

Sur les intégrales doubles des variétés algébriques.

(Par S. LEFSCHETZ, à Lawrence, U. S. A.)

Nous nous proposons dans ce qui suit de faire l'étude des intégrales doubles des variétés algébriques, intégrales qui généralisent celles de différentielles totales des surfaces algébriques. Dans cette direction les premiers pas ont été faits par Mr. PICARD (*) pour l'espace ordinaire, et par Mr. SEVERI (**) pour les variétés à trois dimensions générales. M^{mes}. SEVERI (***) et COMESSATTI (****) ont aussi étudié les intégrales doubles de première espèce.

Notre but ici, sera de traiter complètement les intégrales doubles de deuxième espèce, pour une variété algébrique à singularités ordinaires, et d'obtenir le nombre de ces intégrales. Le résultat obtenu généralise à la fois les deux résultats classiques de Mr. PICARD pour les intégrales simples et doubles de deuxième espèce d'une surface algébrique (*_{*}). Le cas d'une variété à trois dimensions sera seul traité complètement, et la théorie sera ensuite étendue aux variétés supérieures.

La méthode suivie se rapproche dans ses grandes lignes de celle de Mr. PICARD pour les intégrales simples de deuxième espèce. Il s'agira tout d'abord, d'obtenir une intégrale sous une forme dite *normale*, ayant des pé-

(*) PICARD et SIMART, *Traité des fonctions algébriques de deux variables*. Paris, Gauthier-Villars, Vol. II, p. 474.

(**) *Fondamenti per la Geom. sulle varietà algeb.* Rendic. del Circ. Mat. di Palermo. Vol. 28, 1909, p. 70.

(***) *Relazioni tra gli integrali semplici e gli integrali multipli di prima specie di una varietà algebrica.* Annali di Matematica, Vol. 20, Serie 3, p. 201.

(****) *Sulle varietà algebriche che posseggono integrali semplici funzionalmente dipendenti.* Rendic. dei Lincei, 1912, p. 270.

(*_{*}) PICARD et SIMART, I, p. 150; II, p. 407.

riodes arbitraires, d'éliminer les résidus possibles de cette intégrale, et enfin, parmi les intégrales sous forme normale, auxquelles toutes les autres peuvent se réduire, de ne retenir que le nombre convenable.

Certaines difficultés assez inattendues se présentent, en particulier dans l'élimination des résidus, mais surtout dans l'extension des résultats aux variétés supérieures. Par suite la théorie de Mr. PICARD n'a pu être suivie que de loin. Là où on s'en rapproche, nous avons été aussi rapidement qu'il était possible, sans nuire à la clarté ou à la rigueur. Peut-être les résultats les plus intéressants sont-ils les suivants :

I. Les identités exprimées par les théorèmes 1 et 10, la première en connexion étroite avec une intégrale qui se présente dans la démonstration du théorème de STOKES.

II. La généralisation aux variétés supérieures. Cette généralisation, immédiate dans le cas des intégrales simples, présente des difficultés assez sérieuses dans le cas des intégrales doubles.

III. La formule finale obtenue, et la limite qu'on en déduit pour le nombre ρ de Mr. PICARD d'une variété algébrique à trois dimensions au moins, ($\rho \leq 1 + R_2$), limite dont nous nous proposons de faire des applications ailleurs.

I. PROPRIÉTÉS DE CERTAINES INTÉGRALES DOUBLES. RÉSIDUS. INTÉGRALES DE DEUXIÈME ESPÈCE.

1. Soit $F(x, y, z, t) = 0$ l'équation d'une variété algébrique irréductible à trois dimensions, à singularités dites ordinaires — surface double, courbe triple, points quadruples. Les intégrales doubles du type suivant :

$$\iint A(x, y, z, t) dy dz + B(x, y, z, t) dz dx + C(x, y, z, t) dx dy, \quad (1)$$

où A, B, C sont des fonctions rationnelles du point sur la variété, qui satisfont à la condition d'« intégrabilité » de POINCARÉ (*)

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

(*) Nous désignerons avec Mr. PICARD, par $\frac{\partial A}{\partial x}$ la dérivée par rapport à x , quand t est considéré comme une fonction de x , définie par l'équation de la variété, réservant la notation A_x pour la dérivée prise en considérant les quatre variables comme indépendantes.

généralisent les intégrales de différentielles totales, et formeront l'objet de ce travail. Nous les appellerons *intégrales doubles de différentielles totales*, ou plus simplement *intégrales doubles*, quand la confusion sera impossible. Dans cette théorie, les intégrales de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) dy dz + \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) dz dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx dy, \quad (3)$$

(U, V, W , fonctions rationnelles du point sur la variété), jouent le même rôle que celles du type

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy$$

dans la théorie des intégrales doubles d'une surface algébrique. À cet égard le théorème suivant, assez intéressant en lui même, nous sera fort utile.

Th. I. *Toute intégrale double de différentielles totales du type*

$$\left. \begin{aligned} \iint \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S'}{\partial z} \right) dz dx + T(x, y, z, t) dx dy, \\ (R, R', S, S', T, \text{fonctions rationnelles du point sur la variété}), \end{aligned} \right\} (4)$$

peut être mise sous la forme (3).

Remarquons que toute combinaison linéaire à coefficients constants d'intégrales du type (3), est encore de ce type. Si donc de (4) on retranche la suivante

$$\iint \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial S'}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx - \left(\frac{\partial S'}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial x} \right) dx dy,$$

on obtient une intégrale double de différentielles totales du type

$$\iint \frac{\partial S}{\partial x} dz dx + T(x, y, z, t) dx dy, \quad (5)$$

pour laquelle il suffit de démontrer le théorème.

La condition d'intégrabilité donne

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

et montre que l'intégrale simple (*)

$$\int \frac{\partial}{\partial \bar{x}} S(\bar{x}, y, z, t) dz - T(\bar{x}, y, z, t) dy; \quad F(\bar{x}, y, z, t) = 0, \quad (6)$$

est une intégrale de différentielles totales, relative à la surface d'intersection de la variété et de l'hyperplan $x = \bar{x}$. Ses périodes logarithmiques sont donc des fonctions de \bar{x} seule. Celles de l'intégrale abélienne

$$\int S(\bar{x}, \bar{y}, z, t) dz; \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z, t) = 0,$$

sont par suite de la forme $f(\bar{x}) + \varphi(\bar{y})$, f et φ étant des fonctions algébriques, comme les coordonnées des points singuliers logarithmiques, puisque, une fois celles-ci connues, les périodes correspondantes se déterminent par des opérations algébriques. Par suite, les périodes logarithmiques de (6) sont des dérivées de fonctions algébriques. Soient C_1, C_2, \dots, C_s les courbes logarithmiques de cette intégrale, $\frac{d\pi_i(\bar{x})}{d\bar{x}}$ la période par rapport à C_i . Rappelons un théorème de Mr. SEVERI (**): S'il existe entre les courbes C_1, C_2, \dots, C_s , d'une surface algébrique, les relations indépendantes d'équivalence

$$\sum_1^s \lambda_i^j C_i = 0; \quad (j = 1, 2, \dots, k < s)$$

les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, d'une intégrale de différentielles totales dont ces courbes sont les seules courbes logarithmiques, satisfont à un système de relations

$$\alpha_i = \sum_1^k u_j \lambda_i^j; \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

et réciproquement.

Appliquons ceci au cas qui nous intéresse, et intégrons les relations obtenues. Les π ne sont déterminés qu'à des constantes près. Si on choisit ces constantes convenablement, on aura:

$$\pi_i(x) = \sum_j \theta_j(x) \lambda_i^j; \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

(*) La même notation et ses analogues, nous serviront désormais à indiquer les intégrales simples ou doubles, relatives aux sections planes ou hyperplanes de la variété.

(**) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*. Math. Ann., 62, 1906, p. 209, 210. L'énoncé ci-dessus se déduit facilement de la discussion de Mr. SEVERI.

les θ , comme les π , étant des fonctions algébriques (*) de x . On pourra donc former une intégrale de différentielles totales

$$\int W(\bar{x}, y, z, t) dz - V(\bar{x}, y, z, t) dy; \quad F(\bar{x}, y, z, t) = 0,$$

ayant les C comme courbes logarithmiques, et les π comme périodes correspondantes. Les fonctions V, W , rationnelles en y, z, t , sont algébriques par rapport aux coefficients de la surface à laquelle l'intégrale appartient (**), c'est-à-dire par rapport à \bar{x} . Quand \bar{x} partant d'une valeur donnée, y revient, il se peut que la courbe C_i soit changée en une autre courbe, certainement comprise parmi les C , puisque S est rationnelle en x, y, z, t , et que par suite, ses infinis, quand x est fixe, sont rationnellement déterminés dans leur ensemble. Soit C_j cette nouvelle courbe, qui sera dite *conjuguée* de C_i . Pour une raison pareille, la période π_i deviendra π_j . Le système des courbes C , et des périodes π , restera donc le même. Par suite, on pourra prendre pour V, W , des fonctions rationnelles en \bar{x} , fonctions qui satisferont à la relation

$$\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Si l'on retranche de (5) l'intégrale

$$\iint -\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) dy dz + \frac{\partial W}{\partial x} dz dx + \frac{\partial V}{\partial x} dx dy$$

qui est de la forme (3), on en obtient une de la même forme que (5), sauf que l'intégrale (6) correspondante est de deuxième espèce.

