SUPPLEMENTARY TABLES FOR FINDING THE CORRELATION COEFFICIENT FROM TETRACHORIC GROUPINGS.

By P. F. EVERITT, B.Sc.

Object of the Tables.

These tables have been prepared to facilitate the determination of the correlation coefficient by the method of the fourfold table in those cases where the correlation has a very high value. The usual method involves the solution of an equation in ascending powers of the correlation coefficient r; the numerical coefficients of these powers are the products of the corresponding terms of two series, alternate terms of these series being ultimately absolutely convergent. When r is large, these alternate terms will not in general converge rapidly, so that it usually becomes necessary to take a large number of terms into consideration and the work becomes very long and tedious. The present tables are designed to allow the value of r to be obtained easily and rapidly by a series of simple interpolations, thus avoiding the lengthy and rather intricate calculations formerly necessary and consequently decreasing the opportunities of making slips in the numerical work. It is precisely in the case of those fourfold tables for which r is large that we must go beyond the number of terms provided for in my paper on the tetrachoric functions.

Method of Construction.

The nomenclature used will be that of Pearson's* paper describing the method of the fourfold table, and explained at length in the Tables of Tetrachoric Functions for Fourfold Correlation Tables†.

* *Phil. Trans.* A, Vol. 195, pp. 1—47.

† *Biometrika*, Vol. VII. pp. 437—451, 1910. The notation is given by the scheme:

a	b	$a+b$
c	d	$c+d$
$a+c$	$b+d$	N

It has been shown by Elderton* that

$$\frac{d}{N}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_h^\infty\int_k^\infty e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-r^2}(x^2+y^2-2rxy)}\,dx\,dy$$

may be transformed into

$$\frac{d}{N}=\frac{1}{2\pi}\int_k^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}\left\{\int_t^\infty e^{-\frac{1}{2}X^2}\,dX\right\}dy,$$

where $t=\frac{h-yr}{\sqrt{1-r^2}}$ and this form is utilised to compute d as a check for the value of r obtained by the usual method of solution. Now $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty e^{-\frac{1}{2}X^2}\,dX$ and $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$ are known quantities, being the $\frac{1}{2}(1+\alpha)$ and z of Sheppard's Tables†. Putting $\frac{1}{2}(1+\alpha)=I$ for convenience, we now have $\frac{d}{N}=\int_k^\infty zI\,dy$ and this form was used for constructing the tables.

The work was carried out in columns; the first column contained the values of y or k rising from zero by intervals of ·1, while the second column contained the corresponding values of z as found from Sheppard's Tables. These two columns remained constant during the whole of the work. The remaining columns were grouped in threes and contained the values of t, I and zI, the headings having suffixes attached showing the value of h to which they applied. The values of $\int_k^\infty zI\,dy$ were now obtained by a quadrature formula, first using all the values of zI in the column and then striking out each in turn from the top of the column downwards. Considerable difficulty was found in choosing a suitable quadrature formula and after many trials Weddle's Rule was adopted as being the most suitable‡. The table for $r=1$ was formed directly from Sheppard's Tables.

Checking.

Since
$$\frac{d}{N}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_h^\infty\int_k^\infty e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-r^2}(x^2+y^2-2rxy)}\,dx\,dy$$

is perfectly symmetrical in x and y, it is obvious that the value of d/N is unaltered when the values of h and k are interchanged. Consequently (excluding the case $h=k$) each value of d/N in the tables occurs twice and by the above method of construction each of the two values is obtained independently; it will also be noticed that in the final quadrature, the number of ordinates employed will also

* *Frequency Curves and Correlation.* Layton. London.

† New Tables of the Probability Integral. W. F. Sheppard. *Biometrika*, Vol. II. pp. 174 ff.

‡ It was always possible to make the ordinates number a multiple of six, as required by Weddle's Rule, by the simple process of adding sensibly zero ordinates at the asymptotic tail of the curve.

differ, so that the checking not only applies to the actual numerical work but also tests the accuracy of the quadrature formula. The whole of the work was carried out using five places of decimals, and the resulting values of d/N taken to five places gave a maximum discrepancy of one unit in the last place; this discrepancy could always be traced to the effect of cutting off at the fifth place in the formation of the product zI and only occurred when, as must occasionally happen, a number of values grouped together by the quadrature formula happened to be rounded off in the same direction.

