser Kraft beschreibt ein Körper im nichteuklidischen Raum ebenfalls einen Kegelschnitt ohne Perihelbewegung, der Flächensatz und das dritte Keplersche Gesetz werden entsprechend modifiziert.

Es entsteht nun die Frage, was wird aus der Zentralbewegung, wenn man entweder das Newtonsche Gesetz universell gelten läßt, also formell beibehält, d. h. die Kraft $-\mu/\varrho^2$ im elliptischen Raum konstanter Krümmung voraussetzt oder wohl einen euklidischen Raum annimmt, aber das Newtonsche Gesetz strenge nur für den elliptischen Raum in Geltung läßt? Die zweite Frage soll zuerst beantwortet werden.

Wir machen also folgende Annahme: Im euklidischen Raum erfolge die Zentralbewegung unter dem Einfluß der Anziehungskraft $K = -\mu/\varrho^2$ oder, da zwischen euklidischer Entfernung r und nichteuklidischer Entfernung ϱ die Beziehung $r/R = \sin \varrho/R$ besteht,

$$K = -\mu/[R^2(\operatorname{arc}\sin r/R)^2] .$$

Weil nach *Schwarzschild* $R \geqq 10^8$ Erdbahnradien ist, genügt eine Entwicklung bis auf Glieder der Ordnung $1/R^2$, daher

$$K = -\mu/r^2 + \mu/3R^2$$

welche Kraft sich von dem Potential

$$V = \mu/r + \mu r/3R^2$$

ableiten läßt. Zum Unterschied vom Newtonschen Potential μ/r tritt also noch eine Störungsfunktion $H = \mu r/3R^2$ auf, sodaß wir eine gestörte Keplersche Bewegung erhalten werden. Die störende Kraft wirkt in der Bahnebene, also bleibt diese erhalten, und wir haben nur die Störungen der übrigen Elemente zu berechnen. Bezeichnen wir, wie es gebräuchlich ist, große Halbachse, Exzentrizität, mittlere Länge der Epoche und des Perizentrums, mittlere tägliche Bewegung und exzentrische Anomalie mit a, e, L_0, ϖ, n, E, so gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} H &= (n^2a^4/3R^2)(1 - e\cos E) \\ \partial H/\partial L_0 &= (na^4/3R^2)\, e \sin E\, \mathrm{d}E/\mathrm{d}t \\ \partial H/\partial \varpi &= -(na^4/3R^2)\, e \sin E\, \mathrm{d}E/\mathrm{d}t \\ (\partial H/\partial a) &= (n^2a^3/3R^2)(1 - e\cos E) \\ \partial H/\partial e &= -(na^4/3R^2)(\cos E - e)\, \mathrm{d}E/\mathrm{d}t . \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Poissonschen Störungsgleichungen, die uns folgende Formeln liefern:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a/\mathrm{d}t &= (2/na)\,\partial H/\partial L_0 = (2a^3/3R^2)\, e \sin E\, \mathrm{d}E/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}L_0/\mathrm{d}t &= \{\sqrt{(1-e^2)}\,[1 - \sqrt{(1-e^2)}]/na^2e\}\cdot \partial H/\partial e - (2/na)\cdot \partial H/\partial a \\ &= -(a^2/3R^2)\,\{3 - \sqrt{(1-e^2)} + (1/e)\,[\sqrt{(1-e^2)} - (1+3e^2)]\cos E + e^2\cos 2E\}\cdot \mathrm{d}E/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}e/\mathrm{d}t &= -\{\sqrt{(1-e^2)}\,[1 - \sqrt{(1-e^2)}]/na^2e\}\cdot \partial H/\partial L_0 - [\sqrt{(1-e^2)}/na^2e]\,\partial H/\partial \varpi = (a^2/3R^2)(1-e^2)\sin E\, \mathrm{d}E/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}\varpi/\mathrm{d}t &= [\sqrt{(1-e^2)}/na^2e]\,\partial H/\partial e = -(a^2/3R^2e)\sqrt{(1-e^2)}\,(\cos E - e)\,\mathrm{d}E/\mathrm{d}t . \end{aligned}$$

