Über die Grundlagenforschung in der Geometrie.[0])

Von **Friedrich Rulf** in Wien.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch gemacht, den Kongruenzbegriff zu definieren. Dabei wird, um es gleich hier zu betonen, vorausgesetzt, daß man die Dinge, mit denen man Geometrie treibt, genau kennt und auch die richtigen Sätze über sie von den falschen unterscheidet. Auf erkenntnistheoretische Fragen wie die, was ein richtiger Satz ist, wird nicht eingegangen. Dann wird näher ausgeführt, wie man sich bei Annahme der gegebenen Definition zu den Axiomensystemen von Hilbert und Schur zu stellen hat. Durch eine mit ganz elementaren Hilfsmitteln durchgeführte Anwendung auf das System der Ballschen Schrauben ergibt sich der Satz, daß die Geometrie im allgemeinen Schraubennetz elliptisch ist, falls man eine geeignete Maßbestimmung trifft. Sonst wird noch dem ebenen Anordnungsaxiome Hilberts eine eingehendere Beachtung zugewendet.

Einige vorbereitende Bemerkungen.

Hilbert teilt die Axiome in fünf Gruppen und kennzeichnet diese durch jene Begriffe, um die es sich bei den betreffenden Axiomen handelt. So wird z. B. durch die Axiome der Anordnung der Begriff „zwischen" definiert. Dieses Definieren eines geometrischen Begriffes ist so aufzufassen: Jeder geometrische Begriff ist eine Summe von Beziehungen zu anderen Begriffen. Gibt man von diesen Beziehungen so viele an — und das geschieht durch Aufstellung von Axiomen — als ausreichen, um die übrigen erfahrungsgemäß auftretenden Beziehungen des betr. Begriffes aus ihnen durch logische Schlüsse abzuleiten, so ist der Begriff als definiert anzusehen. Bei Anwendung dieses Prinzips auf die Geometrie sind als jene „anderen Begriffe" nur nicht-geometrische und bereits definierte geometrische zu gebrauchen.

Gegen diesen Vorgang hat Frege[1]) Stellung genommen. Auf seine Kritik kann hier nicht eingegangen werden, es soll aber an die von ihm aufgeworfene Frage angeknüpft werden, ob die wenigen in den Axiomen festgelegten Merkmale nicht ebensogut wie auf die Begriffe der Geometrie auf andere Dinge, etwa seine

---

[0]) Vortrag in der Wiener mathematischen Gesellschaft im März 1911.

[1]) Jahrber. d. Deutsch. Math. Ver. 12, 1903.

Taschenuhr[2]), passen könnten. Das ist nicht unmöglich, aber keineswegs bildet dieser Umstand einen Nachteil, es wäre vielmehr nur freudigst zu begrüßen, wenn es gelänge, ein System von dem täglichen Leben entnommenen Dingen und Ereignissen anzugeben, für die Hilberts Axiome gelten. Dann könnte man die Geometrie in der neuen, unterhaltenden Form betreiben, daß man einen Roman erzählt, in dem sich die Handlung logisch aus Prämissen entwickelt, und im Schlußwort erklärt, daß durch den Roman etwa der pythagoräische Lehrsatz bewiesen sei, wie man sich überzeugen könne, indem man an Stelle eines bestimmten Wortes Hypotenuse, an Stelle zweier anderer Katheten setze u. s. f. und endlich Exposition und Ausgang nachprüfe. Auf gewissem Gebiete findet eine derartige Übertragung tatsächlich in vollkommenster Weise statt, nämlich in der analytischen Geometrie. Und gerade diese Übertragung wird nur dadurch ermöglicht, daß man die geometrischen Begriffe nicht wie Euklid als in ihrer ursprünglichen Bedeutung gegeben, sondern wie Hilbert als durch eine Reihe von Merkmalen definiert auffaßt. Das wird klar, wenn man z. B. an die sog. Zahlenlinie und den Begriff „gleich groß" denkt. Würde man definieren oder erklären: „Zwei Strecken sind gleich groß, wenn man sie zur Deckung bringen kann", so würde das keineswegs das Entsprechen von Strecke und Differenz erkennen lassen, den 8—6 und 13—11 kann man doch nicht zur Deckung bringen. Etwas anderes ist es, wenn man Hilberts Axiome der Kongruenz heranzieht. Das erste besagt, daß es auf einer Geraden zu einem Punkte zwei weitere gibt, deren Entfernungen von ihm gleich der Entfernung zweier gegebener Punkte sind. Dem entspricht unmittelbar der Satz, daß es zu jeder Zahl zwei weitere gibt, deren Unterschied von ihr gleich dem Unterschied zweier gegebener Zahlen ist. Wir brauchen also nur an Stelle von Punkt und Entfernung die Worte Zahl und Unterschied setzen. Die tiefere Auffassung, die wir demnach obigem Axiome zu Grunde zu legen haben, ist die: „Zu jedem Dinge a' (Punkt, Zahl, . . .) einer Mannigfaltigkeit b (Gerade, Zahlenlinie, . . .) gibt es zwei weitere Dinge a'', a''' derselben Mannigfaltigkeit b, die zu a' in derselben Beziehung c (Entfernung, Unterschied, . . .) stehen, wie zwei bestimmte Dinge a aus b zu einander."[3])

Dieses Zurückgehen auf nicht geometrische Grundbegriffe ist wohl das wichtigste logische Moment, das die modernen „Grundlagen der Geometrie" von dem Werke Euklids unterscheidet. Das Aufgeben der rein geometrischen Grundbegriffe tritt nicht in allen neueren Arbeiten gleich stark hervor; verhältnismäßig schwach bei Hilbert, stärker bei anderen, die z. B. den Inbegriff dreier Zahlen Punkt nennen, dann scheinbar ganz willkürliche Sätze

---

[2]) p. 370.

[3]) Eine ganz abstrakte Fassung von Hilberts Axiomen hat Korselt angegeben: Jahrber. d. Deutsch. Math. Ver. 17, 1908, q. 114—117.

aufstellen und mit diesen operieren. Als Berechtigung derartiger „Geometrien“ kann, vom „Selbstzweck“ abgesehen, wohl nur die Hoffnung angesehen werden, daß es einmal gelingen wird, Systeme nicht geometrischer und nicht mathematischer Dinge anzugeben, für die ihre Axiome gelten.

Die Begriffe identisch, gleich und kongruent.

