

Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni.

(Di FILIPPO SIBIRANI, a Milano.)

Lo studio della rappresentazione approssimata delle funzioni è stato di recente largamente ripreso, ed i lavori in proposito si possono distinguere in due categorie: quelli che hanno origine dal problema della rappresentazione approssimata di una funzione per mezzo di un polinomio, trattato per la prima volta da WEIERSTRASS (*) e quelli che traggono la loro origine dal problema di rappresentare una funzione mediante un polinomio che fra tutti quelli dello stesso grado offra la maggiore approssimazione possibile, problema abordato da TCHEBYCEV (**).

Alla prima categoria appartengono i lavori di LANDAU (***), LEBESGUE (****),

(*) WEIERSTRASS, *Berliner Sitzungsberichte*, 1885. Sopra questo argomento si possono vedere i lavori di LERCH: *Rozprawy české Akademie*, t. I, n.º 33, t. II, n.º 9; *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel*, *Acta Mathematica*, t. XXVII. — PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I. — VOLTERRA, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1897. — LEBESGUE, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1898. — MITTAG-LEFFLER, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1900. — RUNGE, *Acta Mathematica*, 1885. — INGRAMI, *Sulla rappresentazione analitica per una funzione reale di due variabili reali*. Tipografia Gamberini e Parmeggiani, Bologna, 1889.

(**) TCHEBYCEV, *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*. Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de S. Petersbourg, t. IX. Sopra lo stesso argomento veggasi: KIRCHBERGER, *Inaugural-Dissertation: Ueber Tchebycheffsche Annäherungsmethoden*. Göttingen, 1902, od anche: *Mathematische Annalen*, B. 57. — BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et de développements en séries de polynomes*. Paris, 1905.

(***) LANDAU, *Ueber die Approximation einer stetigen Function durch eine ganze rationale Function*. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXVI, 1908.

(****) LEBESGUE, *Sur la représentation approchée des fonctions*. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXVI, 1908.

DE LA VALLÉE-POUSSIN (*): alla seconda i lavori di YOUNG (**), FRÉCHET (***) e TONELLI (****).

Nei lavori di YOUNG e FRÉCHET sono estesi i metodi di BOREL (vedi la fatta citazione) alla rappresentazione di una funzione $f(x)$ per mezzo di assegnate funzioni contenenti un certo numero di parametri e soddisfacenti a determinate condizioni, da cui discende, in particolare, la rappresentazione per polinomi trigonometrici. Nel lavoro di TONELLI i risultati relativi alla rappresentazione approssimata di una funzione per polinomi razionali interi sono ottenuti con metodo diverso da quello tenuto da BOREL, sfruttando abilmente la ben nota proprietà del determinante di WANDERMONDE di non annullarsi quando i suoi elementi sono disuguali. Il TONELLI estende poi le considerazioni dei polinomi di approssimazione alle funzioni di due variabili (dimostrando, a differenza del caso di una sola variabile, la non unicità del polinomio d'approssimazione di un dato grado per un'assegnata funzione) ed alle funzioni di variabile complessa. Ma quando egli viene a trattare della rappresentazione approssimata di una funzione mediante polinomi trigonometrici, deve ricorrere al metodo di BOREL, mancandogli il sussidio della conoscenza di una proprietà analoga alla già detta del determinante di WANDERMONDE per un determinante analogo che si può considerare in quest'ultimo problema.

La lettura della Nota di TONELLI mi ha suggerito di vedere se i risultati relativi ai polinomi razionali interi si potevano estendere ai polinomi trigonometrici collo stesso procedimento tenuto per quelli, che appare dotato di grandissima semplicità; ed io ho constatata la possibilità di ciò ed insieme di una generalizzazione, di cui ecco la genesi.

Un polinomio razionale intero di due variabili x e y di grado n si può riguardare come combinazione lineare delle $\binom{2+n}{2}$ funzioni $x^n, y^n, x^{n-1}y,$

(*) DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier*. Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1908.

(**) J. W. YOUNG, *General theory of approximation by functions involving a given number of arbitrary parameters*. Transactions of the American Mathematical Society, 1907.

(***) M. FRÉCHET, *Sur l'approximation des fonctions par des suites trigonometriques limitées*. Comptes Rendus, 1907; *Sur l'approximation des fonctions continues périodiques par les sommes trigonométriques limitées*; Annales de l'École Normale Supérieure.

(****) L. TONELLI, *I polinomi di approssimazione di Tchebychev*. Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. XV.

$x^{n-2}y^2, \dots, xy, x, y, 1$, alla stessa guisa che un polinomio trigonometrico di ordine n delle due variabili x e y si può riguardare come combinazione lineare delle $2n^2 + 2n + 1$ funzioni $\cos r x \cos s y, \cos r x \sin s y, \sin r x \cos s y, \sin r x \sin s y$ ($r = 0, 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, n - r$); ed analogamente dicasi dei polinomi razionali interi o trigonometrici di una variabile.

Questa osservazione mi ha suggerito di considerare in luogo di combinazioni di potenze o prodotti di potenze delle variabili ed in luogo di combinazioni di prodotti di funzioni circolari di una o due variabili, combinazioni lineari di funzioni di una o più variabili, ed esaminare quali dei risultati contenuti nella Nota del TONELLI possono essere trasportati alle combinazioni lineari di funzioni e sotto quali condizioni per queste ultime. I risultati che così si ottengono, oltrechè contenere i già noti, relativi ai polinomi razionali o trigonometrici, si possono tosto estendere a combinazioni di funzioni iperboliche, di funzioni sferiche, cilindriche, ecc.

Questo è l'oggetto della presente Nota: di parecchie proposizioni che enuncierò nel seguito non sono date le dimostrazioni o sono accennate per sommi capi, perchè esse possono condursi come quelle date dal dott. TONELLI per le proposizioni analoghe sui polinomi, salvo le naturali modificazioni imposte dalla generalizzazione stessa.