2. Partons donc de (5), et supposons que (6) soit de deuxième espèce. Soit σ un cycle linéaire non nul de la section de la variété par l'hyperplan $x = \bar{x}$. D'après un théorème connu de MMrs. CASTELNUOVO et ENRIQUES (***),

(*) En effet la matrice $\|\lambda_i^j\|$ est de rang k , et par suite les θ sont des fonctions linéaires à coefficients constants des π .

(**) En effet Mr. SEVERI a montré, loc. cit. p. 207, comment on peut former une telle intégrale par des opérations algébriques par rapport aux coefficients qui entrent dans l'équation de la surface.

(***) Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique. Ann. Éc. Norm. Sup., 1906, p. 358.

σ est aussi un cycle non nul de la variété. Je dis que la période $\gamma'(\bar{x})$ de (6) par rapport à σ , est rationnelle en \bar{x} . En effet, comme (6) est de deuxième espèce, on aura d'après des théorèmes connus de la théorie des fonctions abéliennes

$$\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial S'}{\partial z} = \frac{P(x, y, z, t)}{\varphi(x, y) F'}$$

(P polynôme adjoint à la variété; φ polynôme en x, y ; S' fonction rationnelle).
Les périodes des deux intégrales abéliennes

$$\int \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} d\bar{z}, \quad \frac{1}{\varphi(\bar{x}, \bar{y})} \int \frac{P(\bar{x}, \bar{y}, z, t)}{F'} dz; \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z, t) = 0,$$

sont donc les mêmes. Or la période de la seconde, par rapport à σ , est rationnelle (*) en \bar{x} . Il en est donc de même pour $\gamma'(\bar{x})$. De plus $\gamma(x) = \int \gamma'(x) dx$ est une fonction rationnelle de x . En effet, autrement elle aurait au moins un point logarithmique x_0 . Supposons σ ramené à la section (**) par le plan $y = \bar{y}$. Quand \bar{x} décrit un petit circuit fermé ζ autour de x_0 , σ engendre une surface fermée Γ , et si l'on prend l'intégrale double

$$\iint \frac{\partial}{\partial x} S(x, \bar{y}, z, t) dz dx; \quad F(x, \bar{y}, z, t) = 0,$$

étendue à Γ , on en obtient un résidu α , relatif à la section de la variété par le plan $x = x_0, y = \bar{y}$. Comme cette intégrale est de deuxième espèce, ses résidus sont nuls (***), c'est-à-dire

$$\alpha = 0 = \int_{\zeta} \gamma(x) dx$$

et $\gamma(x)$ est donc bien une fonction rationnelle.

Soit $r + 1$ la connexion linéaire de la variété, et par suite de ses sections hyperplanes, J_1, J_2, \dots, J_r , ses intégrales de différentielles totales de deu-

(*) Car celle de l'intégrale qui multiplie $\frac{1}{\varphi(\bar{x}, \bar{y})}$ est un polynôme en \bar{x} . Voir PICARD et SIMART, II, p. 397.

(**) Ceci est toujours possible. Voir PICARD et SIMART, I, p. 86.

(***) PICARD et SIMART, II, p. 204.

xième espèce, de sorte que

$$J_k = \int U_k dx + V_k dy + W_k dz.$$

Désignons par $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$, les r cycles linéaires indépendants de la variété, par $\gamma_i(x)$ la fonction relative à σ_i , correspondant à γ pour σ , et par δ_i^k la période de J_k relative à σ_i . Le système

$$\gamma_i(x) = \sum_k \delta_i^k \beta_k(x), \quad (i, k = 1, 2, \dots, r),$$

détermine les β comme fonctions rationnelles de x . Si l'on pose

$$V = \sum \beta_k V_k, \quad W = \sum \beta_k W_k,$$

on pourra opérer avec ces fonctions comme avec celles du même nom à la fin du § 1, et obtenir une intégrale double de différentielles totales telle que (5), avec une intégrale (6) correspondante à périodes toutes nulles.

Partons donc enfin de (5), l'intégrale (6) se réduisant à une fonction rationnelle du point sur la surface $F(\bar{x}, y, z, t) = 0$. On aura

$$T(x, y, z, t) = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

U étant une fonction rationnelle en y, z, t , que l'on pourra prendre rationnelle en x aussi, car ces deux relations n'imposent aux coefficients inconnus que cette fonction de y, z, t peut contenir, que des conditions algébriques. En prenant la moyenne des valeurs de U pour une même valeur de x , on aura une fonction qui satisfait encore à ces deux relations, et est rationnelle en x . L'intégrale (5) se réduira finalement à la forme

$$\iint \frac{\partial U}{\partial z} dz dx - \frac{\partial U}{\partial y} dx dy.$$

Elle est donc bien du type (3). *Le théorème I est par suite démontré.*

3. *Résidus.* Soit Φ une surface d'infini de l'intégrale double (1). On peut montrer (*) que toute surface Γ , telle que l'intégrale (1) prise sur elle

(*) La démonstration est la même que dans le cas des surfaces. Voir PICARD et SIMART, I, p. 58.

donne un résidu relatif à Φ , peut être engendrée ainsi: Soit σ un cycle linéaire de Φ ; on passe par un point M de σ , un élément d'aire tout entier dans la variété, et on trace sur l'élément une petite courbe fermée ζ entourant M . Le lieu de ζ quand M décrit σ , est une surface telle que Γ . Supposons que Φ ne soit pas la section par un hyperplan $z = \text{const.}$ On peut déformer σ de façon à l'amener dans l'hyperplan $z = z_0$, et pour tout point M , (\bar{x}, y, z_0, t) , de σ , dans sa nouvelle position, on ramènera ζ à être dans la section par l'hyperplan $z = z_0$, $x = \bar{x}$. Il en résultera une déformation de Γ , le ramenant tout entier à la section par l'hyperplan $z = z_0$, déformation qui peut s'accomplir sans jamais rencontrer une courbe donnée, réductible ou non, de la surface Φ , car il en est ainsi de la déformation de (*) σ .

Si Φ était la section par un hyperplan $z = \text{const.}$, nous pourrions ramener Γ à un hyperplan arbitraire $x = \text{const.}$

4. Deux propriétés importantes des intégrales analogues de la théorie des surfaces, s'étendent à celles de la forme (3).

a) *Leur forme est invariante par rapport aux transformations birationnelles.* La démonstration est à peu près la même que celle du théorème analogue (**). On montrera d'abord que la transformée est de la forme (4), et par suite de la forme (3) (Th. 1).

b) *Leurs résidus sont tous nuls.* Au moyen d'une transformation homographique préalable, on peut toujours s'arranger pour que l'intégrale double ne devienne infinie pour aucune section par un hyperplan $z = \text{const.}$ D'après ce qui précède, les résidus de l'intégrale considérée seront certainement résidus de

$$\iint \left(\frac{\partial U(x, y, \bar{z}, t)}{\partial y} - \frac{\partial V(x, y, \bar{z}, t)}{\partial x} \right) dx dy; \quad F(x, y, \bar{z}, t) = 0,$$

et par suite ils seront nuls (***) .

5. Th. 2. *Les résidus d'une intégrale double de différentielles totales par rapport à une de ses surfaces d'infini Φ , sont les périodes d'une intégrale de différentielles totales, relative à cette surface.*

(*) PICARD et SIMART, I, p. 86.

(**) PICARD et SIMART, II, p. 160.

(***) PICARD et SIMART, II, p. 204.

On peut toujours supposer que Φ soit la section par l'hyperplan $x = 0$, ou bien seulement portion de cette section. Il suffira pour cela de faire une transformation birationnelle préliminaire. L'intégrale double sera alors de la forme

$$\iint \frac{A(x, y, z, t)}{x^\alpha} dy dz + \frac{B(x, y, z, t) dz dx + C(x, y, z, t) dx dy}{x^\beta},$$

où A, B, C sont des fonctions rationnelles finies pour $x = 0$.

Pour $\alpha = 0$, ou 1 et $\beta = 1$, le théorème est connu (*). Supposons $\beta > 1$. L'intégrale double du type (3),

$$\frac{1}{\beta - 1} \iint \left(\frac{\partial C}{\partial z} \frac{1}{x^{\beta-1}} - \frac{\partial B}{\partial y} \frac{1}{x^{\beta-1}} \right) dy dz + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{1}{x^{\beta-1}} dz dx + \frac{\partial C}{\partial x} \frac{1}{x^{\beta-1}} dx dy$$

a ses résidus tous nuls. Si on la retranche de celle donnée, on sera ramené à une intégrale de la même forme qu'elle, sauf que β sera remplacé par $\beta - 1$. En répétant une telle opération, on sera finalement ramené au cas où $\beta = 1$. La condition d'intégrabilité montre qu'alors $\alpha = 0$, et l'on est réduit au cas de Mr. PICARD.

6. Les deux théorèmes qui suivent ont une analogie évidente avec deux autres de la théorie des intégrales doubles d'une surface algébrique. Le premier nous sera d'ailleurs seul utile.