Die Integration dieser Gleichungen ergibt folgende Elementenstörungen:

$$\begin{aligned} \Delta a &= -(2a^3/3R^2)\, e\cos E \\ \Delta L_0 &= -(a^2/R^2)\,\{[1 - {}^1/_3\sqrt{(1-e^2)}]\, nt \\ &\qquad + (1/3e)\,[(1-e^2)^{3/2} - 1]\sin E + {}^1/_6\, e^2 \sin 2E\} \\ \Delta e &= -(a^2/3R^2)(1-e^2)\cos E \\ \Delta\varpi &= (a^2/3R^2)\sqrt{(1-e^2)}\,[nt - (1/e)(1-e^2)\sin E] . \end{aligned}$$

Es treten also säkulare Störungsglieder nur bei L_0 und ϖ auf. Bedeuten U, c, h Umlaufszeit, Flächengeschwindigkeit und Energiekonstante, so folgt für die säkulare Störung von ϖ in der Zeiteinheit

$$\Delta\varpi = 2a^2\pi\sqrt{(1-e^2)}/3R^2U = c/3R^2$$

oder für einen halben Umlauf

$$\Delta\varpi = a^2\pi\sqrt{(1-e^2)}/3R^2 = \pi\mu c/3R^2h^{3/2} .$$

Die säkulare Perizentrumbewegung läßt sich auch ohne Anwendung der Poissonschen Störungsgleichungen nach einer Methode berechnen, die wir auch später verwenden werden und deshalb hier anführen wollen, nämlich mit Hilfe der Variationsrechnung. Aus der Theorie der Zentralbewegung erhalten wir als Differentialgleichung der Bahn, wenn wir mit φ die wahre Anomalie bezeichnen:

$$(c^2/r^4)(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi)^2 = -h + 2\mu/r - c^2/r^2 + 2\mu r/3R^2$$

oder, wenn $x = 1/r$ eingeführt wird,

$$c^2(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\varphi)^2 = -h + 2\mu x - c^2x^2 + 2\mu/3xR^2 .$$

Bekanntlich variiert x zwischen den beiden Wurzeln der Gleichung $\quad -h+2\mu x-c^2x^2+2\mu/3xR^2=0$
die sich von der analogen Gleichung bei der Keplerschen Bewegung durch das Glied $2\mu/3xR^2$, das von der Ordnung $1/R^2$ ist, unterscheidet; folglich werden auch die beiden Wurzeln unserer Gleichung von denen bei der Keplerschen Bewegung, nämlich von

$$(x_1)_0=1/a(1+e) \quad \text{und} \quad (x_2)_0=1/a(1-e)$$

nur um Größen der Ordnung $1/R^2$ verschieden sein und zwar, wie die näherungsweise Auflösung unserer Gleichung lehrt, um

$$\delta x_1=-a(1+e)/3eR^2 \quad \text{und} \quad \delta x_2=+a(1-e)/3eR^2\,.$$

Dabei wurden die Beziehungen

$$c^2/\mu=a(1-e^2) \quad \text{und} \quad c^2/h=a^2(1-e^2) \quad \text{benutzt.}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$-h+2\mu x-c^2x^2+2\mu/3xR^2=c^2N=c^2(N_0+\delta N)\,.$$

Es bewegt sich also das Perizentrum während eines halben Umlaufes um den Betrag

$$\Delta\varpi=\int_{x_1}^{x_2}N^{-1/2}\,\mathrm{d}x-\int_{(x_1)_0}^{(x_2)_0}N_0^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\delta\int_{x_1}^{x_2}N^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-{}^1\!/_2\int_{(x_1)_0}^{(x_2)_0}N_0^{-3/2}\,\delta N\,\mathrm{d}x+\lim_{x=(x_2)_0}N_0^{-1/2}\,\delta x_2-\lim_{x=(x_1)_0}N_0^{-1/2}\,\delta x_1$$

Nennen wir die drei Teile I, II, III, so wird

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{3a(1-e^2)R^2}\int_{(x_1)_0}^{(x_2)_0}\frac{\mathrm{d}x}{x\,N_0^{3/2}}$$

$$=-\frac{a}{3R^2}\int_{(x_1)_0}^{(x_2)_0}\left\{\frac{1-e}{2e[(x_2)_0-x]}+\frac{1+e}{2e[x-(x_1)_0]}-\frac{1}{x}\right\}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{N_0}}$$

wobei die beiden ersten Bestandteile des Integrals den Ausdrücken II und III gerade entgegengesetzt gleich sind, sodaß sich diese Glieder gegenseitig aufheben. Es bleibt daher nur

$$\Delta\varpi=(a/3R^2)\int_{(x_1)_0}^{(x_2)_0}x^{-1}N_0^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$

$$=[a^2\sqrt{(1-e^2)}/3R^2]\int_{(x_1)_0}^{(x_2)_0}x^{-1}[-1+2ax-a^2(1-e^2)x^2]^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-[a^2\sqrt{(1-e^2)}/3R^2]\int_{a(1+e)}^{a(1-e)}[-a^2(1-e^2)+2ar-r^2]^{-1/2}\,\mathrm{d}r$$

$$=a^2\pi\sqrt{(1-e^2)}/3R^2$$

wodurch das frühere Resultat bestätigt wird.