1. — Si considerino in un campo A , n funzioni delle due variabili x e y , finite e continue, ad un valore

$$\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_n(x, y) \quad (1)$$

per le quali supporremo che il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1 y_1) & \varphi_2(x_1 y_1) & \dots & \varphi_n(x_1 y_1) \\ \varphi_1(x_2 y_2) & \varphi_2(x_2 y_2) & \dots & \varphi_n(x_2 y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n y_n) & \varphi_2(x_n y_n) & \dots & \varphi_n(x_n y_n) \end{vmatrix} \quad (2)$$

non sia sempre nullo per qualsiasi sistema di n punti $(x_i y_i)$ scelti in A .

Dicesi combinazione lineare delle n funzioni (1) una espressione

$$P_n(x, y) = p_1 \varphi_1(x, y) + p_2 \varphi_2(x, y) + \dots + p_n \varphi_n(x, y)$$

ove $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ sono costanti.

Una combinazione lineare $P_n(x, y)$ è determinata dagli n valori che essa assume in n punti $(x_i y_i)$ in cui il determinante (2) è diverso da zero. Come

conseguenza, se due combinazioni lineari della (1) coincidono in n punti in cui il determinante (2) sia diverso da zero, coincidono ovunque.

Le stesse due proprietà hanno le combinazioni lineari $P_n(x)$ di n funzioni

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (3)$$

finite, continue, ad un valore, in un intervallo $a \dots b$, supposto che il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \quad (4)$$

non sia sempre nullo per qualsiasi sistema di n punti scelti in $a \dots b$ (*).

Se il determinante (4) è per qualsiasi sistema di n punti scelti in $a \dots b$ diverso da zero, allora una combinazione lineare delle (3)

$$P_n(x) = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x) + \dots + p_n \varphi_n(x)$$

è determinata dai valori che essa assume in n punti qualsiasi di $a \dots b$; e conseguentemente coincidono due combinazioni lineari delle (3) se in n punti qualsivogliano di $a \dots b$ coincidono.

Diremo che le (3) costituiscono un *sistema regolare* di n funzioni, quando accada che il determinante (4) è diverso da zero per qualunque sistema di n punti in $a \dots b$ e quando, per ogni $m \geq 2$ ci sia almeno un minore di ordine m diverso da zero pure per qualunque sistema di m punti scelti in $a \dots b$. Una combinazione lineare di n funzioni costituenti un sistema regolare è individuata, all'infuori di un coefficiente di proporzionalità, dalla cono-

(*) È già implicita la condizione che le funzioni siano linearmente indipendenti, giacchè, se non fossero, ci sarebbe un sistema di valori per i parametri p per cui si avrebbe identicamente $p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x) + \dots + p_n \varphi_n(x) = 0$; e quindi anche

$$\frac{p_1}{p_i} \varphi_1 + \frac{p_2}{p_i} \varphi_2 + \dots + \varphi_i + \dots + \frac{p_n}{p_i} \varphi_n = 0$$

con $p_i \neq 0$. Se nel determinante si somma alla colonna i -esima le altre colonne r -esime ($r = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) moltiplicate per $\frac{p_r}{p_i}$ si ha una colonna di zeri e quindi il determinante è identicamente nullo.

senza di $n - 1$ radici. Basta osservare che se sono x_1, x_2, \dots, x_{n-1} le radici, il sistema

$$p_1 \varphi_1(x_r) + p_2 \varphi_2(x_r) + \dots + p_n \varphi_n(x_r) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n - 1)$$

ove si considerino p_1, p_2, \dots, p_n come incognite, ha per caratteristica $n - 1$. E facilmente si mostra come si possa sempre costruire una combinazione di n date funzioni costituenti in $a \dots b$ un sistema regolare, che si annulla in $n - 1$ punti assegnati di detto intervallo.

Costituiscono, ad es., un sistema regolare le n funzioni

$$[\varphi(x)]^k, [\varphi(x)]^{k+1}, \dots, [\varphi(x)]^{k+n-1}$$

con k numero positivo qualunque e φ funzione crescente e non mai nulla in $a \dots b$.

Le $2n + 1$ funzioni $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ costituiscono un sistema regolare di funzioni in ogni intervallo di ampiezza $2\pi - \sigma$ con σ piccolo a piacere (*). Le $2n + 1$ funzioni $1, \sinh x, \cosh x, \sinh 2x, \cosh 2x, \dots, \sinh nx, \cosh nx$ (funzioni iperboliche) costituiscono un sistema regolare di funzioni in qualunque intervallo (**). n funzioni razionali intere

$$\psi_r = b_{0,r} x^{n-1} + b_{1,r} x^{n-2} + \dots + b_{n-2,r} x + b_{n-1,r} \quad (r = 1, 2, \dots, n - 1)$$

di grado non superiore ad $n - 1$ costituiscono in qualunque intervallo un sistema regolare di funzioni se il determinante

$$\begin{vmatrix} b_{0,1} & b_{1,1} & \dots & b_{n-1,1} \\ b_{0,2} & b_{1,2} & \dots & b_{n-1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{0,n} & b_{1,n} & \dots & b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

è disuguale da zero (***). In particolare si possono prendere per funzioni ψ_r

(*) La dimostrazione risulta da una mia Nota: *Sui polinomi trigonometrici ed un determinante ad essi relativo*. Giornale di Matematiche di Battaglini, 1909.

(**) La dimostrazione si fa come per le funzioni circolari.

(***) Ricordando la regola di moltiplicazione dei determinanti, si vede che il determinante (4) relativo a queste funzioni si scinde nel prodotto di un determinante di WANDERMONDE pel determinante sopra scritto.

le funzioni sferiche di prima specie di LEGENDRE di ordine r

$$X^{(r)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{r!} \left\{ z^r - \frac{r(r-1)}{2(2r-1)} z^{r-2} + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2r-1)(2r-2)} z^{r-4} - \dots \right\}$$

perchè in tal caso il determinante di dianzi si riduce a

$$\frac{1^n \cdot 3^{n-1} \cdot 5^{n-2} \dots (2n-3)^2 (2n-1)}{0! 1! 2! 3! \dots n!}$$