Th. 3. *Si les résidus d'une intégrale double de différentielles totales, par rapport à une de ses surfaces d'infini Φ , sont tous nuls, on peut en soustraire une intégrale du type (3), de façon à obtenir une différence finie au voisinage de Φ .*

Il suffit de remplacer dans la démonstration du théorème analogue de la théorie des surfaces (**), une certaine intégrale abélienne, par une intégrale de différentielles totales relative à Φ , et l'on obtient le résultat annoncé.

Remarque. On peut toujours faire de façon que l'intégrale finale obtenue, ne soit infinie pour aucune autre surface passant par une courbe donnée de Φ . Ceci résulte sans peine de la démonstration.

(*) PICARD et SIMART, II, p. 476. La démonstration est la même, quand au lieu de l'espace ordinaire, on considère une variété quelconque.

(**) PICARD et SIMART, II, p. 204.

Th. 4. Si les résidus d'une intégrale double de différentielles totales par rapport à toutes ses surfaces d'infini $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s$, passant par une courbe donnée C , sont nuls, on peut trouver une intégrale du type (3), telle que la différence entre les deux soit finie au voisinage de C .

Soit I l'intégrale donnée. On peut en trouver une J_i du type (3), n'ayant pas d'autres surfaces d'infini que Φ_i , passant par C , et telle que $I - J_i$ soit fini au voisinage de Φ_i . L'intégrale $J = \sum J_i$ répond évidemment à la question.

7. *Intégrales de deuxième espèce.* Si dans l'intégrale

$$\int \int A dy dz + B dz dx + C dx dy, \quad (1)$$

du § 1, le point $(x y z t)$ de la variété est astreint à ne plus être que sur une surface Φ , au voisinage de laquelle les fonctions A, B, C sont finies, l'intégrale (1) se réduit à une intégrale double de fonction algébrique relative à Φ . Cette nouvelle intégrale sera ce que nous appellerons l'intégrale déterminée par (1) sur la surface. La définition des intégrales doubles de différentielles totales de deuxième espèce, peut être choisie de diverses manières. Nous adopterons celle-ci :

Définition: Une intégrale double de différentielles totales relative à une variété algébrique irréductible, à trois dimensions, est dite de seconde espèce, si celle qu'elle détermine sur une surface algébrique quelconque de la variété, est de seconde espèce.

De cette définition on déduit de suite les propriétés suivantes :

a) Pour qu'une intégrale double soit de deuxième espèce, il faut et il suffit que ses résidus soient nuls (*).

En particulier les intégrales du type (3) sont de deuxième espèce. Ce sont les intégrales *impropes* de deuxième espèce, tandis que celles qui ne sont pas de ce type, sont dites intégrales *propres* de deuxième espèce.

b) Une intégrale est de deuxième espèce, si celles qu'elle détermine sur les sections par un hyperplan arbitraire $x = \text{const.}$, ou bien $y = \text{const.}$, sont de deuxième espèce. Ceci résulte de suite des considérations du § 3.

c) Toute intégrale de deuxième espèce, l'est encore après transformation birationnelle de la variété. Soient en effet Φ'_1, Φ''_1 les sections de la

(*) PICARD et SIMART, II, p. 204.

variété transformée par les hyperplans $x = x_1$, $y = y_1$ et Φ' , Φ'' les deux surfaces dont elles sont les transformées. L'intégrale déterminée par l'intégrale donnée I sur Φ' est de deuxième espèce, et sa transformée, qui est celle déterminée par la transformée i de I , sur Φ'_1 , est aussi de deuxième espèce (*). De même pour l'intégrale déterminée par i sur Φ''_1 . D'après la propriété précédente, i est donc de deuxième espèce.

d) Le nombre ρ_0 des intégrales propres de deuxième espèce, dont aucune combinaison linéaire n'est impropre, est un invariant absolu de la variété.

II. DIGRESSION SUR LES INTÉGRALES DOUBLES DES SURFACES ALGÈBRIQUES.

8. Nous rassemblerons ici certaines questions dont la considération nous sera utile dans la suite.

Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface algébrique irréductible, à singularités ordinaires. Prouvons d'abord un lemme.

Lemme. Soit Γ un cycle à deux dimensions de la surface. Si la fonction rationnelle $U(x, y, z)$ ne devient infinie pour aucuns points de Γ , et que Γ ne rencontre nulle part le continuum simple pour lequel $f = f'_z = 0$, on a

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial x} dx dy = \iint_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial y} dx dy = 0.$$

Il suffit de considérer la première de ces intégrales. Par le changement de variables $X = U$, $Y = y$, Γ sera transformé en une surface fermée Γ' de l'espace à quatre dimensions image des valeurs complexes de X , Y . Le jacobien de la transformation

$$\frac{D(x, y)}{D(X, Y)} = \frac{f'_z}{U'_y f'_z - U'_z f'_y}$$

ne s'annule jamais sur Γ . Par suite, d'après le théorème de CAUCHY-POINCARÉ, on a

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial x} dx dy = \iint_{\Gamma'} dX dY = 0,$$

ce qui démontre le lemme.

(*) PICARD et SIMART, II, p. 191.

9. Th. 5. Si les axes sont arbitraires, les périodes des intégrales

$$\iint \frac{\partial}{\partial x} \frac{A(x, y, z)}{\varphi(y) f'_z} dx dy, \quad \iint \frac{\partial}{\partial y} \frac{A(x, y, z)}{\varphi(y) f'_z} dx dy,$$

(A polynome adjoint, φ polynome),

sont nulles.

Prenons par exemple la première de ces intégrales. Soit Γ un cycle à deux dimensions de la surface. La période de l'intégrale considérée par rapport à ce cycle, n'existera que s'il est possible de déformer Γ de façon à ce qu'il ne rencontre plus le continuum où l'intégrale est infinie (*). D'après le lemme, s'il est permis de parler d'une telle période, elle sera nécessairement nulle. Il s'agit donc simplement de savoir si le cycle arbitraire Γ peut être ramené à une position de la nature en question. Or un cycle équivalent à Γ peut être engendré par un circuit fermé σ de la section par le plan $y = \bar{y}$, quand \bar{y} décrit une certaine courbe fermée ζ dans son plan complexe (**). Pour que le cycle superficiel ainsi obtenu remplisse la condition voulue, il faut: 1.^o que ζ ne passe pas par des points correspondant aux racines de $\varphi(y) = 0$; 2.^o que le plan $y = \bar{y}$ ne devienne jamais tangent à la surface. Le circuit σ ne sera alors jamais obligé de rencontrer les points simples pour lesquels $f'_z = 0$, $f = 0$, car ces points sont les points de ramification de la surface, et ceux-ci ne coïncideront pas. Comme ces deux conditions peuvent toujours être remplies, le théorème est établi.

10. Rappelons maintenant un théorème de Mr. PICARD que nous trouverons souvent utile. Les axes étant arbitraires, si l'intégrale double

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{(x - a)^\alpha f'_z} dx dy,$$

où P est un polynome adjoint, présente le caractère d'une intégrale de se-

(*) PICARD et SIMART, I, p. 65.

(**) PICARD et SIMART, II, p. 335. En effet M. PICARD a montré que ces cycles sont au nombre de $I + 2\Gamma + 1$, où I est l'invariant de ZEUTHEN-SEGRE des sections hyperplanes. Or ce nombre est égal à celui des cycles à deux dimensions. Voir I. W. ALEXANDER II, *Rendiconti dei Lincei*, août 1914.

conde espèce au voisinage de la section par le plan $x = a$, on a (*)

$$\frac{P(x, y, z)}{(x-a)^\alpha f'_z} - \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial x (x-a)^\beta f'_z} - \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial y (x-a)^\beta f'_z} = \frac{Q(x, y, z)}{f'_z}$$

(A, B, Q polynomes adjoints).

On peut généraliser ce résultat ainsi: Si l'intégrale double

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{\varphi(x) f'_z} dx dy,$$

(P polynome adjoint, φ polynome en x),

présente partout à distance finie le caractère d'une intégrale de seconde espèce, on a

$$\frac{P(x, y, z)}{\varphi(x) f'_z} - \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial x \psi(x) f'_z} - \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial y \psi(x) f'_z} = \frac{Q(x, y, z)}{f'_z},$$

(A, B, Q polynomes adjoints, φ, ψ polynomes en x).

Ce cas se ramène au précédent en décomposant $\frac{1}{\varphi(x)}$ en fractions partielles, ce qui permet de remplacer l'intégrale double considérée par une somme d'autres du type considéré par Mr. PICARD.

En se rapportant à la discussion de Mr. PICARD, on verra que toutes les réductions indiquées peuvent se faire sans introduire aucunes irrationnelles.

11. Mr. PICARD a montré (**) que si les périodes et les résidus de

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{f'_z} dx dy$$

sont nuls, P étant un polynome adjoint, on a

$$\frac{P(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial x \varphi(y) f'_z} + \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial y \varphi(y) f'_z},$$

(A, B polynomes adjoints, φ polynome en y).