Gehen wir jetzt zur Beantwortung der ersten Frage über und nehmen wir infolgedessen einen elliptischen Raum von konstanter Krümmung an, in dem das Anziehungsgesetz $K=-\mu/\varrho^2$ Geltung haben soll. Unter Verwendung der Weierstraßschen Koordinaten für die Ebene, $\mathfrak{p}$, x, y, zwischen denen die Beziehung $R^2\mathfrak{p}^2+x^2+y^2=R^2$ besteht, lauten die Differentialgleichungen der Bewegung in diesem nichteuklidischen Raum, wenn wir den Ursprung ins Kraftzentrum verlegen,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\mathfrak{p}/\mathrm{d}t^2&=-K/q-v^2\mathfrak{p}/R^2+\mathfrak{p}(K/q)\sqrt{(1-q^2/R^2)}\\ \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2&=\qquad\;\; -v^2x/R^2+x(K/q)\sqrt{(1-q^2/R^2)}\\ \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2&=\qquad\;\; -v^2y/R^2+y(K/q)\sqrt{(1-q^2/R^2)}\end{aligned}$$

Dabei ist $\qquad q^2=x^2+y^2$
und $\qquad v^2=R^2(\mathrm{d}\mathfrak{p}/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2$
$(v=\text{Geschwindigkeit})$.

Die zweite und dritte der Differentialgleichungen liefern uns den Flächensatz $x\cdot\mathrm{d}y/\mathrm{d}t-y\cdot\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=c$, während wir den Energiesatz dadurch gewinnen, daß wir die Gleichungen der Reihe nach mit $R^2\,\mathrm{d}\mathfrak{p}/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ multiplizieren und dann addieren, wodurch wir ${}^1\!/_2\,\mathrm{d}(v^2)/\mathrm{d}t=-(R^2K/q)\cdot\mathrm{d}\mathfrak{p}/\mathrm{d}t$ erhalten. Setzen wir

$$K=-\mu/[R^2(\arcsin q/R)^2]=-\mu/q^2+\mu/3R^2$$

ein, und integrieren nach der Zeit, indem wir die Beziehung

$$R^2\mathfrak{p}^2+q^2=R^2$$

benutzen, so bekommen wir den Energiesatz in der Form

$$v^2=2\mu\,\mathfrak{p}/q+(2\mu/3R)\arccos\mathfrak{p}-h$$

oder mit Benutzung der aus den allgemeinen Gleichungen folgenden Relation $R^4(\mathrm{d}\mathfrak{p}/\mathrm{d}t)^2=v^2q^2-c^2$

$$R^4(\mathrm{d}\mathfrak{p}/\mathrm{d}t)^2=-h\,q^2+2\mu\,\mathfrak{p}\,q+(2\mu/3R^2)\,q^3-c^2$$

wenn $\arccos\mathfrak{p}=\arcsin q/R=q/R$ gesetzt wird, da wir nur bis auf Glieder der Ordnung $1/R^2$ entwickeln wollen. Wenden wir noch den Flächensatz in der Gestalt

$$q^2(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)=c$$

an und führen $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ statt $\mathrm{d}\mathfrak{p}/\mathrm{d}t$ ein, so lautet schließlich die Differentialgleichung der Bahn

$$(\mathrm{d}q/\mathrm{d}\varphi)^2=(q^4/c^2)(-h-c^2/q^2+2\mu\mathfrak{p}/q+\mu\mathfrak{p}/3R^2)(1-q^2/R^2)$$

oder, sobald die Variable $x=\mathfrak{p}/q$ substituiert wird,

$$(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\varphi)^2=-h/c^2-1/R^2+2\mu x/c^2-x^2+2\mu/3R^2c^2x\,.$$