In jedem Aufbau der Geometrie, er sei pädagogisch oder nicht, sind die Begriffe „dasselbe“ oder „identisch“, „gleich“ und „kongruent“ von größter Wichtigkeit. So ist es die grundlegende Überzeugung jedermanns, daß alle Punkte, alle Geraden, alle Ebenen kongruent sind, d. h. daß alles, was in der Geometrie von einem Punkte, einer Geraden oder Ebene gilt, auch von jedem anderen Punkte, jeder anderen Geraden und Ebene gilt. Die oben genannten drei Begriffe sind im allgemeinen Gebrauch nicht immer scharf getrennt. Wir müssen deshalb zunächst sie definieren. Von zwei Dingen d_1 und d_2 sagen wir, sie wären dasselbe oder identisch, wenn in jedem richtigen Satze, in dem d_1 vorkommt, an seine Stelle d_2 gesetzt werden kann, ohne daß er falsch wird. Von Veronese[4]) wird das Wort identisch in anderer Bedeutung gebraucht. So lautet z. B. sein erstes Axiom: „Es gibt verschiedene Punkte. — Alle Punkte sind identisch“ (p. 226). Nach unserer Definition sind nicht je zwei Punkte identisch, da z. B. der Satz: „Der Punkt p liegt auf der Geraden G“, nicht für jeden anderen Punkt q gilt. Wir bezeichnen vielmehr alle Punkte als kongruent, indem wir diesen Begriff folgendermaßen definieren: Zwei geometrische Gebilde nennen wir dann kongruent, wenn wir in jedem richtigen Satze, in dem das erste Gebilde in Verbindung mit einer Reihe anderer geometrischer Gebilde vorkommt, die letzteren auf mindestens eine Art durch je gleichartige Gebilde so ersetzen können, daß, wenn wir an Stelle des ersten Gebildes das zweite setzen, der Satz richtig bleibt. Der Begriff „gleichartig“ wird weiter unten definiert werden, sein Sinn dürfte aber hier ohne weiters klar sein. — Kehren wir zum obigen Beispiele zurück, so können wir jetzt G durch eine Gerade ersetzen, die durch q geht, und der betrachtete Satz bleibt richtig.

Betrachten wir es wie oben als Zweck eines abstrakten Axiomensystems, die Erkennungsmöglichkeit zu geben, ob man mit irgend einem System von Dingen Geometrie treiben kann oder nicht, so wird es nicht empfehlenswert sein, das Axiom: „Alle Punkte sind kongruent“, an die Spitze zu stellen. Denn wir können doch nicht untersuchen, ob wir in allen richtigen Sätzen, die jenes System betreffen, die geschilderten Operationen ausführen können. Es wird vielmehr nötig sein, die Tatsache, daß alle Punkte kongruent sind, schrittweise zu entwickeln. Dies ermöglichen folgende Überlegungen:

[4]) Veronese-Schepp: „Grundzüge der Geometrie...“ Leipzig 1894.

Es liege ein System $\mathfrak{S}(p)$ von Dingen p vor, dann ein zweites $\mathfrak{S}(g)$, ein drittes $\mathfrak{z}$, dann $\mathfrak{S}(\mathfrak{e})$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{w})$,.... Wir nehmen noch alle im gewöhnlichen Sinne aus allen diesen Dingen definierbaren Dinge hinzu und bezeichnen die Gesamtheit von Dingen, zu der wir so gelangen mit $\mathfrak{P}$. Die einem und demselben System angehörigen Dinge nennen wir gleichartig und ebenso die in derselben Weise aus gleichartigen Dingen definierbaren Dinge. Alle richtigen Sätze, in denen Dinge aus $\mathfrak{P}$ vorkommen, zerfallen in zwei Gruppen, von denen nicht beide existieren müssen. In die erste Gruppe nehmen wir alle Sätze der Eigenschaft, daß, falls man irgendein in ihm explizit oder implizit vorkommendes p durch irgend ein anderes p ersetzt, auf mindestens eine Art alle übrigen Dinge aus $\mathfrak{P}$ durch je gleichartige so ersetzt werden können, daß der Satz richtig bleibt. Alle übrigen Sätze weisen wir der zweiten Gruppe zu. Existiert die erste Gruppe nicht, so können wir in $\mathfrak{P}$ mit den p sicher keine Geometrie treiben, weil eben das 1. Axiom Veroneses nicht erfüllt ist. Existiert dagegen die erste Gruppe, so nennen wir sie „Geometrie der p in $\mathfrak{P}$."[5]) Der Fundamentalsatz dieser „Geometrie" ist der Satz, daß sich aus geometrischen Prämissen nur geometrische Folgerungen ergeben können. Er ermöglicht ein schrittweises Verfolgen der Frage, ob p in den jeweilig betrachteten Systemen von Dingen kongruent auftritt, und damit einen schrittweisen Aufbau der Geometrie. So folgt z. B. in einer axiomatisch aufgebauten Geometrie der Umstand, daß alle eigentlichen Punkte kongruent sind, lediglich daraus, daß alle Punkte in den Definitionen und Axiomen gleichberechtigt auftreten, diese also der Punktgeometrie angehören. Das Wort gleichberechtigt haben wir hier in einem Sinne gebracht, der zusammenfällt mit dem von „gleich in Bezug auf ein Merkmal" bei Veronese.[6]) In der Tat kann auch mittels dieses Begriffes der Begriff „kongruent" schrittweise entwickelt werden.

Die Systeme gleichartiger Dinge können sich gegenüber unserer Geometrie ganz verschiedenartig verhalten. Es kann unter ihnen Systeme $\mathfrak{S}(g)$ von der Eigenschaft geben, daß falls man in irgend einem geometrischen Satze ein g durch irgend ein anderes ersetzt, auf mindestens eine Art alle übrigen in dem betreffenden Satze vorkommenden Dinge aus $\mathfrak{P}$ durch je gleichartige ersetzt werden können, ohne daß der Satz falsch wird. Dann sind die g in der Geometrie der p ebenso untereinander kongruent wie diese. Wir nennen alle derartigen Dinge fundamental. In der Geometrie der Punkte sind das z. B. die Geraden, die Ebenen, die Linienelemente, die Speere u. a. m. Neben diesen Dingen gibt es andere, die obige Eigenschaft nicht haben und folglich zu den gleichartigen Dingen nicht kongruent sind. Ein Beispiel hiefür ist die Entfernung

[5]) Diese Definition ist willkürlich. Z. B. betrachtet E. Meyer, Math. Ann. 64 (1907) „Geometrien", in denen nicht alle Punkte in dem oben definierten Sinne kongruent sind.

[6]) l. c. p. 4, § 9.

zweier Punkte. Wir können ja nicht sagen, daß, weil eine Entfernung $\overline{AB}$ 5 *cm* beträgt, auch die $\overline{CD}$ 5 *cm* betrage, wobei zu beachten ist, daß 5 kein geometrischer Begriff ist. Ein anderes Beispiel wäre der Begriff Dreieck.

Wir greifen jetzt ein Ding $\mathfrak{e}$ heraus, das nicht zu allen gleichartigen Dingen $\mathfrak{e}$ kongruent, also nicht fundamental in unserer Geometrie $\mathfrak{G}(p)$ der p in $\mathfrak{P}$ ist. In dieser $\mathfrak{G}(p)$ kann es immerhin Sätze von der Eigenschaft geben, daß, falls man irgend ein in ihnen vorkommendes $\mathfrak{e}$ durch irgend ein anderes $\mathfrak{e}$ ersetzt, alle übrigen Dinge aus $\mathfrak{P}$ durch je gleichartige so ersetzt werden können, daß der Satz richtig bleibt. Alle diese Sätze denken wir gesammelt. Sie bilden eine in der $\mathfrak{G}(p)$ enthaltene Geometrie $\mathfrak{G}(\mathfrak{e})$ der $\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{P}$. Betrachten wir die $\mathfrak{G}(\mathfrak{e})$ gleichzeitig mit der $\mathfrak{G}(p)$, so werden wir die in der $\mathfrak{G}(\mathfrak{e})$ aber nicht mehr in der $\mathfrak{G}(p)$ fundamentalen Dinge nicht kongruent nennen, sondern zur Bezeichnung dieser Eigenschaft ein anderes Wort wählen. Ist z. B. $\mathfrak{G}(p)$ die Euklidische Geometrie und $\mathfrak{e}$ die Entfernung zweier Punkte, so ist $\mathfrak{G}(\mathfrak{e})$ die Geometrie der Ähnlichkeitstransformationen und wir nennen in ihr fundamentale Gebilde ähnlich. Ist $\mathfrak{e}$ das eigentliche Dreieck, so erhalten wir die Dreiecksgeometrie, d. h. die Gesamtheit aller geometrischen Sätze, die für alle Dreiecke gleichzeitig gelten. Ist $\mathfrak{e}$ das eigentliche Punktquadrupel, von dessen Punkten keine drei auf einer Geraden liegen, so enthält $\mathfrak{G}(\mathfrak{e})$ die projektive Geometrie. Diese kann man dadurch erhalten, daß man als $\mathfrak{e}$ das Teilverhältnis dreier Elemente eines Grundgebildes erster Stufe den fundamentalen Gebilden von $\mathfrak{G}(p)$ adjungiert.