Formano pure, in un qualunque intervallo che non contenga lo zero, un sistema regolare di n funzioni le funzioni di BESSEL di 2.^a specie $O_{(x)}^{(0)}$, $O_{(x)}^{(1)}$, $O_{(x)}^{(2)}$, ..., $O_{(x)}^{(n-1)}$ ove è

$$O_{(x)}^{(0)} = \frac{1}{x}; \quad O_{(x)}^{(r)} = \frac{r}{x} \sum_{k=0}^r \frac{2r-1-k}{k!} \left(\frac{2}{x}\right)^{2(r-k)};$$

$$O_{(x)}^{(r+n)} = \frac{2r+1}{2x} \sum_{k=0}^r \frac{2r-k}{k!} \left(\frac{2}{x}\right)^{2(r-k)+1}$$

2. — Tre proposizioni dimostrate da TONELLI sui polinomi in generale, si estendono subito alle combinazioni lineari delle funzioni (1) o (3).

a) *Se in un campo A (finito) si ha una combinazione lineare $P_n(x, y)$ (o $P_n(x)$) i coefficienti p non possono, in modulo, superare un certo numero finito dipendente solo da n e dal massimo modulo di $P_n(x, y)$ (o di $P_n(x)$).*

Si prendano n punti (x_i, y_i) pei quali il determinante (2) sia diverso da zero e si considerino i valori di $P_n(x, y)$ in tali punti. I coefficienti p sono determinati dal sistema

$$p_1 \varphi_1(x_i, y_i) + p_2 \varphi_2(x_i, y_i) + \dots + p_n \varphi_n(x_i, y_i) = P_n(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ora indicando con D il modulo del determinante (2) calcolato nei punti considerati, con Q il massimo modulo dei suoi minori di ordine $n-1$, e con M il massimo modulo di $P_n(x, y)$, si vede, applicando la regola di CRAMER per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari, che

$$|p_r| < \frac{nMQ}{D}$$

qualunque sia r .

b) *Una varietà $G \equiv \{P_n(x, y)\}$ di combinazioni lineari delle (1) tutte contenute fra due limiti finiti per le quali si ammetta la finitezza delle derivate parziali prime, è una varietà di funzioni egualmente continue.*

Poichè pel teorema precedente esiste un numero finito P tale che qualunque sia la combinazione lineare, risulta $|p_r| < P \cdot M$, ne consegue che se R è il massimo modulo delle derivate parziali prime rispetto ad x e ad y delle n funzioni (1), è

$$\left| \frac{\partial P_n(x, y)}{\partial x} \right| < n \cdot P \cdot M \cdot R \quad \left| \frac{\partial P_n(x, y)}{\partial y} \right| < n \cdot P \cdot M \cdot R.$$

Segue da un teorema di ARZELÀ (*) che la varietà G costituisce una varietà di funzioni egualmente continue. Lo stesso teorema vale per una varietà di $P_n(x)$, ammessa la finitezza delle derivate delle (3).

c) Se in un determinato campo A si ha una varietà di combinazioni lineari delle (1) $G \equiv \{P_n(x, y)\}$, sotto le ipotesi del teorema precedente, ogni funzione limite di tale varietà è una combinazione lineare delle (1).

Per la dimostrazione rimandiamo a quella della proposizione del n.º 3, § II, 1.^a parte della Nota citata di TONELLI. Lo stesso teorema vale per le combinazioni lineari delle funzioni (3). Si può anche solo supporre per le (3) la finitezza dei rapporti incrementali e per le (1) quella dei rapporti incrementali parziali.

3. — Sia $f(x, y)$ una funzione reale delle variabili reali x e y data in un campo A ed ivi finita, continua e ad un valore. Sia

$$P_n(x, y) = p_1 \varphi_1(x, y) + p_2 \varphi_2(x, y) + \dots + p_n \varphi_n(x, y)$$

una combinazione lineare delle n funzioni (1).

La differenza

$$f(x, y) - P_n(x, y)$$

sarà funzione finita e continua, insieme con il suo modulo, nel campo A ; perciò $|f(x, y) - P_n(x, y)|$ raggiungerà almeno una volta in A il suo massimo valore m .

Questo massimo m che varia al variare dei coefficienti della combinazione $P_n(x, y)$, può riguardarsi come funzione di essi coefficienti $m(p_1, p_2, \dots, p_n)$. E poichè m è sempre positivo o nullo, esso ammetterà, considerato come funzione dei parametri p , un limite inferiore $\mu \geq 0$.

(*) ARZELÀ, *Sulle funzioni di linee*. Memoria della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 1895.

Se esiste un sistema di valori $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ pei parametri p tale che sia

$$|f(x, y) - \Pi_n(x, y)| \leq \mu$$

essendo

$$\Pi_n(x, y) = \pi_1 \varphi_1(x, y) + \pi_2 \varphi_2(x, y) + \dots + \pi_n \varphi_n(x, y)$$

si dirà che $\Pi_n(x, y)$ è una *combinazione lineare delle (1) d'approssimazione della funzione $f(x, y)$* .

Eguale definizione vale per le *combinazioni lineari delle (3) di approssimazione di una data funzione $f(x)$* finita, continua e ad un valore in $a \dots b$:

4. — Seguendo il procedimento usato da TONELLI nel n.º 5 del § II della p. p., si può dimostrare che per la funzione $f(x, y)$ (o per la $f(x)$) sempre esiste almeno una combinazione lineare delle n funzioni (1) (o delle (3)) di approssimazione.

Per le proposizioni seguenti le dimostrazioni possono condursi nello stesso modo di quelle delle proposizioni dei n.º 6, 7, 8 del § II p. p. del citato lavoro.

Se $\Pi_n(x, y)$ è una *combinazione lineare delle (1) di approssimazione di $f(x, y)$* , e $c \Pi_n(x, y)$ ove c è una costante, è una *combinazione d'approssimazione delle stesse funzioni (1) di $c f(x, y)$* .

Se $\Pi_n(x, y)$ è una *combinazione lineare delle (1) di approssimazione di $f(x, y)$* e $P_n(x, y)$ è una *combinazione qualunque delle (1)*, $\Pi_n(x, y) + P_n(x, y)$ è una *combinazione delle (1) d'approssimazione di $f(x, y) + P_n(x, y)$* .