Wird das letzte Glied der rechten Seite $2\mu/3R^2c^2x$ weggelassen, also das Anziehungsgesetz

$$K=-\mu/q^2=-\mu/(R^2\sin^2\varrho/R)$$

vorausgesetzt, so ist die Bahn eine Ellipse mit fixen Apsiden, deren große Halbachse a durch die Gleichung

$$\mathrm{tg}\,2a/R=2\mu/Rh$$

definiert ist, wie *Killing* gezeigt hat. Unsere Gleichung unterscheidet sich nur durch ein Glied der Ordnung $1/R^2$ von der *Killing*schen, daher wird die Bahn wie früher eine Ellipse mit beweglicher Apsidenlinie sein, bei der die Perizentrumbewegung ebenfalls von der Größenordnung $1/R^2$ ist. Die Methode der Variationsrechnung liefert uns für diese Perizentrumbewegung genau denselben Ausdruck wie im ersten Fall, nämlich für die Zeit eines halben Umlaufes

$$\Delta\varpi=\pi\mu c/3R^2h^{3/2}\,.$$

Genauer gesprochen gehört die Bahn zu den schlingenförmigen Kurven oder, wie man auch sagen kann, sich drehenden Ovalen der Zentralbewegung; sie unterscheidet sich von einer Ellipse nur um Glieder der Ordnung $1/R^2$ und der Winkel zwischen den Richtungen zum Peri- und Apozentrum beträgt $\pi+\Delta\varpi$.

Wollen wir die entsprechenden Formeln für den hyperbolischen Raum konstanter Krümmung haben, so brauchen wir nur überall iR statt R oder $-R^2$ statt $+R^2$ su setzen. Hier wird also die Perizentrumbewegung retrograd.

Aus Planetenbeobachtungen läßt sich über die Richtigkeit der gemachten Voraussetzungen keine Entscheidung fällen. Denn verlangen wir für ein Jahrhundert eine Perihelbewegung von einer beobachtbaren Größe, z. B. 10″, so müßte im elliptischen und hyperbolischen Raum $R = 1000$ Erdbahnradien sein; da aber, wie *Schwarzschild* nachgewiesen hat, nach den *v. Seeliger*schen Untersuchungen über die Verteilung der Fixsterne, im elliptischen Raum $R > 10^8$ und im hyperbolischen wegen beobachteter Größen von Sternparallaxen $R > 10^6$ sein müßte, so ist die Perihelbewegung in einem Jahrhundert von einer Größenordnung, die weit unterhalb jeder beobachtbaren Größe liegt, nämlich $+10^{-9}$ Bogensekunden im elliptischen und -10^{-5} Bogensekunden im hyperbolischen Raum.

II. Es muß auffallen, daß die sogenannten Fernkräfte, nämlich die Newtonsche Massenanziehung und die magnetischen und elektrischen Abstoßungs- und Anziehungskräfte (Coulombsches Gesetz), immer umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung wirken. Diese Tatsache findet ihre Erklärung, wenn man das von einem Kraftzentrum induzierte Kraftfeld betrachtet und bedenkt, daß die Kraftlinien nur in diesem Zentrum entspringen oder endigen können. In jedem anderen Punkte muß also $\operatorname{div} K = 0$ oder, was dasselbe ist, $\Delta V = 0$ sein, und aus dieser Gleichung folgt, zusammen mit der Bedingung, daß das Potential V im Unendlichen von der Ordnung $1/r$ verschwindet, $V = \mu/r$. Das $1/r^2$-Gesetz der Fernkräfte ist also identisch mit der Aussage, daß Kraftlinien nur dort entspringen oder endigen können, wo Massen vorhanden sind. Alle übrigen Zentralkräfte haben infolgedessen Raumabsorption zur Folge, d. h. auch die Punkte des leeren Raumes sind Quellen oder Senken von Kraftlinien.

Es ist jedoch zu bemerken, daß diese Überlegungen an die Voraussetzung eines euklidischen Raumes gebunden sind. Legt man nämlich einen elliptischen Raum konstanter Krümmung oder, wie wir ihn kurz nennen wollen, einen sphärisch-elliptischen Raum zugrunde, so kommt man zu einer Anziehungskraft, die umgekehrt proportional dem Quadrat des Sinus der nichteuklidischen Distanz ϱ wirkt, wie *W. Killing* und *H. Liebmann*[1]) nachgewiesen haben, während bei allen übrigen Zentralkräften wieder Raumabsorption die notwendige Folge ist, also auch bei dem oben untersuchten Gesetz μ/ϱ^2.