Stellen wir das hier erläuterte Prinzip, Geometrien zu charakterisieren in Parallele mit dem von Klein im Erlanger Programm (1872) aufgestellten! Betrachten wir etwa die projektive Geometrie! Sie wird von Klein durch die linear gebrochenen Substitutionen charakterisiert. Ihre wichtigsten Invarianten sind die Inzidenzgleichung und das Doppelverhältnis. Während der ersteren entsprechend das Linienelement auch bei der oben aufgestellten Charakterisierung der projektiven Geometrie ein fundamentales Gebilde ist, ist das Doppelverhältnis nicht fundamental, sondern nur das Teilverhältnis, oder anders gesagt, die aus drei Elementen eines Grundgebildes erster Stufe bestehende Figur. Wie nun bei Problemen der Invariantentheorie die Aufgabe dahin eingeschränkt wird, ein vollständiges System unabhängiger Invarianten zu finden, so werden wir unsere Aufgabe, alle Sätze anzugeben, für die ein bestimmtes System von Dingen fundamental ist, auf die Aufgabe einschränken, ein System unabhängiger Sätze anzugeben, aus denen sich alle übrigen ableiten lassen. Sie werden wir als Grundsätze unserer Geometrie aufzustellen haben.

Von dem gewonnenen Standpunkte aus soll nunmehr daran geschritten werden, ein abstraktes Axiomensystem anzugeben. Da dieses, wie schon wiederholt hervorgehoben wurde, außer dem

Selbstzweck nur den Zweck haben kann, bei irgend einem Systeme von Dingen erkennen zu lassen, ob man mit ihnen elementare Geometrie treiben kann oder nicht, und die betreffenden Axiome für diese Dinge durchaus nicht Axiome zu sein brauchen, werden wir statt dessen Merkmale sagen.

Verknüpfung.

Wir stellen zunächst die Merkmale der sog. ebenen Verknüpfung auf.

Neben den Dingen p betrachten wir Dinge g. Aus den Dingen p und g denken wir uns auf die geschilderte Art ein System P_1 gebildet. Sollen dann in der Geometrie der p in P_1 die ebenen Verknüpfungssätze gelten, so müssen folgende Merkmale erfüllt sein.

I. 1.: Je zwei verschiedene p bestimmen ein g: $[p_1 p_2] = g$.

I. 2.: Es gibt unendlich viele g.

I. 3.: Dasselbe g kann auf unendlich viele verschiedene Arten durch je zwei p bestimmt werden.

I. 4.: Bestimmen p_1 und p_2 dasselbe g wie p_3 und p_4, so bestimmen je zwei verschiedene dieser vier p dasselbe g.

Die Unabhängigkeit von I. 4. ergibt sich, indem man die p durch die in einem Punkte angreifenden Kräfte, die g durch ihre Resultierenden ersetzt. Mit demselben Erfolge könnte man auch die p durch Punkte und die $g_{ik} = [p_i p_k]$ je durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{p_i p_k}$ als Durchmesser ersetzen.

In diesen Merkmalen sind die Axiome I. 1—3. Hilberts bis auf den zweiten Teil von I. 3. enthalten. Dieser sagt aus, daß es wenigstens drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte gibt. Diesen Satz beweisen wir in folgender Form: „Zu jedem g gibt es p, die mit keinem anderen p eben dieses g bestimmen.“ Wäre dieser Satz falsch und wären p_1 und p_2 irgend zwei p, so müßte es ein p_3 und ein p_4 geben, so daß $[p_1 p_3] = g = [p_2 p_4]$ wäre. Dann wäre aber nach I. 4. $[p_1 p_2] = g$ und es gäbe, da p_1 und p_2 zwei beliebige p sind, nur ein g, was I. 2. widerspräche.

Da in obigen Merkmalen alle p sowie alle g gleichberechtigt auftreten, so folgt aus dem Fundamentalsatz, daß sie auch in allen aus ihnen gezogenen Folgerungen gleichberechtigt auftreten.

Es soll nunmehr als Anwendung gezeigt werden, daß die Merkmale I. 1—4. auf die Schrauben passen. Unter Schraube verstehen wir folgendes:[7]) Jedes System von auf einen starren Körper wirkenden Kräften kann man durch eine Kraft (Stab) und ein Kräftepaar (Vektor) ersetzen, dessen Ebene auf der Richtung der Kraft lotrecht steht. Den Inbegriff dieser beiden nennt man Dyname. Sieht man von der absoluten Größe der Kraft sowie des Kräftepaares ab und betrachtet nur das Verhältnis der Maßzahl

[7]) Ball-Gravelius: „Theor. Mechanik starrer Systeme“ 1889.

des letzteren zu der der ersteren, so gelang man zum Begriff der Schraube [8]). Ebenso könnte man zu diesem Begriffe gelangen, indem man an Stelle der Kraft eine unendlich kleine Drehung, an Stelle des Kräftepaares eine unendlich kleine Schiebung setzt. Zu jeder Schraube gehören ∞^1 Dynamen. Greifen wir irgend zwei Schrauben heraus und kombinieren wir alle zu ihnen gehörigen Dynamen auf alle möglichen Arten, so erhalten wir ∞^2 resultierende Dynamen. Die Gesamtheit der zu ihnen gehörigen Schrauben bezeichnen wir als Schraubenbüschel und setzen dieses an Stelle des obigen g. I. 1. ist erfüllt. Wählen wir nun irgend zwei zu obigen zwei Schrauben gehörige Dynamen und vergrößern wir beide Stäbe und beide Vektoren in demselben Verhältnisse, so wird auch ihre Resultierende nur insofern geändert, als ihr Stab und ihr Vektor in eben demselben Verhältnisse vergrößert werden. Die zu ihr gehörige Schraube bleibt dabei ungeändert. Daraus erkennen wir, daß wir das ganze Büschel erhalten, indem wir eine Dyname festhalten und die andere sich beliebig ändern lassen. Das Schraubenbüschel enthält demnach ∞^1 Schrauben. Da es ∞^5 Schrauben gibt, ist I. 2. erfüllt. Nunmehr wollen wir uns davon überzeugen, daß I. 3 und I. 4. erfüllt sind. $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_4$ mögen dem durch $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ bestimmten Büschel angehören. Wir zeigen, daß jede Schraube $\mathfrak{S}_5$ des Büschels $[\mathfrak{S}_3\,\mathfrak{S}_4]$ auch dem Büschel $[\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{S}_2]$ angehört. Es gibt zwei zu $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_4$ gehörige Dynamen $\mathfrak{D}_3$ und $\mathfrak{D}_4$, deren Resultierende $\mathfrak{D}_5 \equiv \mathfrak{D}_3 + \mathfrak{D}_4$ zu $\mathfrak{S}_5$ gehört. Nun ist $\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_4 = \mathfrak{D}_1' + \mathfrak{D}_2'$, wobei $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_1'$ zu $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_2'$ zu $\mathfrak{S}_2$ gehörige Dynamen sind, und folglich ist $\mathfrak{D}_5 = (\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_1') + (\mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_2')$ nach dem Gesetz der Superposition. Anderseits gehören $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ dem Büschel $[\mathfrak{S}_3\,\mathfrak{S}_4]$ an, wie folgende Gleichungen erläutern: $\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_4 = -\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2''$, $\mathfrak{D}_5 \equiv \mathfrak{D}_3 + \mathfrak{D}_4 = (\mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_2'')$. Die Merkmale I. 1—4. sind demnach sämtlich erfüllt.