Il massimo μ di $|f(x, y) - \Pi_n(x, y)|$ è uguale tanto al massimo quanto al valore assoluto del minimo di $f(x, y) - \Pi_n(x, y)$.

Valgono tre proposizioni analoghe per le combinazioni lineari delle n funzioni (3) d'approssimazione di $f(x)$.

Se $P_n(x, y)$ è una *combinazione lineare delle (1)* per la quale in un insieme E di punti (\bar{x}, \bar{y}) si ha $|f(\bar{x}, \bar{y}) - P_n(\bar{x}, \bar{y})| = \mu$ e si indica con \bar{s} un numero, diverso da zero, avente segno contrario a quello di $f(\bar{x}, \bar{y}) - P_n(\bar{x}, \bar{y})$, si può dimostrare che

condizione necessaria e sufficiente acciò $P_n(x, y)$ sia una combinazione delle (1) di approssimazione della $f(x, y)$ è che non si possono trovare contemporaneamente un sistema di n numeri p_1, p_2, \dots, p_n ed un sistema di valori \bar{s} , i cui moduli siano compresi fra due numeri positivi s e S , tali che sia su tutto E

$$p_1 \varphi_1(\bar{x}, \bar{y}) + p_2 \varphi_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots + p_n \varphi_n(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{s}. \quad (5)$$

Che la condizione sia necessaria si prova così: supposto che $P_n(x, y)$ sia una combinazione di approssimazione e supposto esistere il sistema di valori \bar{s} ed il sistema dei numeri p soddisfacenti su tutto E alla (5), si formi la combinazione lineare delle (1)

$$\bar{P}_n(x, y) = p_1 \varphi_1(x, y) + p_2 \varphi_2 + \dots + p_n \varphi_n(x, y)$$

(i p essendo quelli che entrano nella (5)); allora si dimostra — e per la dimostrazione veggasi il n.º 9, § II della p. p. della Nota più volte citata — che col prendere ω sufficientemente piccolo, la combinazione

$$P_n(x, y) - \omega \bar{P}_n(x, y)$$

è tale da verificare, in tutto A in cui le (1) sono definite, la relazione

$$|f(x, y) - \{P_n(x, y) - \omega \bar{P}_n(x, y)\}| < \mu' < \mu;$$

il che è assurdo, essendo $P_n(x, y)$ una combinazione di approssimazione.

Che la condizione sia sufficiente si prova in questo modo. Si supponga che non esistano i numeri s e p da soddisfare su tutto E alla (5); supposto ancora che $P_n(x, y)$ non sia combinazione di approssimazione, ma lo sia un'altra combinazione $P'_n(x, y)$, il massimo di $|f(x, y) - P'_n(x, y)|$ sarà un numero μ' minore di μ : perciò la differenza $P_n(x, y) - P'_n(x, y)$ sarà diverso da zero e di segno contrario a quello della differenza $f(\bar{x}\bar{y}) - P_n(\bar{x}\bar{y})$. Allora se con p' si indicano i coefficienti di $P_n(x, y)$ e con p'' , quelli di $P'(x, y)$, si ha su tutto E

$$(p'_1 - p''_1) \varphi_1(\bar{x}\bar{y}) + (p'_2 - p''_2) \varphi_2(\bar{x}\bar{y}) + \dots + (p'_n - p''_n) \varphi_n(\bar{x}\bar{y}) = \bar{s}$$

ove è $\bar{s} = P_n(\bar{x}\bar{y}) - P'_n(\bar{x}\bar{y})$; $\mu - \mu' \leq \bar{s} < 2\mu$, ciò che contraddice al supposto.

5. — Per una data funzione $f(x, y)$ può darsi che ci sia più di una combinazione lineare delle (1) d'approssimazione: basta ricordare la possibilità che esistano infiniti polinomi d'approssimazione di TCHEBYCEV di una stessa funzione $f(x, y)$ stabilita da TONELLI.

Se $\Pi_n(x, y)$ e $\bar{\Pi}_n(x, y)$ sono due combinazioni lineari delle (1) d'approssimazione per la funzione $f(x, y)$ ed m è un numero intero qualunque, è

pure d'approssimazione ogni combinazione

$$\frac{(2^m - 1) \Pi_n(x, y) - \bar{\Pi}_n(x, y)}{2^m}$$

È facile poi vedere che

l'insieme di tutte le combinazioni delle n funzioni (1) d'approssimazione di una data funzione continua $f(x, y)$, data in un campo A , costituisce una varietà di funzioni egualmente continue, se per le (1) si ammette la finitezza delle derivate parziali prime, o, per lo meno, quella dei rapporti incrementali parziali.

Basta perciò osservare che tutte codeste combinazioni sono comprese fra $-(M + \mu)$ e $M + \mu$, essendo M il massimo modulo di $f(x, y)$ in A e μ avendo il solito significato.

Allora per la varietà delle combinazioni $G \equiv \{\Pi_n(x, y)\}$ di approssimazione della $f(x, y)$ esiste una funzione limite superiore $U(x, y)$ ed una limite inferiore $V(x, y)$ entrambe continue, per le quali in tutto A si ha

$$|f(x, y) - U(x, y)| \leq \mu; \quad |f(x, y) - V(x, y)| \leq \mu; \quad |U(x, y) - V(x, y)| \leq 2\mu.$$

Se $U(x, y)$ e $V(x, y)$ coincidessero in tutto A , od anche in una porzione superficiale ω del campo stesso comunque piccola, od infine in n punti che non appartengono a nessuna curva $P_n(x, y) = 0$, allora tutte le combinazioni d'approssimazione coinciderebbero, assumendo lo stesso valore o in tutto A , od in ω o negli n punti non appartenenti ad alcuna curva $P_n(x, y) = 0$: la combinazione delle (1) d'approssimazione per la $f(x, y)$ sarebbe unica.