(*) PICARD et SIMART, II, p. 181. La forme des fonctions U, V , de Mr. PICARD qui est donnée ici, résulte de sa discussion.

(**) PICARD et SIMART, II, p. 365.

Ceci se généralise de la façon suivante: Si les périodes et les résidus de l'intégrale double

$$\frac{P(x, y, z)}{\varphi(y) f'_z} dx dy$$

sont nuls, on a

$$\frac{P(x, y, z)}{\varphi(y) f'_z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{A(x, y, z)}{\psi(y) f'_z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{B(x, y, z)}{\psi(y) f'_z},$$

(A, B polynomes adjoints, ψ polynome en y).

En effet puisque l'intégrale double est de deuxième espèce, on a (*)

$$\begin{aligned} \iint \frac{P(x, y, z)}{\varphi(y) f'_z} dx dy &= \iint \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{A_1(x, y, z)}{\psi_1(y) f'_z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{B_1(x, y, z)}{\psi_1(y) f'_z} \right) dx dy = \\ &= \iint \frac{P_1(x, y, z)}{f'_z} dx dy, \end{aligned}$$

(A_1, B_1, P_1 polynomes adjoints, ψ_1 polynome en y).

La seconde intégrale à gauche a toutes ses périodes nulles (th. 5).

Donc les périodes et les résidus de l'intégrale au second membre sont aussi nuls et par suite d'après Mr. PICARD (**)

$$\frac{P_1(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{A_2(x, y, z)}{\psi_2(y) f'_z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{B_2(x, y, z)}{\psi_2(y) f'_z}$$

(A_2, B_2 polynomes adjoints, ψ_2 polynome en y),

d'où l'on déduit sans peine le résultat annoncé.

Ici encore, comme au § 10, toutes les réductions se font rationnellement.

12. Si $1 + r_2$ est la connexion superficielle de la surface, il existe, comme on le sait, une intégrale double de seconde espèce, du type

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{f'_z} dx dy, \quad (7)$$

où P est un polynome adjoint, ayant r_2 périodes arbitraires données.

(*) PICARD et SIMART, II, p. 182, 208.

(**) PICARD et SIMART, II, p. 354.

D'un autre côté, on peut par soustraction d'une intégrale double du type

$$\iint \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{A(x, y, z)}{f'_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{B(x, y, z)}{f'_y} \right) dx dy$$

(A, B polynomes adjoints),

ramener l'intégrale (7) à une intégrale de même forme, le polynome P ayant un degré limité (*). Or l'intégrale double que l'on vient d'écrire a ses périodes toutes nulles (th. 5). Donc on peut à l'aide d'un polynome adjoint P , de degré inférieur à une certaine limite, former une intégrale telle que (7), ayant r_2 périodes arbitraires.

III. RÉDUCTION DES INTÉGRALES DE SECONDE ESPÈCE À UNE FORME NORMALE. INTÉGRALE SOUS FORME NORMALE AYANT DES PÉRIODES DONNÉES.

13. Revenons maintenant à notre variété à trois dimensions, et à ses intégrales.

Th. 6. *Par soustraction d'une intégrale impropre de seconde espèce, toute intégrale de deuxième espèce est réductible au type*

$$\iint \frac{P(x, y, z, t)}{\varphi(x) F'_t} dy dz + \frac{Q(x, y, z, t) dz dx + R(x, y, z, t) dx dy}{\psi(x, y) F'_t}, \quad (8)$$

(P, Q, R polynomes adjoints à la variété, φ, ψ polynomes).

Les intégrales du type (8) seront dites *sous forme normale*.

Tout d'abord on montre, avec Mr. PICARD (**), que toute intégrale de seconde espèce peut être ramenée à la forme

$$\iint \frac{P_1(x, y, z, t) dy dz + Q_1(x, y, z, t) dz dx + R_1(x, y, z, t) dx dy}{\psi_1(x, y) F'_t}, \quad (9)$$

(P_1, Q_1, R_1 polynomes adjoints, ψ_1 polynome).

(*) PICARD et SIMART, II, p. 186, 208.

(**) PICARD et SIMART, II, p. 172. Dans les modifications nécessaires, on appliquera le théorème de NÖTHER généralisé. Voir BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, p. 263.

Comme l'intégrale double

$$\iint \frac{P_1(\bar{x}, y, z, t)}{\psi_1(\bar{x}, y) F'_t} dy dz; \quad F(\bar{x}, y, z, t) = 0,$$

est de deuxième espèce, on a (§ 10),

$$\frac{P_1(x, y, z, t)}{\psi_1(x, y) F'_t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{K(x, y, z, t)}{\psi_2(x, y) F'_t} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{L(x, y, z, t)}{\psi_2(x, y) F'_t} = \frac{P(x, y, z, t)}{\psi(x) F'_t}$$

(K, L, P polynomes adjoints, ψ_2, φ polynomes).

Si l'on retranche de (9) l'intégrale double suivante

$$\iint \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{L}{\psi_2 F'_t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{K}{\psi_2 F'_t} \right) dy dz - \frac{\partial}{\partial x} \frac{L}{\psi_2 F'_t} dz dx + \frac{\partial}{\partial x} \frac{K}{\psi_2 F'_t} dx dy,$$

on obtient

$$\iint \frac{P(x, y, z, t)}{\varphi(x) F'_t} dy dz + B dz dx + C dx dy. \quad (10)$$

De plus, on vérifie sans peine, que l'intégrale abélienne

$$\int B(\bar{x}, \bar{y}, z, t) dz; \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z, t) = 0,$$

se conduit comme une intégrale de deuxième espèce à distance finie.

Par suite

$$B - \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{Q(x, y, z, t)}{\psi(x, y) F'_t}$$

(H fonction rationnelle, Q polynome adjoint, ψ polynome).

Si l'on retranche de (10) l'intégrale double

$$\iint \frac{\partial H}{\partial z} dz dx - \frac{\partial H}{\partial y} dx dy,$$

on en obtient une de la forme

$$\iint -\frac{P(x, y, z, t)}{\varphi(x) F'_t} dy dz + \frac{Q(x, y, z, t)}{\psi(x, y) F'_t} dz dx + C dx dy.$$

La condition d'intégrabilité montre alors que C peut se mettre sous la forme

$$\frac{R(x, y, z, t)}{\psi(x, y) F'_t}$$

où R est un polynome adjoint. Il suffit pour cela de considérer les infinis de C , considérée comme fonction de z et t seulement, et d'appliquer le théorème de NÖTHER.

L'intégrale à laquelle on est ramené, est donc bien sous forme normale, et le théorème est démontré.

14. Th. 7. *Si une intégrale de deuxième espèce sous forme normale a ses périodes nulles, elle est impropre.*

Soit $1 + R_2$ la connexion superficielle de la variété. Il existe un système de R_2 cycles à deux dimensions indépendants, qui peuvent être ramenés par déformation à une section hyperplane arbitraire (*). Soit donc

$$\iint \frac{P dy dz}{\varphi(x) F'_t} + \frac{Q dz dx + R dx dy}{\psi(x, y) F'_t},$$

une intégrale de deuxième espèce à périodes toutes nulles. On peut déformer les cycles en question de façon à les ramener à la section par un des hyperplans $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$. Les deux intégrales doubles

$$\iint \frac{P dy dz}{\psi(\bar{x}) F'_t}, \quad F'(\bar{x}, y, z, t) = 0; \quad \iint \frac{Q dz dx}{\psi(\bar{x}, \bar{y}) F'_t}, \quad F'(x, \bar{y}, z, t) = 0,$$

auront donc leurs périodes toutes nulles, et comme elles sont de deuxième espèce, on a (§ 13)

$$\frac{P}{\varphi(x) F'_t} = \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z}; \quad \frac{Q}{\psi(x, y) F'_t} = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S'}{\partial z}$$

et le théorème à démontrer résulte alors du th. 1.

15. *Intégrale de seconde espèce à périodes arbitraires données.* Nous nous proposons de former une intégrale de deuxième espèce ayant R_2 périodes données par rapport au système de R_2 cycles indépendants du § 14, ce qui est équivalent à la formation d'une intégrale de deuxième espèce ayant des périodes données par rapport à un système quelconque de cycles indépendants (**).

(*) F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*. Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, 1909, p. 74.

(**) En effet il en résultera que les cycles en question ne sont pas nuls pour la variété et qu'un multiple convenable de tout autre est homologue à une combinaison linéaire de ceux-ci.

Considérons la surface $F(\bar{x}, y, z, t) = 0$, $x = \bar{x}$, et soit $Q(y, z, t)$ un polynome arbitraire de degré l . Dire qu'il est adjoint à la surface, revient à imposer aux $\binom{l+3}{3}$ coefficients arbitraires qu'il contient un certain nombre de conditions, évidemment rationnelles dans leur ensemble par rapport aux coefficients de l'équation de la surface, c'est-à-dire par rapport à \bar{x} . Les polynomes adjoints de degré l , seront donc de la forme

$$\frac{P(\bar{x}, y, z, t)}{\varphi(\bar{x})}$$

où $P(x, y, z, t)$ est un polynome adjoint à la variété, de degré l en y, z, t , et de degré $l+k$ en x, y, z, t , tandis que $\varphi(\bar{x})$ est un polynome en \bar{x} .