Weitere Aufschlüsse über die Eigenschaften dieses Gesetzes erhalten wir, wenn wir es in seinem Verhalten im gesamten sphärisch-elliptischen Raum untersuchen. Wir nehmen also an, das Weltall sei ein solcher mit der endlichen Massendichte δ erfüllter Raum, wobei δ eine Funktion des Ortes ist, die auch null werden kann, und suchen das Potential aller Massen in einem beliebigen Aufpunkt. Diese Aufgabe wurde von *H. v. Seeliger*[2]) für den euklidischen Raum gelöst. Einen analogen, aber etwas verschiedenen Gedankengang wollen wir benutzen.

Es sei P der Aufpunkt, a seine Entfernung vom Ursprung O und M der anziehende Punkt in der Entfernung ϱ von O und b von P, ferner $\sphericalangle MOP = \vartheta$. Der Maßstab werde so gewählt, daß der Krümmungsradius des Raumes der Einheit gleich sei. Wir nehmen vorerst an, die Umgebung von P sei masselos, und legen das Koordinatensystem so, daß P innerhalb einer mit dem Radius ϱ_0 um O beschriebenen Kugel liegt, deren Inneres von Massen frei ist. Da das Volumenelement des sphärisch-elliptischen Raumes $\sin^2\varrho \sin\vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi$ lautet und $1/2\,\pi$ an Stelle von ∞ tritt, so ergibt sich das gesuchte Potential aller Massen zu

$$V = k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{\varrho_0}^{1/2\pi} \delta f(b) \sin^2\varrho \, d\varrho$$

wenn $f(\varrho)$ die Potentialfunktion bezeichnet. Der Punkt P wird in der Richtung PO mit der Kraft $K = \partial V/\partial a$ angezogen, ein unendlich benachbarter dagegen mit der Kraft $K + (\partial K/\partial a)\, da$. Der Unterschied dieser beiden Kräfte ist also $Z\, da$, wenn die von *v. Seeliger* so genannte Zerrung $Z = \partial K/\partial a = \partial^2 K/\partial a^2$ eingeführt wird. Zwischen ϱ, a, b, besteht die Beziehung $\cos b = \cos a \cos\varrho + \sin a \sin\varrho \cos\vartheta$.

Läßt man den Ursprung nach P hineinrücken, so erhält man schließlich

$$V = k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{\varrho_0}^{1/2\pi} \delta f(\varrho) \sin^2\varrho \, d\varrho$$

$$K = -k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \int_{\varrho_0}^{1/2\pi} \delta f'(\varrho) \sin^2\varrho \, d\varrho$$

$$Z = k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{\varrho_0}^{1/2\pi} \delta \, [\cos^2\vartheta f''(\varrho) + \sin^2\vartheta f'(\varrho) \operatorname{ctg}\varrho] \sin^2\varrho \, d\varrho \, .$$

Im allgemeinen wird δ eine stetige räumliche Funktion des Ortes sein, die nur an gewissen Flächen endliche Unstetigkeitssprünge besitzt; wegen der Endlichkeit des sphärischen Universums werden diese Flächen nur in endlicher Anzahl vorhanden sein, sodaß δ eine integrierbare Funktion ist. Ferner dürfen wir auch $f(\varrho)$, $f'(\varrho)$ und $f''(\varrho)$ als endlich und stetig voraussetzen, solange ϱ von null verschieden ist. Denn $f'(\varrho)$ bedeutet doch die zwischen zwei Punkten von der Masse 1 und der gegenseitigen Distanz ϱ wirkende Fernkraft, abgesehen von der Gaußschen Konstante k^2, und diese Kraft darf wohl der Natur der Sache nach samt ihren Differentialquotienten als endlich und stetig betrachtet werden, sobald die beiden Punkte nicht zusammenfallen. Unsere Integrale sind also bestimmte, endliche Größen, weshalb die von *v. Seeliger* beim Newtonschen Gesetz im euklidischen Raum aufgedeckten unendlichen Unbestimmtheiten hier nicht auftreten. Die Hauptursache dafür liegt darin, daß wir im sphärisch-elliptischen Raum nur bis $1/2\,\pi$ statt bis ∞ wie im euklidischen Raum zu integrieren haben. Unendliche, mit endlicher Dichte belegte Räume kommen hier eben nicht vor.