Se ciò non accade, è facile provare che preso in A ad arbitrio un punto $\bar{x}\bar{y}$ e scelto un numero \bar{z} compreso fra $V(\bar{x}\bar{y})$ ed $U(\bar{x}\bar{y})$, sempre esiste una combinazione lineare d'approssimazione di G che in $\bar{x}\bar{y}$ assume il valore \bar{z} . Chiamando spazio compreso fra le superfici $z = V(x, y)$ e $z = U(x, y)$ l'insieme dei punti $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ tali che $\bar{x}\bar{y}$ siano coordinate di un punto di A e \bar{z} sia compreso fra $V(\bar{x}\bar{y})$ e $U(\bar{x}\bar{y})$, si può dire, geometricamente, che le superfici $z = \Pi_n(x, y)$ riempiono tutto lo spazio compreso fra $z = V(x, y)$ e $z = U(x, y)$.

Per dimostrare ciò osserviamo che sempre si possono trovare due numeri z_1 e z_2 e due combinazioni della varietà G , $\Pi_n^{(1)}$ e $\Pi_n^{(2)}$ tali da aversi

$$V(\bar{x}\bar{y}) \leq z_1 = \Pi_n^{(1)}(\bar{x}\bar{y}) < \bar{z} < \Pi_n^{(2)}(\bar{x}\bar{y}) = z_2 \leq U(\bar{x}\bar{y});$$

d'altra parte la combinazione

$$\frac{(\bar{z} - z_1) \Pi_n^{(2)}(x, y) + (z_2 - \bar{z}) \Pi_n^{(1)}(x, y)}{z_2 - z_1}$$

che in $\bar{x}\bar{y}$ assume il valore \bar{z} è combinazione d'approssimazione e quindi appartiene a G ; inverso si ha

$$\begin{aligned} & \left| f(x, y) - \frac{(\bar{z} - z_1) \Pi_n^{(2)} + (z_2 - \bar{z}) \Pi_n^{(1)}}{z_2 - z_1} \right| \leq \\ & \leq \frac{|(\bar{z} - z_1)| \{f(x, y) - \Pi_n^{(2)}\}| + |(z_2 - \bar{z})| \{f(x, y) - \Pi_n^{(1)}\}|}{|z_2 - z_1|} \leq \mu. \end{aligned}$$

6. — Per le combinazioni di approssimazione di una funzione $f(x)$ quando le n funzioni (3) costituiscono un sistema regolare possiamo dimostrare alcune notevoli proposizioni.

Sia, come al solito, μ il massimo della differenza $|f(x) - \Pi_n(x)|$ in $a \dots b$ ove $\Pi_n(x)$ è una combinazione d'approssimazione la cui esistenza è già stata provata. Dimostriamo ora che

il numero dei punti di $a \dots b$ in cui la differenza sopradetta raggiunge il massimo μ è maggiore di n , se le (3) costituiscono un sistema regolare di n funzioni in $a \dots b$.

Siano $x_1, x_2, x_3, \dots, x_v$ i punti di $a \dots b$ in cui la differenza sopradetta raggiunge il massimo μ e si supponga $v \leq n$. Allora si consideri il sistema di v equazioni lineari nelle p

$$p_1 \varphi_1(x_i) + p_2 \varphi_2(x_i) + \dots + p_n \varphi_n(x_i) = \varepsilon_i \mu \quad (i = 1, 2, \dots, v) \quad (6)$$

ove $\varepsilon_i = 1$ se $f(x_i) - \Pi_n(x_i) = \mu$ o $\varepsilon_i = -1$ se $f(x_i) - \Pi_n(x_i) = -\mu$.

Questo sistema è possibile, perchè sotto le ipotesi che le (3) formino un sistema regolare, almeno un determinante di ordine v estratto dalla matrice dei coefficienti del sistema è diverso da zero, cosicchè la caratteristica di detta matrice è v : di più tutti i valori di p non possono essere nulli, perchè il sistema non è omogeneo.

Scelto un sistema di valori p_1, p_2, \dots, p_n che soddisfino al sistema (6), si formi la combinazione

$$P_n(x) = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x) + \dots + p_n \varphi_n(x).$$

Allora si dimostra che la combinazione $\Pi_n(x) + \omega P_n(x)$, scegliendo in

modo opportuno ω , soddisferebbe alla relazione

$$|f(x) - \{\Pi_n(x) + \omega P_n(x)\}| < \mu' < \mu$$

ciò che è assurdo essendo $\Pi_n(x)$ una combinazione d'approssimazione: per la dimostrazione veggasi quella del n.º 3, § I p. p. del lavoro di TONELLI. Dovranno dunque i punti essere più di ν ; e poichè altrettanto si può dire per ogni ν fino a che esso è minore od uguale ad n , la proposizione è dimostrata.

Supponiamo ora che le (3) siano funzioni periodiche di periodo $b - a$: esse non possono, secondo la definizione data, costituire in $a \dots b$ un sistema regolare di funzioni, giacchè il determinante (4) è identicamente nullo se si fa $x_r = a$, $x_s = b$. Ma se le funzioni stesse costituiscono in ogni intervallo $a \dots b - \sigma$, con σ piccolo a piacere, un sistema regolare, diremo che esse costituiscono un *sistema regolare di funzioni periodiche in $a \dots b$* . Supponiamo che anche la $f(x)$ abbia un periodo $b - a$: allora si dimostra:

Se $f(x)$ è periodica e di periodo $b - a$ e le (3) costituiscono in $a \dots b$ un sistema regolare di funzioni periodiche, il numero dei punti di ascisse non congrue rispetto al modulo $b - a$ in cui $|f(x) - \Pi_n(x)|$ raggiunge il suo massimo μ , è maggiore di n .

Se fra i punti x_1, x_2, \dots, x_ν non v'ha un estremo, si ripetono le considerazioni di dianzi per le quali si conclude che almeno $\nu + 1$ saranno i punti in discorso. Questo $(\nu + 1)$ -esimo punto può essere un estremo, ad es. a , nel qual caso anche nell'altro estremo b la suddetta differenza ha il valore μ . Si considera allora il sistema (6) relativo a questi $\nu + 1$ punti per la costruzione di $P_n(x)$ la quale, per la periodicità delle (3) avrà in b lo stesso valore che in a , epperò si toglieranno dall'intervallo $a \dots b$ (veggasi la citata dimostrazione) i ν intervalli δ di cui i punti x_1, x_2, \dots, x_ν sono punti di mezzo e i due intervalli $\frac{\delta}{2}$ di cui a e b sono estremi rispettivamente inferiore e superiore ed entro tutti i quali $|f(x) - \Pi_n(x)|$ e $P_n(x)$ oscillano per meno del numero prefissato ε . Si incorre ancora nell'assurdo della dimostrazione precedente, ciò che porta a concludere che un altro punto almeno oltre i segnati ci dev'essere in cui $|f(x) - \Pi_n(x)| = \mu$, necessariamente interno ad $a \dots b$.