Kehren wir zu unseren allgemeinen Entwicklungen zurück, so sind zwei Möglichkeiten des Weiterweges scharf zu trennen. Wir können einerseits die räumlichen Verknüpfungsmerkmale aufstellen, wie dies in den Grundlagen Hilberts und nahezu sämtlichen anderen Arbeiten geschieht. Anderseits können wir uns auf die Ebene beschränken und die Forderung aufstellen, die Geometrie der Ebene in dieser allein ohne ein Stetigkeitsaxiom aufzubauen. Diesen Weg beschritt zuerst Hilbert [9]), indem er die gestellte Aufgabe für die hyperbolische Geometrie löste. Dann führte Hessenberg [10]) dasselbe für die elliptische Geometrie durch und endlich entwickelte Hjelmslev [11]) in gleicher Weise ohne Benützung eines Parallelenaxioms eine allgemeine ebene Geometrie, aus der sich durch Festsetzung der Winkelsumme im Dreieck die drei besonderen ebenen Geometrien ableiten lassen. Der Beweis der

---

[8]) Vergl. Enc. IV 2 Timerding 13. — [9]) Math. Ann. 75, 1903. — [10]) Math. Ann. 61, 1905. — [11]) Math. Ann. 64, 1907.

grundlegenden Sätze auf diesem ebenen Wege ist aber, wie Schur[12]) mit Recht hervorhebt, sehr verwickelt und unübersichtlich. Die Hauptschwierigkeit besteht in dem Beweise der Gültigkeit der Verknüpfungssätze für uneigentliche Elemente. Aus I. 1—4. folgt, daß zwei Geraden höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Nun kann es Paare von Geraden geben, die sich nicht schneiden. Von ihnen sagen wir, daß sie sich in einem uneigentlichen Punkte schneiden. Wir werden uns auch weiterhin vom Kontinuitätsprinzip leiten lassen und es erreichen wollen, daß die Verknüpfungssätze auch bei Hinzunahme der uneigentlichen Punkte zu den eigentlichen gelten. Dazu wird eine Reihe weiterer Definitionen nötig sein, die wir erst nach Aufstellung weiterer Merkmale geben können.

Die Gleichberechtigung aller Geraden ist durchs Einbeziehen der aus zwei sich nicht (in einem eigentlichen Punkte) schneidenden Geraden bestehenden Figur, des uneigentlichen Punktes, in den Kreis unserer Betrachtungen unterbrochen. Denn es ist offen gelassen, ob es nicht zugleich Geraden gibt, die jede andere in einem eigentlichen Punkte schneiden, und solche, die mit anderen Geraden auch uneigentliche Punkte bestimmen. Als Beispiel zeichne man in der Ebene einen Kreis und bezeichne alle in seinem Innern liegenden Punkte als uneigentlich, alle anderen, einschließlich der auf der unendlich fernen Geraden liegenden als eigentlich. Dann gelten die Merkmale I. 1—4. und auch unsere Definition, es sind aber nicht mehr alle Geraden gleichberechtigt.

Um zu einem der Ebene entsprechenden Begriff bei Schrauben zu kommen, definieren wir das Schraubennetz als Gesamtheit der Schrauben, die man erhält, wenn man die in zwei sich schneidenden Schraubenbüscheln enthaltenen Schrauben auf alle möglichen Arten verbindet. Dann können wir zeigen, daß in der Geometrie in diesem Schraubennetz uneigentliche Schrauben nicht auftreten, indem wir beweisen, daß je zwei Büschel des Netzes sich schneiden. $\mathfrak{S}_1$ sei der Schnitt der zwei oben zur Definition des Netzes verwendeten Büschel, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ bezw. $\mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{S}_5$ seien den Büscheln angehörige Schrauben. $\mathfrak{D}_1$ sei eine beliebige zu $\mathfrak{S}_1$ gehörige Dyname. Dann bestimmen wir vier der Reihe nach zu $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_5$ gehörige Dynamen $\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4, \mathfrak{D}_5$ der Eigenschaft, daß $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3$ und $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_4 + \mathfrak{D}_5$. $\mathfrak{S}_6$ und $\mathfrak{S}_7$ seien die zu den Dynamen $\mathfrak{D}_6 = \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_4$ und $\mathfrak{D}_7 = \mathfrak{D}_5 - \mathfrak{D}_3$ gehörigen Schrauben. Durch Einsetzen folgt: $\mathfrak{D}_7 = - \mathfrak{D}_4 + \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_6$. Dann ist aber auch $\mathfrak{S}_6 \equiv \mathfrak{S}_7$ und die Büschel $[\mathfrak{S}_2\, \mathfrak{S}_4]$ und $[\mathfrak{S}_3\, \mathfrak{S}_5]$ schneiden sich in $\mathfrak{S}_6$. Daraus folgt[13]), daß je zwei Büschel des Netzes sich schneiden.

Anordnung.

Neben $\mathfrak{S}(p)$ und $\mathfrak{S}(g)$ betrachten wir einen Begriff $\mathfrak{z}$, wollen uns aber im folgenden der Sprache der Geometrie bedienen.

---

[12]) Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909, p. 160.

[13]) Postulat von Pieri. Enc. III A, B 1 Enriques 18.

Auf die Notwendigkeit, Axiome der Anordnung aufzustellen, wies als erster Gauß hin. Der erste, der sie tatsächlich aufstellte, war Pasch[14]). Manchmal treten sie nicht abgesondert, sondern in Verbindung mit den Axiomen der Verknüpfung auf, wie z. B. bei Peano[15]) und Schur.

Hilbert teilt die Axiome der Anordnung in zwei Gruppen, in die linearen, die nur Aussagen über die Punkte einer Geraden enthalten, und das ebene Axiom der Anordnung. Das erste Anordnungsaxiom Hilberts lautet:

II. 1.: Wenn a, b, c Punkte einer Geraden sind und es liegt b zwischen c und a, so liegt auch b zwischen a und c.

Der Begriff zwischen hat nur in den Geometrien mit uneigentlichen Punkten eine unmittelbare Existenz. Über die Anordnungsmerkmale für Geometrien ohne uneigentliche Punkte werden wir später ein Erwähnung machen. Als zweites Anordnungsmerkmal benützen wir das Axiom II. 3. Hilberts:

II. 2.: Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

Das Axiom II. 2. Hilberts, das aussagt, daß es immer zwischen zwei Punkten einer Geraden mindestens einen weiteren gibt und ebenso mindestens einen in bestimmter Richtung außerhalb, stellen wir nicht als Merkmal auf. Bei unserer etwas abweichenden Fassung der Merkmale ist es eine Folge von I. 2. und dem noch aufzustellenden Merkmale II. 3.