Wir wollen jetzt noch den Fall in Erwägung ziehen, daß der Aufpunkt P innerhalb der anziehenden Massen liegt, also ϱ_0 gegen null konvergiert. $f(\varrho)$ und seine Ableitungen werden jetzt den Ursprung zur Unendlichkeitsstelle haben können, folglich ist die Ordnung des Unendlichwerdens zu untersuchen. Damit V und K bestimmte endliche Grenzen haben, ist notwendig und hinreichend, daß $f(\varrho)$ für $\varrho = 0$ von niederer als zweiter Ordnung unendlich wird. Wir setzen also für das Potential die Entwicklung

$$f(\varrho) = 1/\varrho^\nu \cdot (A/\varrho + B + C\varrho + \cdots)$$

an, wo $\nu < 1$, und gehen damit in die Formel für Z ein. Z hat einen bestimmten endlichen Grenzwert, sobald das zu $\varrho = 0$ gehörige singuläre Integral

[1]) *H. Liebmann.* Nichteuklidische Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1912, Sammlung Schubert.
[2]) *H. v. Seeliger.* Über das Newtonsche Gravitationsgesetz, A. N. 137.129, Sitzungsber. der Münchener Akad. 1896.

$$\mathcal{J} = k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \delta \, [\cos^2\vartheta \, f''(\varrho) + \sin^2\vartheta \, f'(\varrho) \, \mathrm{ctg}\,\varrho] \sin^2\varrho \, d\varrho$$

beliebig klein gemacht werden kann, wenn ϱ_1 und ϱ_2 unabhängig voneinander gegen null konvergieren. Es ist nun

$$|\mathcal{J}| \leq {}^4/_3 \, k^2 \pi \, \delta_{\mathrm{Max.}} \left| \int_{\rho_1}^{\rho_2} [f''(\varrho) + 2f'(\varrho) \, \mathrm{ctg}\,\varrho] \sin^2\varrho \, d\varrho \right|$$

$$= (\nu + 1) \, A \, (1/\varrho_1{}^{\nu} - 1/\varrho_2{}^{\nu}) + \varepsilon$$

wobei ε mit ϱ_1 und ϱ_2 gegen null konvergiert, während das erste Glied nur dann beliebig klein wird, wenn $\nu \leqq 0$. Wir erhalten somit folgendes Resultat: V, K und Z haben im allgemeinen dann und nur dann bestimmte endliche Grenzwerte für $\varrho = 0$, wenn dort $f(\varrho)$ von nicht höherer als erster Ordnung unendlich wird. Dies ist z. B. für $f(\varrho) = \mathrm{ctg}\,\varrho$ und $f(\varrho) = 1/\varrho$ der Fall.

Wien, im September 1917.

J. Lense.

Dritter Vergleich zwischen Astrogr. Katalogen und Atlas Stellarum Var. Von *J. G. Hagen*, S. J.

(Fortsetzung zu A. N. **204**.173 und **205**.35.)

Die astrogr. Zonen der französischen Sternwarten verdienen in den Fragen über Sternfülle und Helligkeitsgrenze vor allen anderen eingesehen zu werden, weil gerade in ihnen die Gedanken und Ziele der astrogr. Kongresse verwirklicht sein sollten. Wir werden sehen, daß sie ihr Arbeitsprogramm nicht genau in den vorgeschriebenen Grenzen hielten. Der Vergleich dieser Kataloge mit den Karten des ASV ist durch den Umstand erleichtert, daß die Einheit der geradlinigen Koordinaten x, y die Bogenminute ist, also nicht das $5'$ Intervall des »réseau«, wie in manchen anderen Verzeichnissen. Sobald man einen der Anhaltsterne, die durch ihre BD-Nummern kenntlich sind, auf der Karte gefunden hat, so lassen sich alle anderen aus dem bloßen Anblick des Kartennetzes ohne Rechnung ablesen.

1. In der Zone von Paris ist der Veränderliche R Arietis (ASV II 782) auf der Platte $+24°68$ zu finden. Die Aufnahme trägt das Datum 1891 Nov. 2. Da der Stern sein größtes Licht nur fünf Wochen früher erreicht hatte, so ist er auf der Platte gut sichtbar. Er trägt die Nummer 99 und steht von der Mitte um $x = +33.7$ und $y = +35.6$ ab, liegt also noch weit genug vom Rande ± 60 der Platte. Der Veränderliche käme auch in Zone $+25°$ vor, doch ist diese noch nicht erschienen.