Da queste due proposizioni discendono le due seguenti:

per una funzione finita e continua $f(x)$ in $a \dots b$ esiste una sola combinazione di approssimazione delle funzioni (3) costituenti nell'intervallo stesso un sistema regolare.

Se di codeste combinazioni ne esistessero due $\Pi_n(x)$, $\bar{\Pi}_n(x)$, dall'essere in $a \dots b$

$$|f(x) - \Pi_n(x)| \leq \mu \quad |f(x) - \bar{\Pi}_n(x)| \leq \mu$$

si deduce che è

$$\left| f(x) - \frac{\Pi_n(x) + \bar{\Pi}_n(x)}{2} \right| \leq \mu$$

ossia che $\frac{\Pi_n(x) + \bar{\Pi}_n(x)}{2}$ è combinazione lineare delle (3) pure di approssimazione per la $f(x)$. Di più se in un punto x_1 è

$$f(x_1) - \frac{\Pi_n(x_1) + \bar{\Pi}_n(x_1)}{2} = \mu$$

dev'essere

$$f(x_1) - \Pi_n(x_1) = \mu \quad \text{e} \quad f(x_1) - \bar{\Pi}_n(x_1) = \mu$$

e se la prima differenza fosse uguale a $-\mu$, anche le due successive sarebbero uguali a $-\mu$. I punti ove $f(x) - \frac{\Pi_n(x) + \bar{\Pi}_n(x)}{2}$ raggiunge i valori $\pm \mu$ sono in numero maggiore di n : ivi le due combinazioni $\Pi_n(x)$ e $\bar{\Pi}_n(x)$ coincidono, ma allora esse coincidono in tutto $a \dots b$.

Se $f(x)$ è periodica e di periodo $b - a$, e se le (3) costituiscono in $a \dots b$ un sistema regolare di funzioni periodiche, esiste per $f(x)$ una sola combinazione d'approssimazione delle (3).

Si perviene, con identico ragionamento, a concludere che se $\Pi_n(x)$ e $\bar{\Pi}_n(x)$ fossero due combinazioni d'approssimazione, coinciderebbero in n punti almeno non congrui rispetto al modulo $b - a$ e quindi in tutto $a \dots b$.

7. — Se conosciamo i punti $x_i y_i$ in cui $|f(x, y) - \Pi_n(x, y)|$ assume il massimo, formiamo la matrice

$$\varphi_1(x_i y_i) \quad \varphi_2(x_i y_i) \dots \varphi_n(x_i y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, \nu).$$

Se in essa un minore di ordine $\nu \leq n$ è diverso da zero, si prova (come nel caso delle n funzioni (3) costituenti un sistema regolare) che almeno in $\nu + 1$ punti $|f(x, y) - \Pi_n(x, y)|$ assume il massimo μ . Se $\nu = n$ la combinazione di approssimazione è unica: invero il supporre che $\Pi_n(x, y)$ e $\bar{\Pi}_n(x, y)$

fossero due combinazioni delle (1) di approssimazione per $f(x, y)$, porterebbe a concludere che $\Pi_n(x, y)$ e $\bar{\Pi}_n(x, y)$ coincidono in n punti in cui il determinante (2) è diverso da zero, cioè coincidono in tutto il campo A .

Se le funzioni di una variabile (3) non costituiscono un sistema regolare in $a \dots b$, nè, essendo periodica $f(x)$ di periodo $b - a$, costituiscono un sistema regolare di funzioni periodiche nello stesso intervallo, si può per esse ripetere ciò che abbiamo ora detto per le funzioni di due variabili.

8. — Sussiste ancora la proposizione seguente, per la cui dimostrazione veggasi il n. 18 del § II p. p. della Nota di TONELLI.

Se in A le (1) hanno derivate parziali (o rapporti incrementali parziali) finiti ed è data in A una funzione $f(x, y)$ continua, prefissato un numero η positivo piccolo a piacere, sempre si può trovare un numero pure positivo ε tale che per ogni combinazione $\Pi'_n(x, y)$ delle (1) d'approssimazione di una qualsiasi funzione $g(x, y)$ soddisfacente in A alla limitazione

$$|f(x, y) - g(x, y)| < \varepsilon$$

esista una combinazione $\Pi_n(x, y)$ delle (1) di approssimazione di $f(x, y)$ che soddisfi in A alla condizione

$$|\Pi_n(x, y) - \Pi'_n(x, y)| < \eta.$$

Analoga proposizione vale per le combinazioni d'approssimazione delle (3) di una funzione $f(x)$. Se poi le (3) sono tali che per ogni funzione $f(x)$ continua, esista una sola combinazione d'approssimazione delle (3) stesse, la corrispondenza fra le funzioni $f(x)$ e le combinazioni d'approssimazione $\Pi_n(x)$ viene ad assumere il carattere della *continuità*.

9. — Vediamo qualche caso in cui la determinazione della combinazione di approssimazione di $f(x)$ si può fare per via algebrica; e indichiamo il modo mediante il quale si può calcolare per $f(x)$ la combinazione d'approssimazione, con una approssimazione determinata.

Supponiamo che le n funzioni

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x)$$

costituenti un sistema regolare in $a \dots b$ o un sistema regolare di funzioni periodiche ed aventi derivate finite, siano esprimibili algebricamente per una

stessa funzione $\psi(x)$ che in $a \dots b$ è sempre crescente (o decrescente) e che ammette ivi derivata finita esprimibile algebricamente per la funzione stessa. Anche ogni combinazione lineare delle (3') è esprimibile algebricamente per $\psi(x)$.