Die Gesamtheit zweier Punkte und der zwischen ihnen liegenden Punkte nennen wir Strecke.

Zu den linearen Axiomen der Anordnung kommt ein ebenes, das bei Pasch als Lehrsatz auftritt und dem wir folgende Form geben:

II. 3.: Drei nicht in einer Geraden liegende Punkte bestimmen drei Strecken. Wird eine von diesen von einer Geraden in einem Punkte geschnitten, so wird noch genau eine der beiden anderen Strecken in einem Punkte geschnitten, abgesehen von dem Falle, daß die Gerade durch einen jener drei Punkte geht.

So einfach und anschaulich dieses Merkmal auf den ersten Blick aussieht, so wichtig ist es durch einige Folgen, die es mehr versteckt nach sich zieht. So können z. B. aus den linearen Merkmalen der Anordnung allein nicht alle Sätze über Anordnung auf der Geraden, soweit sie natürlich mit Dichte und Stetigkeit nichts zu tun haben, gefolgert werden. So ist schon der Satz, daß, wenn b zwischen a und c und d zwischen b und c liegt, auch d zwischen a und c liegt, erst unter Hinzunahme des ebenen Merkmals beweisbar[16]), auch unter Beibehaltung des Axioms II. 2. von Hilbert. Dieses Merkmal vervollständigt bei Hilbert erst die Definition der Strecke. Ferner ist es unter allen ebenen Axiomen

[14]) Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882.
[15]) Rivista di Mat. IV, 1894.
[16]) Moore, Transact. of the American Math. Soc. 1902.

Hilberts das einzige, das im Raum nicht mehr gilt. Es charakterisiert demnach die Ebene und wird auch von Peano und Schur zu ihrer Definition benützt. Endlich enthält dieses Merkmal in den Geometrien mit uneigentlichen Punkten Aussagen über deren Anordnung gegenüber den eigentlichen Punkten und gilt in einer Geometrie ohne uneigentliche Punkte überhaupt nicht. Auf die letzten Behauptungen gehen wir näher ein: Als Winkel definieren wir die Gesamtheit aller Geraden, die eine Strecke aus einem außerhalb liegenden Punkte projizieren. Nach dieser Definition ist ein Winkel durch seine Schenkel noch nicht bestimmt. Es seien A und B irgend zwei Geraden. Durch den ihnen nicht angehörenden Punkt p legen wir zwei Geraden C und D, die A und B in eigentlichen Punkten schneiden. Verbinden wir alle Punkte von A mit p, so zerfallen die so erhaltenen Geraden in zwei Gruppen. Die der einen Gruppe bilden einen Winkel von den Schenkeln C, D, die anderen gehören ihm nicht an. Nun kann es Geraden durch p geben, die A aber nicht B schneiden. Die Anschauung lehrt, daß derartige Geraden nur in einer der erwähnten Gruppen enthalten sein können. Diesen Satz spricht Vahlen[17]) in der Form aus: Zwei eigentliche und zwei uneigentliche Punkte trennen sich nicht. Legt man die projektive Ebene zu Grunde, so folgt hieraus, daß entweder die eigentlichen oder die uneigentlichen Punkte in ihr ein konvexes Gebiet erfüllen. Wir nehmen das letztere an. Dann gibt es neben eigentlichen Dreiecken der gewöhnlichen Form, die von einer durch keine Ecke gehenden Geraden in keinem oder in zwei Punkten geschnitten werden, auch eigentliche Dreiecke von der dualen Form, die von einer durch keine Ecke gehenden Geraden in einem oder drei Punkten geschnitten werden. Das ebene Merkmal der Anordnung besagt folglich, daß nicht die uneigentlichen, sondern die eigentlichen Punkte ein ovales Gebiet erfüllen. Man erkennt auch sofort, daß in der elliptischen Geometrie, in der es keine uneigentlichen Punkte gibt, beide Arten von Dreiecken gleichberechtigt nebeneinander stehen.

Die letzten Entwicklungen legen den Gedanken nahe, das Merkmal II. 3. in seine Bestandteile zu zerlegen. Es wären hiezu mindestens vier neue Merkmale erforderlich, von denen das erste die linearen ergänzt, das zweite die Ebene charakterisiert, das dritte die eigentlichen und uneigentlichen Punkte in zwei Gebiete trennt, das vierte das konvexe Gebiet den eigentlichen Punkten zuweist. Ansätze in dieser Richtung finden sich, soweit mir die Literatur bekannt ist, nur bei Vahlen, doch setzt dieser die Giltigkeit der Verknüpfungssätze auch für uneigentliche Elemente voraus. Da aber diese erweiterte Giltigkeit, wie noch des näheren auseinandergesetzt werden soll, an die Giltigkeit des Desarguesschen Satzes gebunden ist, dieser aber ohne Zuhilfenahme der Anordnungsaxiome bisher nicht bewiesen wurde, so fehlt es den diesbezüglichen Untersuchungen Vahlens an Tragweite.

[17]) l. c. p. 179.

Um in der Geometrie ohne uneigentliche Punkte die ganze Anordnung zu beherrschen, genügt es, wie man leicht erkennt, neben einem System linearer Merkmale, das alle linearen reinen Anordnungssätze mit sich bringt, die Projektivität der Anordnung [18]) zu fordern, d. h. daß aus sich trennenden Elementenpaaren durch Schneiden und Projizieren ebensolche hervorgehen.

Diesen Merkmalen genügen die Schrauben. Wir betrachten das durch $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ bestimmte Büschel. $\mathfrak{D}_1$ sei eine zu $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{D}_2$ eine zu $\mathfrak{S}_2$ gehörige Dyname. Lassen wir dann in $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mu\mathfrak{D}_2$ μ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so durchlauft die zu $\mathfrak{D}$ gehörige Schraube gerade einmal das Schraubenbüschel und wir können seine Schrauben nach den zugehörigen Parameterwerten μ anordnen. Es ist noch zu zeigen, daß diese Anordnung von der besonderen Wahl von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ sowie von $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ unabhängig ist. Dazu benützen wir eine Überlegung, die wir auch fürs Spätere brauchen. Die Geraden G_1 und G_2 seien die Träger von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{L}$ sei ihr Gemeinlot. Außer der eindeutigen Existenz von $\mathfrak{L}$ nehmen wir noch an, daß $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ bestimmte endliche Parameterwerte haben, so daß ihre Stäbe nicht die Länge Null haben. Falls G_1 und G_2 nicht in einer Ebene liegen, verschieben wir $\mathfrak{D}_2$ parallel zu $\mathfrak{L}$ bis dies eintritt. Dabei kommt zu unserem System ein Vektor hinzu. Die Stäbe von $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ bestimmen nun eine Resultierende, die mit dem resultierenden Vektor wohl in einer zu $\mathfrak{L}$ normalen Ebene liegt, aber noch nicht dieselbe Richtung haben muß. Wir werden deshalb den resultierenden Stab noch einmal parallel zu $\mathfrak{L}$ so verschieben, daß der hinzutretende Vektor mit den schon vorhandenen eine Resultierende liefert, die in die Richtung des Stabes fällt. Lassen wir nun μ kontinuierlich von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen, so wächst auch der zu $\mu\mathfrak{D}_2$ gehörige Stab kontinuierlich von $-\infty$ bis $+\infty$. Die Richtung der resultierenden Kraft durchläuft dabei kontinuierlich die Richtungen eines Büschels und die natürliche Anordnung in diesem ist identisch mit der durch μ definierten. Ebenso elementar kann man die noch ausgeschlossenen Fälle erledigen. Daraus folgt, daß alle linearen Anordnungssätze erfüllt sind und insbesondere zwei Schrauben eines Büschels durch eine dritte nicht getrennt werden.