Considérons maintenant l'intégrale double

$$\iint \frac{P(\bar{x}, y, z, t)}{\varphi(\bar{x}) F'_t} dy dz; \quad F(\bar{x}, y, z, t) = 0. \quad (11)$$

Lui imposer la condition d'être de deuxième espèce, donne un certain nombre de conditions rationnelles par rapport à \bar{x} , car il s'agira simplement d'exprimer qu'une certaine intégrale abélienne, formée rationnellement par rapport à \bar{x} , se réduit à une fonction rationnelle.*

Soit alors $1+r_2$, la connexion superficielle des sections hyperplanes. Il résulte de ce qui précède, et aussi du § 12, que si l dépasse une certaine limite, les r_2 périodes de (11) sont indépendantes. On peut donc obtenir r_2 intégrales du type considéré, telles qu'aucune combinaison linéaire de celles-ci ne soit à périodes toutes nulles.

On démontre ensuite facilement, que quand \bar{x} varie, les périodes de (11) subissent les substitutions linéaires, homogènes, à coefficients entiers, d'un certain groupe (**). En fait, on peut montrer que ces périodes sont des fonctions algébriques de \bar{x} , et que ce groupe est le groupe de monodromie d'une certaine surface de RIEMANN, mais peu importe pour notre but.

On déduit de tout ceci, l'existence d'une intégrale telle que (11), de seconde espèce, ayant un système de R_2 périodes données, par rapport aux cycles obtenus par déformation de ceux de la variété, et aucunes autres (***)

(*) PICARD et SIMART, II, p. 188.

(**) PICARD et SIMART, I, p. 97.

(***) PICARD et SIMART, I, p. 100-102.

L'intégrale abélienne

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \frac{P(\bar{x}, \bar{y}, z, t)}{\varphi(\bar{x}) F'_t} dz; \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z, t) = 0,$$

correspondante, se conduit comme une intégrale de deuxième espèce à distance finie. Par suite

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{P}{\varphi F'_t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{R_1}{\psi_1(x, y) F'_t} = \frac{H}{\psi_1(x, y) F'_t}$$

(R_1, H polynômes adjoints, ψ_1 polynôme).

Les deux intégrales doubles

$$\iint \frac{\partial}{\partial x} \frac{P}{\varphi F'_t} dy dz, \quad \iint \frac{\partial}{\partial z} \frac{R_1}{\psi_1(\bar{x}, y) F'_t} dy dz; \quad F(\bar{x}, y, z, t) = 0,$$

ont leurs périodes nulles. Pour la première, c'est évident, et pour la seconde, cela résulte du th. 5. Il en est donc de même pour les périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{H(\bar{x}, y, z, t)}{\psi_1(\bar{x}, y) F'_t} dy dz; \quad F(\bar{x}, y, z, t) = 0.$$

Donc

$$\frac{H}{\psi_1 F'_t} = - \frac{\partial}{\partial y} \frac{Q_2}{\psi_2 F'_t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{R_2}{\psi_2 F'_t},$$

(Q_2, R_2 polynômes adjoints, ψ_2 polynôme en x, y).

Par suite

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{P}{\varphi(x) F'_t} = - \frac{\partial}{\partial y} \frac{Q}{\psi(x, y) F'_t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{R}{\psi(x, y) F'_t}$$

et l'intégrale double

$$\iint \frac{P dy dz}{\varphi(x) F'_t} + \frac{Q dz dx + R dx dy}{\psi(x, y) F'_t} \quad (12)$$

est donc une intégrale double de différentielles totales, sous forme normale, ayant les périodes voulues. Est elle de seconde espèce ?

Elle le sera, si ses résidus relatifs aux sections hyperplanes pour lesquelles $\varphi(x) = 0$, et à l'infini sont nuls, puisque elle ne peut en avoir par rapport à aucune autre surface. Il s'agit d'éliminer ces résidus possibles.

16. Il nous faut d'abord démontrer une proposition préliminaire.

Th. 8. *Les axes étant arbitraires, la section par l'hyperplan $x = a$, n'a pas d'autres cycles linéaires, quelque soit a , que ceux de la variété, et elle les a tous.*

Tant que la section hyperplane a les mêmes singularités que la section générale, ou des singularités qui sont limites de singularités d'une telle section, ceci se réduit à un théorème de MMrs. CASTELNUOVO et ENRIQUES déjà cité au § 2. Supposons donc que l'hyperplan $x = a$ soit tangent à la variété au point $M(a, b, c, d)$, et considérons l'intégrale abélienne de seconde espèce

$$\int \frac{A(\bar{x}, \bar{y}, z, t)}{F'_t} dz; \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z, t) = 0,$$

A étant un polynôme adjoint arbitraire. Si p est le genre des sections planes, on peut former $2p$ intégrales indépendantes telles que la précédente (*). Par suite ses périodes sont indépendantes. Soient $b_1(\bar{x}), b_2(\bar{x}), \dots, b_N(\bar{x})$ leurs valeurs critiques, quand on les considère comme fonctions de \bar{y} seul. Au point b_i correspond une période $\Omega_i(\bar{x}, \bar{y})$ de l'intégrale abélienne, holomorphe au voisinage de ce point. Soit σ_i le cycle linéaire de la section plane correspondant à Ω_i . Ce cycle entoure les deux points de ramification se rapprochant indéfiniment (**), quand \bar{y} approche b_i . Quand \bar{x} est très voisin de a , deux des points b , par exemple b_1 et b_2 , diffèrent très peu l'un de l'autre. Toute section de la variété par l'un des plans

$$x = \bar{x}, \quad y = b_1 + \varepsilon; \quad x = \bar{x}, \quad y = b_2 + \varepsilon,$$

a deux points de ramification très voisins. D'un autre côté toute section par un plan très proche du point M , n'a que deux points de ramification très voisins de la valeur c . Donc les paires de points de ramification considérées plus haut, relatives aux points b_1, b_2 , sont les mêmes, et par suite $\sigma_1 \sim \sigma_2$, le signe d'homologie \sim ayant ici le même sens que dans les travaux de POINCARÉ sur l'Analyse Situs.

Les σ satisfont exactement à $(N - 2p + r)$ relations d'homologie. D'après ce que l'on vient de dire, elles peuvent s'écrire

$$\sigma_1 \sim \sigma_2, \quad \sum_2^N m_i^h \sigma_i \sim 0, \quad (h = 2, \dots, N - 2p - r),$$

(*) Ceci résulte d'une discussion de Mr. PICARD. Voir PICARD et SIMART, I, pp. 159-163.

(**) PICARD et SIMART, I, p. 97; II, p. 332.

les m étant des entiers. De plus: 1.^o Tous ces cycles sont réductibles, par déformation, à un point ordinaire de la surface $F(\bar{x}, y, z, t) = 0$. 2.^o Tous les cycles réductibles à un point par déformation sur cette surface sont linéairement dépendants des σ (*).

Soient $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_r$ les cycles obtenus par déformation des r cycles non nuls de la surface. Parmi les cycles σ , $2p - r$ exactement sont indépendants, par exemple ceux pour lesquels $2 \leq i \leq 2p - r + 1$. On aura un système de $2p$ cycles indépendants pour une section plane arbitraire, en prenant des cycles $\bar{\sigma}$ tels que

$$\bar{\sigma}_i \sim \bar{\sigma}'_i, \quad i \leq r; \quad \bar{\sigma}_i \sim \sigma_{i-r+1}, \quad i > r.$$

Ce système sera tel que: 1.^o Tant que $\bar{y} \neq b$, même si $\bar{x} = a$, ces $\bar{\sigma}$ sont indépendants. 2.^o Pour $\bar{x} = a + \varepsilon$, ceux d'indice $> r$ seront réductibles à un des points b . Il sera suffisant, pour obtenir ce résultat, de faire décrire à \bar{y} un chemin convenable aboutissant à un de ces points. En particulier $\bar{\sigma}_{r+1}$ sera réductible soit à b_1 , soit à b_2 .

Qu'arrive-t-il pour $\bar{x} = a$? Rien ne sera changé pour les cycles $\bar{\sigma}_i$ tels que $i \neq r + 1$. Si $i > r + 1$, $\bar{\sigma}_i$ est réductible à un point ordinaire de la surface $F(a, y, z, t) = 0$, et par suite est nul, quand on le considère comme un cycle linéaire de la surface, et non plus seulement de la section plane. Le cycle $\bar{\sigma}_{r+1}$ est réductible au point conique M de cette surface, et par suite c'en est aussi un cycle nul. En effet, ce point conique se conduit comme un point critique général (**), sauf que $\bar{\sigma}_{r+1}$ doit être remplacé par $2\bar{\sigma}_{r+1}$, dans toutes les discussions relatives à ces points. Ainsi pour $\bar{x} = a$, le système des cycles $\bar{\sigma}$ est encore composé de r cycles obtenus par déformation de ceux de la surface, et de $2p - r$ cycles réductibles à zéro sur cette surface. Ceci démontre bien que cette dernière a encore $r + 1$ pour connexion linéaire (***), comme on l'a affirmé.