Immaginiamo ora che la $f(x)$ si possa esprimere algebricamente per la $\psi(x)$: sia $f(x) = F(\psi(x))$; allora anche la derivata $f'(x)$ si può esprimere per $\psi(x)$ algebricamente, poichè si ha $f'(x) = \frac{dF}{d\psi} \cdot \psi'(x)$.

Sia

$$\Pi_n(x) = \pi_1 \varphi_1(x) + \pi_2 \varphi_2(x) + \dots + \pi_n \varphi_n(x)$$

la combinazione delle (3') da determinarsi: essa sarà esprimibile algebricamente per $\psi(x)$ e linearmente per $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$: rappresentiamola con

$$\Phi(\psi(x), \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n).$$

Detto μ il massimo di $|F(\psi(x)) - \Phi(\psi(x), \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)|$ in $a \dots b$ esisteranno $n+1$ punti distinti x_1, x_2, \dots, x_{n+1} (tra i quali possono essere anche a e b) soddisfacenti alle relazioni

$$F(\psi(x_i)) - \Phi(\psi(x_i), \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = (-1)^i \mu' \quad (i = 1, 2, \dots, n+1) \quad (7)$$

dove μ' è un numero tale che sia $|\mu'| = \mu$.

Ora, poichè nei punti x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , la differenza

$$|F(\psi(x)) - \Phi(\psi(x), \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)|$$

raggiunge il suo massimo μ , tali punti saranno tutti, ad eccezione al più di quei due che eventualmente coincidono con a e b , radici dell'equazione

$$\frac{d}{dx} F(\psi(x)) - \frac{d}{dx} \Phi(\psi(x), \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0$$

epperò avremo le $n+1$ equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} &\psi(x_i) - \psi(a) \left\{ \psi(x_i) - \psi(b) \left\{ \frac{d}{dx} F(\psi(x)) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{d}{dx} \Phi(\psi(x), \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \right\}_{x=x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n+1). \right. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Le equazioni (7) e (8) si possono trasformare in $2(n+1)$ equazioni ra-

zionali intere in $\psi(x_1), \psi(x_2), \dots, \psi(x_{n+1}), \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \mu'(*)$ che formano un sistema possibile, giacchè la esistenza della combinazione è già provata. Fra le soluzioni troveremo il sistema di coefficienti $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ che ci dà la voluta combinazione d'approssimazione.

Pure in via algebrica si determina la combinazione d'approssimazione se la $\psi'(x)$ non è esprimibile per la $\psi(x)$, purchè le derivate $\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_n$ ed f' siano esse, al pari delle ϕ ed f , esprimibili algebricamente per la ψ .

Sia $f(x)$ una funzione continua qualsivoglia e per le (3') valga le ipotesi fatte in principio di questo paragrafo. Sia $x = x(u)$ la funzione inversa di $u = \psi(x)$: se in $f(x)$ poniamo $x = x(u)$ avremo una funzione finita continua e ad un valore di u nell'intervallo $\psi(a) \dots \psi(b)$, che indicheremo con $\theta(u)$. Si determini il polinomio di WEIERSTRASS approssimata a $\theta(u)$ a meno di ε , quantità prefissata piccola a piacere: sia $P_m(u)$ codesto polinomio di grado m ; allora sarà $P_m(\psi(x))$ un polinomio di grado m in $\psi(x)$ approssimato a $f(x)$ per meno di ε .

Ricordiamo che al n.º 8 abbiamo visto che, assegnato un numero positivo η , si può determinare un numero pure positivo ε tale che se $\Pi_n(x)$ e $\bar{\Pi}_n(x)$ sono le combinazioni d'approssimazione delle (3') per $f(x)$ e $g(x)$, è $|\Pi_n(x) - \bar{\Pi}_n(x)| < \eta$ ogni volta che sia $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Ne discende che se per $g(x)$ prendiamo $P_m(\psi(x))$ la combinazione delle (3') di approssimazione $\bar{\Pi}_n(x)$ e la combinazione d'approssimazione $\Pi_n(x)$ della $f(x)$ soddisfano alla relazione

$$|\Pi_n(x) - \bar{\Pi}_n(x)| < \eta.$$

Si può dunque di una qualunque funzione continua $f(x)$ determinare, con quell'approssimazione che si vuole, la combinazione di approssimazione delle (3'), e ciò in via algebrica, purchè si sappia costruire della $\theta(u)$ il polinomio approssimato di WEIERSTRASS pure con quella approssimazione che si vuole, e si sappia invertire la $\psi(x)$.

10. — Chiamasi polinomio trigonometrico di ordine n di due variabili la funzione

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{s=0}^{n-r} \sum_{r=0}^n (a_{rs} \cos r x \cos s y + b_{rs} \sin r x \cos s y + \\ & + a'_{rs} \cos r x \sin s y + b'_{rs} \sin r x \sin s y); \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(*) La ipotesi della crescenza (o decrescenza) di $\psi(x)$ ci permette di prendere $\psi(x_1), \psi(x_2), \dots, \psi(x_n), \psi(x_{n+1})$ come incognite in luogo di x_1, x_2, \dots, x_{n+1} .

essa è una combinazione lineare delle $2n^2 + 2n + 1$ funzioni

$$\begin{aligned} & \cos r x \cos s y, \quad \cos r x \sin s y, \quad \sin r x \cos s y, \\ & \sin r x \sin s y \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n; s = 0, 1, 2, \dots, n - r) \end{aligned}$$

che considereremo nel quadrato A limitato dalle rette $x = -\pi$, $x = \pi$, $y = -\pi$, $y = \pi$.

Si potranno definire i polinomi trigonometrici d'approssimazione di grado n di una data funzione $f(x, y)$ finita, continua in A , che ammette il periodo 2π rispetto a ciascuna delle due variabili. Il determinante (2) relativo a $2n^2 + 2n + 1$ punti scelti in A non è identicamente nullo, quindi tutto ciò che è stato detto per le combinazioni di approssimazione delle funzioni (1) di una data funzione finita continua e ad un valore $f(x, y)$ si può ripetere per i polinomi trigonometrici d'approssimazione della forma (9).