Um die Projektivität der Anordnung nachzuweisen, betrachten wir in einem Schraubennetze vier Schraubenbüschel $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ $\mathfrak{B}_4$, die sich in einer Schraube $\mathfrak{S}_5$ schneiden. Sie werden von zwei Büscheln $\mathfrak{B}_6$ und $\mathfrak{B}'_6$ der Reihe nach in $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{S}'_1$, $\mathfrak{S}'_2$, $\mathfrak{S}'_3$, $\mathfrak{S}'_4$ geschnitten. Der Schnitt $\mathfrak{S}_6$ von $\mathfrak{B}_6$ und $\mathfrak{B}'_6$ liege in keinem der anderen Büschel. Den Schrauben von $\mathfrak{B}_1$ ordnen wir in irgend einer kontinuierlichen Weise Dynamen zu, etwa indem wir verlangen, daß ihre Stäbe eine bestimmte Länge besitzen. Ist dann $\mathfrak{D}_6$ irgend eine zu $\mathfrak{S}_6$ gehörige Dyname, so können wir zu

[18]) Vahlen p. 141.

$\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ gehörige Dynamen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$ so finden, daß $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_1 + \mu_i \mathfrak{D}_6$ ist. Dasselbe führen wir mit derselben Dyname $\mathfrak{D}_6$ für $\mathfrak{B}'_6$ durch und kommen so zu Parameterwerten μ'_i. Wir behaupten, daß die μ'_i ebenso angeordnet sind wie die μ_i, woraus ja die Projektivität der Anordnung folgt. Lassen wir $\mathfrak{D}_1$ in der auf $\mathfrak{B}_1$ vorgeschriebenen Weise, ohne durch $\mathfrak{S}_5$ zu gehen, in $\mathfrak{D}'_1$ übergehen, so können wir gleichzeitig μ_2 kontinuierlich so ändern, daß $\mathfrak{D}_2$ in $\mathfrak{D}'_2$ übergeht und dabei beständig zu einer Schraube von $\mathfrak{B}_2$ gehört. Dasselbe gilt für μ_3 und μ_4. Hätte sich während dieses Vorganges die Anordnung der μ_i geändert, so müßten mindestens einmal zwei μ einander gleich geworden sein. Dann müßten sich aber mindestens zwei der Büschel $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ in einer von $\mathfrak{S}_5$ verschiedenen Schraube schneiden, was unmöglich ist.

Kongruenz.

Neben $\mathfrak{S}(p)$, $\mathfrak{S}(g)$, $\mathfrak{z}$ betrachten wir noch die Systeme $\mathfrak{S}(\mathfrak{e})$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{w})$ der Entfernungen und Winkel.

Ist (a, b) irgend ein Punktepaar und c irgend ein dritter Punkt, so muß es, falls wir mit den Punkten in dem soeben erweiterten Gebiete wirklich „Geometrie" treiben können, wenigstens einen vierten Punkt d so geben, daß jeder Satz, der für (a, b) gilt, auch für (c, d) gilt. Die von diesen Punktepaaren begrenzten Strecken sind kongruent, $\overline{ab} = \overline{cd}$. Zu c gibt es aber in unserer Erfahrungsgeometrie nicht nur einen Punkt d obiger Eigenschaft, sondern viele und das muß durch ein Merkmal festgelegt werden. Vorher müssen wir ein neues Gebilde definieren. Wir betrachten in der Ebene eine Gerade, einen in dieser liegenden Punkt, eine Richtung in der Geraden und einen Drehsinn um den Punkt. Die aus allen diesen Elementen bestehende Figur nennen wir Soma.[19]) Die Begriffe Richtung und Drehsinn können mit Hilfe der Anordnungssätze definiert werden. Dann lautet das erste Kongruenzmerkmal:

III. 1.: Alle Somen sind kongruent.

Zu dem oben betrachteten Punkte c gibt es demnach unendlich viele Punkte d, so daß $\overline{cd}$ mit einer willkürlich gegebenen Strecke $\overline{ab}$ kongruent ist. Daß aber nicht alle Strecken und nicht alle Winkel kongruent sind, folgt aus den weiteren Merkmalen:

III. 2.: Von zwei nicht identischen, kongruenten Strecken kann keine ganz innerhalb der anderen liegen.

III. 3.: Von zwei nicht identischen, kongruenten Winkeln kann keiner ganz innerhalb des anderen liegen.

III. 1. Fällt mit dem 11. Grundsatze von **Schur** zusammen, der aussagt, daß man zwei Somen durch Bewegung in einander überführen kann, nur ist oben der Begriff „Bewegung" durch den in den Folgerungen gleichbedeutenden „kongruent" ersetzt. Die Grund-

---

[19]) Vergl. Study, Jahrber. d. Deutsch. Math. Ver. 19, 1910, p. 255.

sätze 12 und 13 von Schur, die die Umkehrbarkeit des Winkels bezw. der Strecke aussagen, folgen unmittelbar aus III. 1. und III. 3. bezw. III. 2. Aus der Kongruenz aller Somen folgt ferner die aller sie zusammensetzenden Gebilde wie z. B. der Speere.

Ganz anders ist der Vorgang Hilberts. Die ersten 5 unter seinen Kongruenzaxiomen befassen sich mit der Gleichheit von Strecken und Winkeln sowie der Eindeutigkeit ihres Auftragens im Soma. Das 6. sagt aus, daß zwei Dreiecke, die zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel paarweise gleich haben, auch die beiden anderen Winkel gleich haben, und stellt so einen Zusammenhang zwischen der Gleichheit von Strecken und Winkeln auf. Daraus, daß in diesen Axiomen alle Somen gleichberechtigt auftreten, folgt ihre Kongruenz.

Warum wurde dann der unseren prinzipiellen Überlegungen entsprechende Weg der schrittweisen Entwicklung oben plötzlich verlassen? — Diese Inkonsequenz ist nicht so arg, als es auf den ersten Blick aussieht. Wir konnten wohl nicht mit Veronese von Anfang an fordern, daß alle Punkte kongruent sind, da dies blos eine formale Definition der Geometrie gewesen wäre und keine Möglichkeit gegeben hätte, ihre Grundlehren zu entwickeln. Etwas anderes ist es, wenn wir von anderen Gebilden aussagen, daß sie in der Gesamtheit aller richtigen Sätze, in denen die Punkte gleichberechtigt auftreten, ebenfalls gleichberechtigt (d. h. kongruent) sind. Daraus lassen sich schon Folgerungen ziehen. Freilich ist noch die Frage zu beantworten, wie sich die Anwendung dieses Merkmals gestalten wird, wie wir bei irgend einem System von Dingen erkennen können, daß alle Somen kongruent sind. Das wird dann der Fall sein, wenn wir eine, sagen wir Transformation, angeben können, die jedes Soma in jedes andere überzuführen gestattet und der gegenüber alle Merkmale und Definitionen invariant sind. Eine solche Transformation werden wir bei den Schrauben finden.