17. Revenons à l'intégrale (12) obtenue au § 15, et supposons qu'elle ait des résidus non nuls pour la section par l'hyperplan $x = a$. L'intégrale simple relative à cette surface, dont ces résidus sont les périodes, est nécessairement de seconde espèce, car seule la courbe à l'infini pourrait en être

(*) PICARD et SIMART, II, p. 388.

(**) PICARD et SIMART, II, p. 409.

(***) Puisque le genre des sections planes est toujours $2p$.

une courbe logarithmique. Il existe une intégrale simple de différentielles totales, relative à la variété, ayant ces résidus pour seules périodes.

Si cette intégrale est

$$\int U dx + V dy + W dz,$$

l'intégrale abélienne

$$\int W(\bar{x}, \bar{y}, z, t) dz; \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z, t) = 0,$$

étant de deuxième espèce, on a

$$W + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{Q_1(x, y, z, t)}{\psi_1(x, y) F'_t}$$

et en appliquant une des conditions d'intégrabilité de l'intégrale de différentielles totales

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{Q_1}{\psi_1 F'_t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(V - \frac{\partial H}{\partial y} \right).$$

En considérant les infinis du second membre, on trouve que

$$V - \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{R_1(x, y, z, t)}{\psi_1(x, y) F'_t}$$

(Q_1, R_1 polynomes adjoints, ψ_1 polynome).

L'intégrale double de différentielles totales

$$\iint \frac{Q_1(x, y, z, t) dz dx + R_1(x, y, z, t) dx dy}{(x - a) \psi_1(x, y) F'_t}, \quad (13)$$

a les résidus de (12) pour résidus par rapport à la section par l'hyperplan $x = a$. Je dis que, sauf certains résidus possibles par rapport à la surface à l'infini, elle n'en a pas d'autres. En effet, les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{Q_1(\bar{x}, \bar{y}, z, t) dz}{(\bar{x} - a) \psi(\bar{x}, \bar{y}) F'_t}; \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z, t) = 0,$$

sont de la forme $\frac{\alpha}{x - a}$, où α est une constante. Or les résidus de (13), qui

sont aussi ceux de l'intégrale double

$$\iint \frac{Q_1(x, \bar{y}, z, t) dz dx}{(x-a)\psi_1(x, \bar{y})F'_t}; \quad F(x, \bar{y}, z, t) = 0,$$

sont les résidus des périodes considérées par rapport aux poles autres que a . Ils sont donc nuls.

En retranchant de (12) une somme d'intégrales telles que (13), on obtiendra une intégrale du même type, n'ayant de résidus que relativement à la surface à l'infini. Je dis que ces derniers sont nuls.

En effet, autrement l'intégrale double

$$\iint \frac{P(\bar{x}, y, z, t)}{\varphi(\bar{x})F'_t} dy dz; \quad F(\bar{x}, y, z, t) = 0, \quad (11)$$

du § 15, ne serait pas de seconde espèce, ce qui est cependant le cas, par hypothèse. L'intégrale obtenue est donc bien de deuxième espèce, puisque tous ses résidus sont nuls (§ 7). De plus, on peut considérer un système de R_2 cycles à deux dimensions de la variété, entièrement situés dans la section par un hyperplan $x = \text{const.}$, et n'y rencontrant pas les surfaces pour lesquelles l'intégrale (12) devient infinie. Les périodes de (12) sont donc égales à celles de l'intégrale double de surface algébrique (11), ce qui revient à dire qu'elles ont les valeurs arbitraires données. Comme conclusion, il est donc permis d'énoncer :

Th. 9. *Il existe une intégrale double de deuxième espèce sous forme normale, ayant R_2 périodes arbitraires données.*

18. Avant de continuer, nous allons démontrer un théorème, qui servira de base à l'extension de ce qui précède aux variétés à plus de trois dimensions.

Th. 10. *Considérons les intégrales doubles de deuxième espèce de surface algébrique*

$$\iint \frac{P_1(\bar{x}, y, z, t)}{\varphi_1(\bar{x})F'_t} dy dz, \quad \iint \frac{P_2(x, \bar{y}, z, t)}{\varphi_2(\bar{y})F'_t} dz dx,$$

$$\iint \frac{P_3(x, y, \bar{z}, t)}{\varphi_3(\bar{z})F'_t} dx dy,$$

(P_1, P_2, P_3 polynomes adjoints, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ polynomes),

relatives aux sections par les hyperplans $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$, respectivement, ayant les mêmes périodes (nécessairement constantes), par rapport aux cycles obtenus par déformation de ceux de la variété, et des périodes nulles par rapport aux autres. On peut trouver trois fonctions rationnelles U , V , W , telles que l'on ait

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{P_1}{\varphi_1 F'_t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{P_2}{\varphi_2 F'_t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{P_3}{\varphi_3 F'_t} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0.$$

Soit

$$\iint \frac{P_1 d y d z}{\varphi_1(x) F'_t} + \frac{Q d z d x + R d x d y}{\psi(x, y) F'_t}, \quad (14)$$

l'intégrale de seconde espèce sous forme normale ayant les mêmes périodes que celles de l'énoncé. L'intégrale double de seconde espèce

$$\iint \left(\frac{P_2}{\varphi_2 F'_t} - \frac{Q}{\psi F'_t} \right) d z d x; \quad F(x, \bar{y}, z, t) = 0,$$

a ses périodes toutes nulles. Par suite (th. 5),

$$\frac{Q}{\psi F'_t} - \frac{P_2}{\varphi_2 F'_t} = \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial S'}{\partial x}.$$

Supposons que l'on arrive à montrer que

$$\frac{R}{\psi F'_t} - \frac{P_3}{\varphi_3 F'_t} = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T'}{\partial y}.$$

Il suffira alors d'éliminer Q , R , entre les deux relations précédentes et la condition d'intégrabilité de (14), pour obtenir le résultat annoncé.

Tout d'abord il existe une intégrale double de différentielles totales ayant les mêmes périodes que (14), et obtenue en échangeant les rôles des variables y et z dans celle-ci. Soit

$$\iint \frac{P_1 d y d z}{\varphi_1(x) F'_t} + \frac{Q' d z d x + R' d x d y}{\psi'(x, z) F'_t}, \quad (14')$$

cette intégrale. On aura évidemment encore

$$\frac{P_3}{\varphi_3 F'_t} - \frac{R'}{\psi' F'_t} = \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T'_1}{\partial y}.$$

Il suffit donc de démontrer que

$$\frac{R}{\psi F'_t} - \frac{R'}{\psi' F'_t} = \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T'_2}{\partial y}.$$

Posons

$$H = \frac{Q}{\psi F'_t} - \frac{Q'}{\psi' F'_t}, \quad K = \frac{R}{\psi F'_t} - \frac{R'}{\psi' F'_t}.$$

Des conditions d'intégrabilité de (14) et (14') on tire

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = 0.$$

Donc

$$\int H dz - K dy; \quad F(\bar{x}, y, z, t) = 0,$$

est une intégrale de différentielles totales. Soient y_1, y_2, \dots, y_s les racines de $\psi(\bar{x}, y) = 0$, z_1, z_2, \dots, z_r celles de $\psi'(\bar{x}, z) = 0$, $\alpha_i(\bar{x}), \beta_k(\bar{x})$ les périodes logarithmiques de l'intégrale précédente par rapport aux sections par les plans $y = y_i, z = z_k$, respectivement. L'intégrale de fonction algébrique $\bar{\alpha}_i(x) = \int \alpha_i(x) dx$ se réduit à une fonction algébrique de x . En effet ses périodes sont résidus de l'intégrale double de seconde espèce de surface algébrique

$$\iint K(x, y, \bar{z}, t) dx dy; \quad F(x, y, \bar{z}, t) = 0.$$

De même $\bar{\beta}_k(x) = \int \beta_k(x) dx$ est une fonction algébrique de x . Par suite les fonctions

$$S_2(x, z) = \sum \frac{\bar{\beta}_k(x)}{z - z_k}; \quad T_2(x, y) = - \sum \frac{\bar{\alpha}_i(x)}{y - y_i},$$

sont rationnelles, et l'intégrale de différentielles totales

$$\int \left(H - \frac{\partial S_2}{\partial \bar{x}} \right) dz - \left(K - \frac{\partial T_2}{\partial \bar{x}} \right) dy; \quad F(\bar{x}, y, z, t) = 0,$$

ne pouvant avoir que la seule courbe à l'infini comme courbe logarithmique,

est de seconde espèce. Raisonnant alors comme au § 2, on montre que

$$K - \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\partial T'_2}{\partial y},$$

ce qui établit le théorème que nous avons en vue.

IV. NOMBRE D'INTÉGRALES PROPRES DE SECONDE ESPÈCE.

19. De ce que toute intégrale de deuxième espèce peut être ramenée à la forme normale, et que toute intégrale sous cette forme à périodes et résidus nuls est impropre de deuxième espèce, on déduit que le nombre ρ_0 d'intégrales propres sera connu en même temps que celui des intégrales sous forme normale, impropres, à périodes non nulles.