Si dice polinomio trigonometrico di una variabile di ordine n la funzione $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ che è combinazione lineare delle $2n + 1$ funzioni

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \dots, \quad \cos nx, \quad \sin nx. \quad (10)$$

Si possono definire i polinomi trigonometrici d'approssimazione di un dato ordine per una funzione finita e continua $f(x)$ in $-\pi \dots \pi$ e di periodo 2π . Alcune proposizioni dimostrate nella mia Nota sui polinomi trigonometrici citata alla pag. 207 ci assicurano che le (10) formano un sistema regolare di funzioni periodiche in $-\pi \dots \pi$: epperò si conclude:

per ogni funzione finita, continua, periodica di periodo 2π , esiste uno ed un solo polinomio trigonometrico di approssimazione di un dato ordine.

E poichè anche le $n + 1$ funzioni

$$1, \quad \sinh x, \quad \cosh x, \quad \sinh 2x, \quad \cosh 2x, \dots, \quad \sinh nx, \quad \cosh nx \quad (11)$$

ove

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

costituiscono in ogni intervallo un sistema regolare di $2n + 1$ funzioni, se chiamiamo *polinomio iperbolico* una combinazione lineare delle (11), possiamo dire

per ogni funzione finita e continua $f(x)$, data in un intervallo qualsivoglia, esiste uno ed un solo polinomio iperbolico d'approssimazione.

Si possono anche prendere in considerazione polinomi iperbolici di due variabili.

Sui polinomi trigonometrici ed iperbolici d'approssimazione di una funzione di una variabile c'è da osservare che per essi valgono le considerazioni svolte al § 9. Infatti $\sin rx$, $\cos rx$ si esprimono razionalmente per $\sin x$ e $\cos x$, le quali si esprimono algebricamente per $\sin \frac{x}{2}$, funzione crescente in $-\pi \dots \pi$; e $\sinh rx$, $\cosh rx$ si esprimono razionalmente per e^x funzione crescente in qualunque intervallo. La determinazione dei polinomi trigonometrici ed iperbolici di approssimazione si fa in via algebrica.

Abbiamo visto che anche n funzioni sferiche di prima specie $X^{(1)}$, $X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ costituiscono in ogni intervallo un sistema regolare di funzioni, come pure lo formano n funzioni cilindriche di seconda specie $O^{(1)}$, $O^{(2)}, \dots, O^{(n)}$ in ogni intervallo non contenente lo zero; epperò

per ogni funzione $f(x)$ finita e continua in un intervallo $a \dots b$ esiste una ed una sola combinazione di approssimazione delle funzioni $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ e, se in $a \dots b$ non cade l'origine, v'ha una ed una sola combinazione di approssimazione delle $O^{(1)}, O^{(2)}, \dots, O^{(n)}$.

11. — Sia ora $f(x)$ una funzione della variabile complessa x in un campo A ed ivi finita, continua e ad un valore. Siano poi

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (12)$$

n funzioni di x finite, continue e ad un valore nello stesso campo A .

Si possono definire, analogamente a quanto si è fatto per il caso delle funzioni di variabile reale, le combinazioni d'approssimazione delle (12) per la data funzione $f(x)$ e anche la dimostrazione dell'esistenza di almeno una combinazione di approssimazione è analoga a quella per le funzioni di variabile reale.

Se le (12) costituiscono in A un sistema regolare di n funzioni, si dimostra che

il numero dei punti del campo A in cui $|f(x) - \Pi_n(x)|$ raggiunge il suo massimo μ è maggiore di n .

Per la dimostrazione si vegga quella del n.º 2 della parte terza della Memoria di TONELLI. Segue da questo teorema, con semplici osservazioni, che se $\Pi_n(x)$ e $\Pi'_n(x)$ fossero due combinazioni d'approssimazione di $f(x)$,

in più di n punti dovrebbero coincidere, ciò che porta che esse coincidano in tutto A : vale, cioè, la proposizione:

per ogni funzione finita e continua $f(x)$ della variabile complessa x in A , esiste sempre una ed una sola combinazione di approssimazione di n funzioni (12) costituenti in A stesso un sistema regolare.

Se indichiamo con E l'insieme dei punti \bar{x} di A in cui $|f(x) - \Pi_n(x)| = \mu$ (μ avendo il solito significato) e con \bar{s} un numero non nullo tale che la differenza $\bar{\alpha}$ fra il suo argomento e quello di $f(\bar{x}) - \Pi_n(\bar{x})$ sia in modulo minore di $\frac{\pi}{2}$, vale la proposizione seguente, analoga a quella dimostrata per le funzioni di variabile reale:

condizione necessaria e sufficiente acciò che $\Pi_n(x)$ sia una combinazione d'approssimazione delle n funzioni (12) di $f(x)$ è che non si possano trovare n numeri p_1, p_2, \dots, p_n e contemporaneamente un sistema di valori \bar{s} soddisfacenti tutti alle condizioni $S > |\bar{s}| > s$, $|\bar{\alpha}| < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (S, s, α numeri reali positivi), in modo che sia in tutto E

$$p_1 \varphi_1(\bar{x}) + p_2 \varphi_2(\bar{x}) + \dots + p_n \varphi_n(\bar{x}) = \bar{s}.$$

Per la dimostrazione veggasi quella del n.º 4 della parte terza del lavoro di TONELLI.

Analogamente a quanto s'è fatto per le funzioni di variabile reale, si può dimostrare

se $\Pi_n(x)$ e $\Pi'_n(x)$ indicano due combinazioni d'approssimazione delle funzioni (12) di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ in A , prefissato un numero positivo n piccolo a piacere, sempre si può trovare un numero pure positivo ε tale che per ogni $\Pi'_n(x)$ relativo a $g(x)$ soddisfacente in A alla condizione

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

esista una combinazione $\Pi_n(x)$ di $f(x)$ che soddisfi in A alla condizione

$$|\Pi_n(x) - \Pi'_n(x)| < \varepsilon.$$

Se $\Pi_n(x)$ e $\Pi'_n(x)$ sono le uniche combinazioni delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, la corrispondenza fra funzione $f(x)$ e sua combinazione d'approssimazione $\Pi_n(x)$ delle (12) assume il carattere della continuità.