Tabelle I. R Arietis, Paris.

ASV		Astrogr. Kat.		ASV		Astrogr. Kat.	
Nr.	HP	Nr.	Gr.	Nr.	HP	Nr.	Gr.
1	5^m6	95	6^m3	19	12^m5	97	11^m9
7	9.6	89	9.9	—	—	94	12.3
9	10.0	102	10.5	20	12.5	—	—
10	10.3	90	11.5	21	12.7	—	—
(11)	10.5	(108)	11.3	22	12.8	—	—
12	10.6	91	11.4	23	12.9	—	—
(13)	10.8	(87)	10.8	24	12.9	—	—
14	10.8	105a	11.2	25	13.2	—	—
15	11.2	92	11.3	26	13.2	—	—
16	11.8	106	11.7	27	13.2	—	—
17	12.1	—	—	28	13.4	—	—
18	12.3	101	12.4	29	13.5	—	—

Tab. I enthält alle Sterne im inneren Viereck $30' \times 30'$ der Atlaskarte und noch zwei außerhalb liegende, deren Nummern in Klammer gesetzt sind. Der auf der Karte fehlende Stern (Paris Nr. 94) war auf der Arbeitskarte verzeichnet, ist aber wegen des südlich folgenden hellen Sterns Nr. 1, der die Schätzung verfälscht hätte, nicht mitgenommen worden. Die Spalte der Harvard Photometrie (HP) ist, da die Karte der II. Serie des Atlas angehört, der Publikation Spec. Vaticana XI (1916) entnommen. Die Sterngrößen (Gr.) des astrogr. Katalogs sind nicht aus den Durchmessern der Bilder abgeleitet, sondern unmittelbar geschätzt, wobei eine photographierte Skala von Sternscheiben als Maß diente. Dieser Skala ist es zu danken, daß die Schätzungen nicht erheblich von der HP abweichen.

Innerhalb des bezeichneten Vierecks zählt die Karte 21 Sterne, das Pariser Verzeichnis 11. Das Verhältnis ist nahe 2 zu 1. Trotzdem geht die Pariser Zone noch $1^1/_2$ Größenklassen über die vorgeschriebene Helligkeitsgrenze hinaus, indem sie nach der HP bis zu 12^m5 reicht.

2. Die astrogr. Zone von Bordeaux wurde mit der Karte V Tauri (II 1717) verglichen. Die entsprechende Aufnahme ist $+17°552$ (1901 Febr. 11), auf der der Veränderliche die Nr. 30 und die Koordinaten $x = +32.3$, $y = +22.1$ hat. Das innere Quadrat der Karte von $30'$ Ausdehnung fällt sonach ganz auf die Platte und ist noch $47'$ vom Rande entfernt. Der Stern gehört auch in Zone $+18°$, die aber noch nicht erschienen ist. Das Ergebnis der Vergleichung ist in Tabelle II zusammengestellt.

Tabelle II. V Tauri, Bordeaux.

ASV		Astrogr. Kat.		ASV		Astrogr. Kat.	
Nr.	HP	Nr.	Gr.	Nr.	HP	Nr.	Gr.
4	9^m0	27	9^m0	28	12^m6	—	—
5	9.2	32	9.0	29	12.7	—	—
6	9.5	21	10.0	30	12.7	—	—
8	9.9	29	10.0	31	12.7	—	—
10	10.0	31	10.0	32	12.7	—	—
11	10.1	26	11.0	33	12.8	—	—
17	10.9	22	11.0	34	12.8	—	—
18	11.1	24	11.0	35	12.9	—	—
21	11.6	20	10.5	36	13.0	—	—
22	12.2	—	—	37	13.2	—	—
23	12.2	28	11.5	38	13.2	—	—
24	12.4	—	—	39	13.4	—	—
25	12.4	—	—	40	13.4	—	—
26	12.5	—	—	41	13.5	—	—
27	12.6	—	—	42	13.5	—	—

Die Sterngrößen der HP sind wieder unserer Publikation XI entnommen. Die Größen des astrogr. Verzeichnisses von Bordeaux wurden aus den Bilddurchmessern abgeleitet, wobei auf die Entfernung der Bilder von der Mitte der Platte