Mit Hilfe der aufgestellten Merkmale kann man ohne Schwierigkeit alle Sätze über Kongruenz der Dreiecke beweisen und beherrscht folglich, ohne etwas über Stetigkeit vorausgesetzt zu haben (abgesehen von II. 3.), einen großen Teil der ebenen Geometrie. Z. B. kann jetzt die Existenz von rechten Winkeln bewiesen werden.[20]) $\overline{ab}$ sei irgend eine Strecke, c ein außerhalb ihrer Geraden liegender Punkt. Wir verbinden ihn mit a und b und erhalten so zwei Winkel $\sphericalangle\, cab$ und $\sphericalangle\, cba$. Sind beide gleich, so schreiben wir d für c. Ist dagegen etwa $\sphericalangle\, cab < \sphericalangle\, cba$, so tragen wir ersteren so als $\sphericalangle\, abd$ auf, daß $[bd]$ im $\sphericalangle\, abc$ liegt. Dann schneidet $[bd]$ nach den Anordnungssätzen $\overline{ac}$ in einem eigentlichen Punkte d. Nun spiegeln wir noch jeden der beiden gleichen Winkel an $[ab]$. Die neuen Schenkel schneiden sich in

[20]) Einen anderen Beweis, der nur für die euklidische Geometrie gilt, gibt Schur, Math. Ann. 58, 1904.

einem eigentlichen Punkte e. $[de]$ schneidet dann, da d und e auf verschiedenen Seiten von $[ab]$ liegen, diese Gerade in einem eigentlichen Punkte m.[21] Läge m außerhalb $\overline{ab}$, so läge nach den Anordnungssätzen einer der Punkte a und b zwischen dem anderen und m. Da aber bei Umkehrung der Strecke m fest bleibt, ist $\overline{am} = \overline{bm}$. Da ferner von diesen zwei Strecken eine ganz in der anderen enthalten ist, ergibt sich ein Widerspruch mit III. 2. und es folgt, daß m in $\overline{ab}$ liegt. Daraus folgt wieder, daß die Winkel $\sphericalangle\, amd$ und $\sphericalangle\, bmd$ nicht derselbe Winkel sind. Mit Hilfe der Sätze über Dreieckskongruenz und des Satzes, daß gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüberliegen, folgt leicht, daß $\sphericalangle\, amd = \sphericalangle\, bmd$ ist, womit die Existenz des rechten Winkels nachgewiesen ist. Im Falle als keine uneigentlichen Punkte existieren, werden die Überlegungen ein wenig umständlicher. Es sei wegen des folgenden noch einmal darauf hingewiesen, daß der Beweis nur unter Zuhilfenahme der Anordnungssätze gelang.

Um die Unabhängigkeit seines Axioms III. 6. von den vorhergehenden zu beweisen, stellt Hilbert eine Geometrie auf, in der alle diese, aber nicht mehr III. 6. gilt. Das Wesen dieses Beweises liegt nach E. Meyer[22] in folgendem: der absolute Kegelschnitt der Ebene hat drei Aufgaben zu erfüllen. Erstens hat er die Maßbestimmung für die Strecke, zweitens die für den Winkel zu liefern und drittens hat er die eigentlichen von den uneigentlichen Punkten zu trennen. Läßt man in der projektiven Ebene den die 1. Aufgabe erfüllenden Kegelschnitt mit dem die 3. aber nicht mit dem die 2. erfüllenden zusammenfallen, so ist klar, daß alle III. 6. vorangehenden Axiome gelten. Daß III. 6. nicht gilt, wird durch Beispiele gezeigt. Man gelangt so sogar zu Geometrien, in denen nicht alle Punkte kongruent sind, insofern als nicht zu jedem Dreieck ein kongruentes gezeichnet werden kann, in dem ein bestimmter Punkt Eckpunkt ist.

Wir haben noch die Existenz jener Transformation, von der oben die Rede war, für Schrauben nachzuweisen. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen. Wir haben erkannt, daß zwei von nicht parallelen Geraden getragene Schrauben mit endlichen Parametern ein Büschel bestimmen, dessen Schrauben von Geraden getragen werden, deren Richtungen die eines Strahlenbüschels erfüllen. Ebenso erkennt man, daß in den ausgeschlossenen Fällen die Träger jener Schrauben des Büschels, die einen endlichen Parameter haben, zueinander parallel sind. Verbinden wir ein derartiges Büschel mit einer außerhalb liegenden Schraube endlichen Parameters, so erhalten wir folglich ein Netz, dessen Schrauben mit endlichem Parameter von Geraden getragen werden, die alle zu einer und derselben Ebene parallel sind, deren Richtung durch die der parallelen Träger und die des Trägers der hinzu-

[21] Hilbert, 3. Aufl., p. 6—7.
[22] Math. Ann. 64, 1907.