In the special case $h = k$, the value of d/N only occurs once in each table and these cases were checked by differences.

Method of using the Tables.

In using the Tables to find the value of r the quantities $(b + d)/N$, $(c + d)/N$ and d/N are first found by division and then the values of h and k taken out from Sheppard's Tables. Using these values of h and k as arguments and comparing the values of d/N given in the Tables with the actual value of d/N in the particular case, the two values of r, between which the required value probably lies, can be readily found by inspection.

For each of these two values of r, the value of d/N is next found by interpolation, using the actual values of h and k as arguments; for each d/N there will be two such interpolations, one for h and one for k, and it is preferable as a general rule to perform that interpolation first for which the correction to d/N is the smaller. Having now obtained the value of d/N for the actual h and k for the two assumed values of r, the actual value of r is easily found by one more simple interpolation. The process may, at first sight, seem rather complicated but in actual practice the result is obtained with ease in a very few minutes.

Example.

Consider the fourfold table given below.

608	45	653
9	48	57
617	93	710

By division $\frac{b+d}{N} = {\cdot}13099, \quad \frac{c+d}{N} = {\cdot}08028, \quad \frac{d}{N} = {\cdot}0676,$

whence from Sheppard's Tables $h = 1{\cdot}1218$, $k = 1{\cdot}4032$.

The values between which r will probably lie are next found by inspection of the tables, and it will at once be evident that the value of r lies between ·9 and ·95.

We accordingly proceed to find d/N for these values of r by interpolating in these two tables for the above values of h and k; in accordance with the general rule previously given, the interpolation is first carried out for k and afterwards for h.

From the tables we have

			$h=1{\cdot}1$	$h=1{\cdot}2$
	$r={\cdot}9$	$k=1{\cdot}4$	·0686	·0645
		$k=1{\cdot}5$	·0591	·0562
			$h=1{\cdot}1$	$h=1{\cdot}2$
which gives	$r={\cdot}9$	$k=1{\cdot}4032$	·0683	·0642
and finally	$r={\cdot}9$,	$k=1{\cdot}4032$,	$h=1{\cdot}1218$,	$d/N={\cdot}0674$.

Similarly we obtain

$$r={\cdot}95,\quad k=1{\cdot}4032,\quad h=1{\cdot}1218,\quad d/N={\cdot}0745.$$

Interpolating for r, bearing in mind that the interval of r from one table to the next is ·05, and using $d/N={\cdot}0676$ as argument, we obtain the result $r={\cdot}903$.

Accuracy of the Result.

In order to test the accuracy of the result, the value of r in the above example was calculated by the usual method, using the Tables of Tetrachoric Functions and including terms up to the twelfth power of r.

The equation obtained was

$$\begin{aligned}{\cdot}057090 = {} & {\cdot}010516r + {\cdot}024948r^2 + {\cdot}01322r^3 + {\cdot}003733r^4 + {\cdot}003868r^5 - {\cdot}000225r^6 \\ & + {\cdot}002923r^7 - {\cdot}000121r^8 + {\cdot}001597r^9 + {\cdot}000442r^{10} + {\cdot}000630r^{11} + {\cdot}000017r^{12},\end{aligned}$$

whence solving by Newton's rule the value of r is found to be ·904.

It is not suggested that this remarkably close agreement between the two values ·903 and ·904 is always to be expected; but the difference between the two values will always, I think, be found very much less than the probable error of r and will therefore be without any significance.

Further Note on the Tables.

If D_{hk} be the tabulated value of d/N for arguments h and k for any one of the values of r for which the Tables are constructed, then the volume of the frequency solid on the area bounded by the lines corresponding to the values h_1, h_2, k_1, k_2, is given by $D_{h_1k_1} + D_{h_2k_2} - D_{h_1k_2} - D_{h_2k_1}$. Consequently within the limits $r={\cdot}8$ to $r=1$ the distribution of the frequency within the one quadrant, for which the Tables are constructed, may be readily found.

Cases where the Method of the Fourfold Table fails.