Supposons que l'intégrale double sous forme normale

$$\iint \frac{P dy dz}{\varphi(x) F'_t} + \frac{Q dz dx + R dz dy}{\psi(x, y) F'_t}$$

soit égale à

$$\iint \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) dy dz + \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) dz dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx dy.$$

En comparant, on voit d'abord que les périodes logarithmiques à distance finie, de l'intégrale abélienne

$$\int W(\bar{x}, \bar{y}, z, t) dz; \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z, t) = 0, \quad (15)$$

sont indépendantes de \bar{x} ou \bar{y} , et que par suite ce sont des constantes.

Rappelons certains théorèmes de Mr. SEVERI :

1.° Il existe une *base* pour les surfaces de la variété. En particulier, deux surfaces sont équivalentes, si leurs traces sur une section hyperplane arbitraire le sont (*).

(*) *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique.* Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup., 1908, p. 467.

2.° Pour que des courbes en nombre fini d'une surface algébrique, ne soient pas algébriquement distinctes, il faut et il suffit, qu'il existe une intégrale de différentielles totales de troisième espèce, ayant ces courbes pour courbes logarithmiques (*).

Soit ρ le nombre base, ou nombre de PICARD de la variété, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\rho-1}$, un système de surfaces, formant avec la surface à l'infini Δ_0 , base pour la variété. Soit en outre, $g_i(x, y, z) = 0$, l'équation de la projection de Δ_i ($i > 0$), Δ'_i étant l'autre surface de la variété (s'il y en a une), qui a la même projection. Désignons enfin par D_i, D'_i les traces des surfaces Δ_i, Δ'_i , sur la section hyperplane $x = \bar{x}$. Si E_1, E_2, \dots, E_r forment un système de courbes conjuguées, au sens du § 1, sur cette section hyperplane, et que $W(\bar{x}, y, z, t)$ devienne infinie sur l'une, elle le devient sur toutes, puisque cette fonction est rationnelle en \bar{x} . Pour la même raison, les périodes logarithmiques de (15) seront les mêmes par rapport à tous les points sur les courbes E . La courbe $E = \sum E_i$, augmentée de la courbe à l'infini comptée un certain nombre de fois, est la trace d'une surface de la variété. Par suite $\lambda E = \sum \lambda_i D_i$, et parmi les courbes d'infini de V, W , on pourra faire disparaître E , et la remplacer par les courbes D , ce qui donne (**)

$$\frac{P}{\varphi(\bar{x}) F'_i} = \sum_{i=1}^{\rho-1} z_i \frac{P'_i(\bar{x}, y, z, t)}{F'_i} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{1}{F'_i} + \frac{\partial B}{\partial z} \frac{1}{F'_i}$$

$$(i = 1, 2, \dots, \rho - 1).$$

$$\frac{P'_i}{F'_i} = \frac{\partial M_i}{\partial z} \frac{1}{g_i F'_i} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{1}{g_i F'_i}$$

(A, B, P'_i polynômes adjoints à la courbe en $\bar{x}, y, F(\bar{x}, y, z, t) = 0$, à coefficients algébriques en \bar{x} et rationnels en y ; M_i, N_i polynômes de même nature s'annulant sur D'_i). Ici encore, les périodes logarithmiques de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{N_i(\bar{x}, \bar{y}, z, t)}{g_i F'_i} dz; \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z, t) = 0,$$

par rapport aux points sur D_i , sont constantes. Comme c'est aussi le cas pour celles de (15), les α sont des constantes. Quant'aux fonctions P', M, N, A, B , on peut les choisir rationnelles en \bar{x} aussi, puisque on peut évidemment

(*) *Math. Ann.*, 1906, p. 209.

(**) PICARD et SIMART, II, p. 303.

les remplacer par la moyenne de leurs valeurs, en nombre fini, pour une valeur fixe de \bar{x} .

L'intégrale abélienne

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \int \frac{N_i}{g_i F'_i} dz; \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z, t) = 0,$$

se conduit comme une intégrale de seconde espèce à distance finie. Donc (*)

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{N_i}{g_i F'_i} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{L_i}{g_i F'_i} = \frac{Q_i(x, y, z, t)}{\psi(x, y) F'_i}$$

(L_i de même nature que $M_i, N_i; Q_i$, polynome adjoint à la variété; ψ polynome).

Considérons l'intégrale double impropre de seconde espèce

$$J_i = \iint \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{M_i}{g_i F'_i} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{N_i}{g_i F'_i} \right) dy dz + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{N_i}{g_i F'_i} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{L_i}{g_i F'_i} \right) dz dx + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{L_i}{g_i F'_i} - \frac{M_i}{g_i F'_i} \right) dx dy.$$

Comme les deux premiers coefficients différentiels sont finis partout, sauf au voisinage de certaines surfaces dont la projection a une équation du type $\psi(x, y) = 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{L_i}{g_i F'_i} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{M_i}{g_i F'_i} = \frac{R_i(x, y, z, t)}{\psi_i(x, y) F'_i},$$

où R_i est un polynome adjoint à la variété. Posons $P'_i = \frac{P_i}{\varphi_2(x)}$, P_i étant un polynome adjoint à la variété. On voit que l'intégrale double

$$J_i = \iint \frac{P_i}{\varphi_i(x) F'_i} dy dz + \frac{Q_i dz dx + R_i dx dy}{\psi_i(x, y) F'_i}.$$

est sous forme normale. Si de l'intégrale double de différentielles totales du début du paragraphe on soustrait $\sum_i \alpha_i J_i$, on obtient

$$\iint \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) dy dz + \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) dz dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx dy,$$

(*) On appliquera encore le théorème de NÖTHER généralisé, pour obtenir la forme du second membre de la relation suivante, comme on l'a indiqué au § 13.

d'ailleurs encore sous forme normale. En outre, V , W seront du type

$$\frac{A(x, y, z, t)}{\varphi(x) F'_t}.$$

Les périodes de cette intégrale double, qui sont égales à celles de

$$\iint \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) dy dz; \quad F(\bar{x}, y, z, t) = 0,$$

seront nulles (th. 5). Nous avons donc démontré :

Th. 11. *Toute intégrale de deuxième espèce, sous forme normale, impropre, à périodes non nulles, est égale à une combinaison linéaire de $\rho - 1$ d'entre elles, augmentée d'une intégrale analogue à périodes nulles.*

Comme les courbes D sont algébriquement distinctes, aucune combinaison linéaire des intégrales $J_1, J_2, \dots, J_{\rho-1}$ ne peut avoir ses périodes nulles (*). Par suite le nombre d'intégrales propres distinctes est

$$\rho_0 = R_2 - (\rho - 1).$$

V. EXTENSION AUX VARIÉTÉS À PLUS DE TROIS DIMENSIONS.

20. Soit $F(x_1, x_2, \dots, x_a, t) = 0$ l'équation d'une variété algébrique irréductible à singularités ordinaires V_a . Les intégrales doubles de différentielles totales relatives à V_a sont du type

$$\iint \sum_{i,k} P_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_a, t) dx_i dx_k,$$

où $P_{ik} = -P_{ki}$ est une fonction rationnelle du point sur la variété, et l'on a les relations correspondant à la condition d'intégrabilité de POINCARÉ,

$$\frac{\partial P_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial P_{hk}}{\partial x_i} + \frac{\partial P_{ki}}{\partial x_h} = 0,$$

satisfaites pour toutes les combinaisons des entiers distincts i, k, h . La théorie développée précédemment s'étend, sans trop de peine, à V_a . Les seuls points

(*) Voir PICARD et SIMART, II, p. 315, en connexion avec le th. 5.

présentant une certaine difficulté sont: 1.° La démonstration du th. 1. 2.° La formation d'une intégrale de seconde espèce ayant des périodes données.

1.° *Extension du th. 1.* Supposons que l'on ait

$$P_{1i} = \frac{\partial R_1^{(i)}}{\partial x_i} - \frac{\partial R_i^{(1)}}{\partial x_1} \quad (i = 2, 3, \dots, d).$$

Il s'agit de démontrer que l'intégrale double peut se mettre sous la forme

$$\iint \Sigma \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k, \quad (16)$$

où les X sont des fonctions rationnelles. Supposons que ce soit vrai pour une $V_{d'}$, $d' < d$. En maintenant constants tous les x , d'indice autre que 1, i, k , on obtient une intégrale double de différentielles totales relative à une variété à trois dimensions contenue dans $V_{d'}$, et en appliquant le résultat du § 1, on a (*)

$$P_{ik} = \frac{\partial R_i^{(i,k)}}{\partial x_k} - \frac{\partial R_k^{(i,k)}}{\partial x_i}.$$

Ensuite, une combinaison linéaire d'intégrales telles que (16) est encore de cette forme. Si on soustrait de l'intégrale donnée la suivante

$$\iint \Sigma \left(\frac{\partial X'_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X'_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k,$$

où $X'_1 = R_1^{(1,2)}$, $X'_2 = R_2^{(1,2)}$, $X'_i = 0$, $i > 2$, on aura encore une intégrale de la même forme, sauf que P_{12} sera remplacé par zéro. Maintenons constants tous les x d'indice supérieur à trois; on aura l'intégrale

$$\iint P_{23} dx_2 dx_3 + P_{31} dx_3 dx_1,$$

et d'après les conditions satisfaites, on doit avoir (th. 1),

$$P_{31} = \frac{\partial R}{\partial x_1}, \quad P_{23} = -\frac{\partial R}{\partial x_2}.$$

Retrançons de l'intégrale considérée en second lieu,

$$\iint \Sigma \left(\frac{\partial X''_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X''_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k,$$

(*) On montre facilement que les R sont rationnelles, un point sur lequel nous n'insistons plus par la suite.

avec $X''_i = 0$, $i = 3$, $X''_3 = R$. On en obtiendra une de même forme que l'intégrale originale, sauf que maintenant $P_{12} = P_{13} = 0$. En continuant de même, on arrivera à une intégrale pour laquelle $P_{1i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, d$, et on voit que l'on sera alors ramené au cas d'une V_{a-1} . La proposition est donc démontrée.