gekommenen Schraube' bestimmt ist. In Ausnahmefällen werden nun alle Träger untereinander parallel. Nehmen wir nun drei Schrauben mit endlichen Parametern an, deren Träger nicht zu einer Ebene parallel sind, so kann das durch sie bestimmte Netz kein Büschel enthalten, dessen Schrauben mit endlichem Parameter parallele Träger besitzen. Ein solches Netz nennen wir allgemein. Die Richtungen der seine Schrauben tragenden Geraden erfüllen die Richtungen eines Strahlenbündels. Als Entfernung zweier Schrauben definieren wir den Winkel ihrer Träger, als Winkel zweier Büschel die Entfernung der beiden ihnen angehörigen Schrauben, die von der ihnen gemeinsamen Schraube die Entfernung $\frac{\pi}{2}$ haben. Nunmehr sehen wir uns nach den gesuchten Transformationen um. Solche sind alle Bewegungen und Spiegelungen des Raumes, die Multiplikationen aller Parameter mit demselben Faktor, ihre Vergrößerung um denselben Betrag u. a. m. Die beiden zuletzt genannten Transformationen brauchen wir hier nicht, dagegen ganz andere, von denen wir auf folgendem Wege ein klares Bild bekommen: Wir nehmen ein Schraubenbüschel $\mathfrak{B}$ und eine außerhalb liegende Schraube $\mathfrak{S}$ an, die ein allgemeines Netz definieren. Dann halten wir $\mathfrak{B}$ fest ändern aber kontinuierlich den Parameter von $\mathfrak{S}$. Dabei geht das Netz kontinuierlich in ein anderes über, ohne daß Verknüpfung, Anordnung Entfernung und Winkel geändert werden, so lange nur der Parameter von $\mathfrak{S}$ endlich bleibt. Dasselbe gilt, wenn wir $\mathfrak{S}$ parallel verschieben. Das Schraubensoma haben wir durch ein Büschel $\mathfrak{B}$, eine ihm angehörende Schraube $\mathfrak{S}_1$, eine Richtung auf ihrem Träger und einen Durchlaufungssinn in $\mathfrak{B}$ zu definieren. Letzteren können wir dadurch ersetzen, daß wir eine Schraube $\mathfrak{S}_2$ in $\mathfrak{B}$ angeben, die von $\mathfrak{S}_1$ eine ein für allemal fest gewählte von $\frac{\pi}{2}$ verschiedene Entfernung in der ausgezeichneten Richtung hat. Wir werden beweisen, daß wir irgend zwei Somen eines allgemeinen Netzes mit Hilfe der oben angegebenen Transformationen ineinander überführen können, wobei wir freilich aus dem betrachteten Netze heraustreten werden. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ seien die den beiden Somen angehörenden Büschel, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}'_1$, $\mathfrak{S}'_2$ die anzugebenden Schrauben. Das Netz bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{N}'$, je nachdem ob wir $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B}'$ als ihm angehörig betrachten. Zunächst bewegen wir $\mathfrak{N}'$ so, daß der Träger von $\mathfrak{S}'_1$ auch der Richtung nach mit dem von $\mathfrak{S}_1$ zusammenfällt. Durch eine Drehung von $\mathfrak{N}'$ um diesen jetzt gemeinsamen Träger kann es dann erreicht werden, daß der Träger von $\mathfrak{S}'_2$ parallel zu dem von $\mathfrak{S}_2$ wird. Ist $\mathfrak{S}'$ eine beliebige $\mathfrak{B}'$ nicht angehörige Schraube von $\mathfrak{N}'$, so transformieren wir nunmehr $\mathfrak{N}'$, indem wir das Büschel [$\mathfrak{S}'_1$ $\mathfrak{S}'$] festhalten und nacheinander Träger und Parameter von $\mathfrak{S}'_2$ in die von $\mathfrak{S}_2$ übergehen lassen und indem wir [$\mathfrak{S}_2$ $\mathfrak{S}'$] festhalten und den Parameter von $\mathfrak{S}'_1$ in den von $\mathfrak{S}_1$ übergehen lassen. Die beiden Somen sind jetzt identisch. Da die Richtungen der Träger sowohl der Schrauben von $\mathfrak{N}$ als der von $\mathfrak{N}'$ die Richtungen eines Strahlenbündels erfüllen, so folgt, daß es in $\mathfrak{N}$ eine Schraube $\mathfrak{S}$ gibt, deren Träger zu dem von $\mathfrak{S}'$ parallel ist. Führen wir endlich $\mathfrak{S}'$ in $\mathfrak{S}$ über, indem wir $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$ festhalten, so wird $\mathfrak{N}'$ mit $\mathfrak{N}$ identisch. Damit haben wir aber die Kongruenz aller Somen eines allgemeinen Schraubennetzes nachgewiesen. Da auch die Merkmale der Stetigkeit und Meßbarkeit im Schraubennetz selbstverständlich erfüllt sind, so können wir als Resultat den Satz aussprechen: „Die Geometrie im allgemeinen Schraubennetz ist unter den zu Grunde gelegten Definitionen von Abstand und Winkel identisch mit der elliptischen Geometrie in der einseitigen Ebene.“[23])

Verknüpfung der uneigentlichen Elemente.

Der gebräuchliche Weg, die Verknüpfungssätze für die uneigentlichen Elemente zu beweisen, ist folgender: Neben den ebenen werden auch die räumlichen Verknüpfungsaxiome aufgestellt. Die Desarguessche Figur, die aus zwei perspektiven Dreiecken besteht, von denen zu zeigen ist, daß entsprechende Seiten sich in Punkten einer Geraden schneiden, erkennt man leicht als Projektion einer Pyramide, die von zwei Ebenen in zwei Dreiecken geschnitten wird, deren entsprechende Seiten sich in Punkten der Schnittgeraden jener Ebenen schneiden. Um aber die Ausgangselemente jeder Desarguesschen Figur als Projektionen entsprechender eigentlicher Elemente der zugehörigen räumlichen Figur zu erkennen, sind Anordnungssätze notwendig, so daß Anordnungsaxiome, insbesondere das ebene, nicht zu entbehren sind. Zeichnet man nun zwei Dreiecke, deren Seiten sich paarweise in Punkten einer Geraden schneiden, bei denen sich aber die Verbindungslinien entsprechender Ecken nicht in einem eigentlichen Punkte schneiden, so werden wir von diesen sagen, daß sie sich in demselben uneigentlichen Punkte schneiden. Durch passende Wahl der Dreiecke können wir dann jeden eigentlichen Punkt der Ebene mit dem uneigentlichen Schnittpunkt zweier Geraden verbinden. Um aber zu zeigen, daß diese Verbindungsgerade eindeutig bestimmt ist, muß man erfahrungsgemäß noch einmal in den Raum zurückgehen und aus dem Desarguesschen Satz für Bündel folgern, daß zwei Bündel, die die Punkte einer Ebene ε projizieren, dadurch so auf einander bezogen sind, daß drei Geraden des einen Bündels, die in einer Ebene liegen, immer drei ebensolche des zweiten entsprechen, auch wenn die Ebene ε von ihnen in uneigentlichen Punkten geschnitten wird. Ebenso folgen auch die übrigen Verknüpfungssätze.

Der andere Weg ist der schon erwähnte ebene. Der Grundgedanke bei ihm ist der, daß alle Lote zu einer Geraden durch

[23]) Dieser Satz ist selbstverständlich, sowie man nur weiß, daß die Richtungen der Träger eines allgemeinen Schraubennetzes ein Strahlenbündel erfüllen. Oben handelte es sich mir darum, die Anwendung von III. 1. zu erläutern.

denselben uneigentlichen Punkt gehen, den wir als absoluten Pol der Geraden bezeichnen wollen. Eine uneigentliche Gerade ist dann zu definieren als der Ort der absoluten Pole aller Geraden durch einen Punkt. Daß die neue Definition des uneigentlichen Punktes mit der früher gegebenen zusammenfällt, folgt aus dem Satze, daß zwei sich nicht in einem eigentlichen Punkte schneidende Geraden immer ein Gemeinlot besitzen. Daraus folgt zugleich, daß zwei uneigentliche Punkte immer eine Verbindungsgerade besitzen u. s. f. Dieser Gedankengang wurde von Hilbert angegeben und von Hjelmslev genauer ausgeführt. Die Bemerkung Hjelmslevs, bei seinen Entwicklungen von den Anordnungsaxiomen kaum Gebrauch machen zu müssen, ist keineswegs so aufzufassen, als ob zu erwarten wäre, daß es gelingen könnte, sie als entbehrlich nachzuweisen. Sie sind vielmehr, wie schon hervorgehoben wurde, zum Beweise der Existenz rechter Winkel notwendig, die freilich Hjelmslev als Axiom annimmt. Ferner enthält das von Hjelmslev vorgeschlagene Axiom, daß die Mittelpunkte der Dreiecksseiten nicht auf einer Geraden liegen, Anordnungselemente und gilt in der elliptischen Geometrie nicht mehr.

Aus dem Beweise der Verknüpfungssätze für uneigentliche Elemente folgt, daß alle Punkte bezw. Geraden, ob sie nun eigentlich sind oder uneigentlich, in der auf den Merkmalen der Verknüpfung und Anordnung begründeten Geometrie fundamental sind. Diese Geometrie ist, wenn wir noch ein Stetigkeitsmerkmal hinzunehmen, die projektive Geometrie. In der metrischen Geometrie sind nur mehr alle eigentlichen Punkte bezw. Geraden fundamental.