21. 2.° *Formation d'une intégrale double à périodes données.* Tout d'abord la connexion superficielle de V_a est la même que celle de toute V_k , $k > 2$, contenue dans V_a (*). Prenons le cas de $d = 4$, le cas général se traitant exactement de la même manière que celui-ci.

On peut former des intégrales doubles de surface algébrique

$$\iint A_{ij} dx_i dx_j = \iint \frac{P_{ij} dx_i dx_j}{\varphi_{ij}(\bar{x}_h, \bar{x}_k) F'_i}, \quad F = 0, \quad x = \bar{x}_h, \quad x = \bar{x}_k,$$

ayant les B_2 périodes arbitraires données ($B_2 + 1$ connexion superficielle), par rapport aux cycles obtenus par déformation de ceux de la variété, et des périodes nulles par rapport aux autres.

En appliquant le th. 10, on obtient les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 B_{23}^4}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 B_{31}^4}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 B_{12}^4}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ \dots & \\ \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 B_{23}^1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 B_{34}^1}{\partial x_3 \partial x_4} + \frac{\partial^2 B_{42}^1}{\partial x_4 \partial x_2} &= 0 \\ (B_{ik}^h &= -B_{ki}^h). \end{aligned}$$

Des considérations analogues à celles du § 15 montrent que les A_{ik} sont rationnelles. Quant aux B , on pourra aussi prendre pour elles des valeurs rationnelles.

Des équations précédentes, on tire, en différentiant celle contenant les B^i , par rapport à x_i , et en ajoutant:

$$\sum_{i,h,k} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k} (B_{hk}^i + B_{ki}^h + B_{ih}^k) = 0.$$

(*) CASTELNUOVO et ENRIQUES, loc. cit. La démonstration qui y est donnée pour les cycles linéaires d'une V_3 s'étend d'elle-même.

22. Supposons que l'intégrale abélienne

$$\int A'_{1j} d x_1 = \int \frac{P'_{1j} d x_1}{\varphi'_{1i}(\bar{x}_h, \bar{x}_k) F'_i}, \quad F=0, \quad x = \bar{x}_i, \quad x = \bar{x}_h, \quad x = \bar{x}_k, \quad (17)$$

n'ait pas d'autres périodes, que celles relatives aux cycles obtenus par déformation des r cycles linéaires de la variété ($r+1$ connexion linéaire de V_4). Alors l'intégrale double

$$\iint A'_{1i} d x_1 d x_i, \quad F=0, \quad x = \bar{x}_h, \quad x = \bar{x}_k,$$

aura toutes ses périodes et ses résidus égaux à zéro. En effet, les périodes désignées par Ω , au § 16, sont nulles dans le cas considéré, ce qui résulte de leurs propriétés rappelées en cet endroit. D'après la forme des expressions données par Mr. PICARD (*), pour les périodes et les résidus en question, ceux-ci sont nécessairement nuls.

Les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{P_{1i} d x_1}{\varphi_{1i}(\bar{x}_h, \bar{x}_k) F'_i}$$

relative à la même courbe que (17), par rapport aux r cycles de V_4 , sont des fonctions rationnelles de x_i, x_h, x_k . On en tire la possibilité de former une intégrale telle que (17), ayant les mêmes périodes par rapport à ces r cycles, que la dernière intégrale considérée. Les deux intégrales doubles

$$\iint (A_{1i} - A'_{1i}) d x_1 d x_i, \quad \iint A_{1i} d x_1 d x_i, \quad F=0, \quad x = \bar{x}_h, \quad x = \bar{x}_k,$$

auront donc mêmes périodes, tandis que les périodes de l'intégrale

$$\int (A_{1i} - A'_{1i}) d x_1, \quad F=0, \quad x = \bar{x}_i, \quad x = \bar{x}_h, \quad x = \bar{x}_k,$$

par rapport aux r cycles linéaires déjà considérés, sont nulles.

Dans toutes nos considérations on pourra donc remplacer la seconde de ces intégrales doubles, par la première, qui est de même nature (**).

(*) PICARD et SIMART, II, p. 333.

(**) PICARD et SIMART, I, p. 101. Les constantes qui y sont désignées par P , pourraient être remplacées par des fonctions rationnelles de y , sans changer le résultat. — La généralisation est alors immédiate.

23. Supposons donc nulles les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int A_{1i} dx_i,$$

relative à la section plane déjà considérée, et aux mêmes r cycles linéaires ($i = 2, 3, 4$). D'après les équations du § 21, il en sera de même, pour les périodes correspondantes de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{\partial^2 B_{ik}^h}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k} dx_i \quad (i, h, k = 1).$$

relative à la même section.

D'un autre côté, en désignant par B une certaine fonction rationnelle, on déduit de la dernière relation du même paragraphe, que

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_4} (B_{34}^2 + B_{42}^3 + B_{23}^4) + \frac{\partial B}{\partial x_1} = 0.$$

Par suite

$$\int \frac{\partial^2 (B_{34}^2 + B_{42}^3 + B_{23}^4)}{\partial x_i \partial x_h} dx_i - B dx_k, \quad F = 0, \quad x = \bar{x}_h, \quad x = \bar{x}_i,$$

est une intégrale de différentielles totales. D'après le théorème de MMrs. CASTELNUOVO et ENRIQUES, déjà souvent mentionné, cette intégrale de différentielles totales ne peut avoir de périodes que par rapport aux cycles linéaires obtenus par déformation de ceux de V_4 . Elle se réduit donc à une fonction rationnelle, et enfin

$$\frac{\partial^2 (B_{34}^2 + B_{42}^3 + B_{23}^4)}{\partial x_i \partial x_h} = \frac{\partial C}{\partial x_1}.$$

C étant une fonction rationnelle.

Posons maintenant (*)

$$\begin{aligned} E_{23} &= - \int_{x_1^0, t_0}^{x_1, t_4} \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial A_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 B_{23}^4}{\partial x_2 \partial x_3} \right) dx_1 \\ E_{42} &= - \int_{x_1^0, t_0}^{x_1, t_4} \left(\frac{\partial A_{14}}{\partial x_2} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial^2 B_{42}^3}{\partial x_4 \partial x_2} \right) dx_1 \\ E_{34} &= - \int_{x_1^0, t_0}^{x_1, t_4} \left(\frac{\partial A_{13}}{\partial x_4} - \frac{\partial A_{14}}{\partial x_3} - \frac{(B_{23}^4 + B_{42}^3)}{\partial x_3 \partial x_4} \right) dx_1, \end{aligned}$$

(*) Voir PICARD et SIMART, I, p. 102. Notre raisonnement, à partir de ce point, est le même.

où t_i est une des racines de l'équation en t :

$$F(x_1^0, x_2, x_3, x_4, t) = 0.$$

Il est clair que les E sont des fonctions rationnelles de x_1, \dots, x_4, t, t_i . Posons enfin

$$G_{12} = A_{12}, \quad G_{13} = A_{13} - \frac{\partial B_{23}^4}{\partial x_3}, \quad G_{14} = A_{14} + \frac{\partial B_{42}^3}{\partial x_4},$$

$$G_{hk} = \frac{1}{m} \sum_1^m E_{hk}(x_1, \dots, x_4, t, t_i);$$

($h, k = 2, 3, 4$; m ordre de V_4).

Les fonctions G sont toutes rationnelles, et de plus elles satisfont aux quatre conditions d'intégrabilité de POINCARÉ. L'intégrale double

$$\frac{1}{2} \iint \Sigma G_{hk} dx_h dx_k,$$

est donc bien *une intégrale double de différentielles totales, relative à V_4* . Elle se réduira à une forme normale, et en général, le reste de la discussion est le même que pour $d = 3$. En particulier, on a encore

$$\rho_0 = R_2 - (\rho - 1).$$

REMARQUE. — Il résulte de ce qui précède qu'à toute intégrale double propre de deuxième espèce de V_4 en correspond une pour ses sections hyperplanes et réciproquement. Si ρ', ρ'_0 sont les nombres de PICARD et d'intégrales doubles de deuxième espèce propres relativement à ces dernières, on a donc $\rho_0 = \rho'_0$. D'après les formules obtenues on a donc $\rho' = \rho$. Ainsi *les nombres de PICARD d'une V_4 (ou d'une V_d $d > 4$), et de ses sections hyperplanes sont égaux*.

Nous reviendrons là-dessus dans un travail ultérieur.