A careful examination of the Tables shows that, when the values of h and k differ widely and r is large, then the corresponding values of d/N differ very little from one value of r to the next; in such a case the probable error of r will be large. It may also quite easily happen in such cases, that the value of d/N does not vary for values of r between ·8 and 1 and in such a case the method of the fourfold table fails, as the magnitude of the probable error would render the determination by the ordinary method quite idle as regards a quantitative result although it would generally be possible to say whether the correlation was large or small. Unfortunately it is not generally possible to classify the data, on which the fourfold table has to be based, in more than one way, or else by a suitable choice of classification it might be possible to avoid such cases.

In conclusion I desire to express my gratitude to Prof. Pearson for many valuable suggestions, especially in connection with the choice of a suitable quadrature formula.

$r = ·80.$

h =	*0*	*·1*	*·2*	*·3*	*·4*	*·5*	*·6*	*·7*	*·8*	*·9*	*1·0*	*1·1*	*1·2*
k = *0·0*	·3976	·3766	·3538	·3294	·3039	·2778	·2515	·2254	·2001	·1759	·1531	·1320	·1127
0·1	·3766	·3583	·3380	·3162	·2930	·2689	·2445	·2200	·1960	·1728	·1509	·1304	·1116
0·2	·3538	·3380	·3204	·3011	·2804	·2586	·2361	·2134	·1909	·1690	·1481	·1284	·1102
0·3	·3294	·3162	·3011	·2843	·2661	·2466	·2263	·2056	·1848	·1643	·1446	·1258	·1083
0·4	·3039	·2930	·2804	·2661	·2503	·2332	·2152	·1965	·1775	·1587	·1402	·1226	·1060
0·5	·2778	·2689	·2586	·2466	·2332	·2186	·2028	·1862	·1692	·1520	·1351	·1187	·1031
0·6	·2515	·2445	·2361	·2263	·2152	·2028	·1893	·1748	·1598	·1444	·1291	·1140	·0995
0·7	·2254	·2200	·2134	·2056	·1965	·1862	·1748	·1625	·1494	·1359	·1222	·1086	·0954
0·8	·2001	·1960	·1909	·1848	·1775	·1692	·1598	·1494	·1383	·1266	·1146	·1025	·0906
0·9	·1759	·1728	·1690	·1643	·1587	·1520	·1444	·1359	·1266	·1167	·1064	·0958	·0852
1·0	·1531	·1509	·1481	·1446	·1402	·1351	·1291	·1222	·1146	·1064	·0976	·0886	·0794
1·1	·1320	·1304	·1284	·1258	·1226	·1187	·1140	·1086	·1025	·0958	·0886	·0809	·0731
1·2	·1127	·1116	·1102	·1083	·1060	·1031	·0995	·0954	·0906	·0852	·0794	·0731	·0665
1·3	·0953	·0946	·0936	·0923	·0906	·0885	·0859	·0828	·0791	·0749	·0702	·0652	·0597
1·4	·0798	·0793	·0787	·0778	·0766	·0751	·0733	·0710	·0682	·0650	·0614	·0574	·0530
1·5	·0662	·0659	·0655	·0649	·0641	·0631	·0618	·0601	·0581	·0557	·0529	·0498	·0464
1·6	·0545	·0543	·0540	·0536	·0531	·0524	·0515	·0503	·0489	·0471	·0451	·0427	·0401
1·7	·0444	·0443	·0441	·0438	·0435	·0430	·0424	·0416	·0406	·0394	·0379	·0362	·0342
1·8	·0358	·0357	·0357	·0355	·0353	·0350	·0346	·0341	·0334	·0325	·0315	·0302	·0287
1·9	·0287	·0286	·0286	·0285	·0283	·0281	·0279	·0275	·0271	·0265	·0258	·0249	·0238
2·0	·0227	·0227	·0227	·0226	·0225	·0224	·0223	·0220	·0217	·0213	·0209	·0202	·0195
2·1	·0178	·0178	·0178	·0178	·0177	·0177	·0176	·0174	·0172	·0170	·0167	·0163	·0158
2·2	·0139	·0139	·0139	·0139	·0138	·0138	·0137	·0137	·0135	·0134	·0132	·0129	·0126
2·3	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0106	·0106	·0105	·0104	·0103	·0101	·0099
2·4	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0081	·0081	·0080	·0079	·0078	·0077
2·5	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0061	·0061	·0061	·0060	·0059
2·6	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0046	·0046	·0046	·0046	·0046	·0045	·0045

$r = ·85.$

h =	*0*	*·1*	*·2*	*·3*	*·4*	*·5*	*·6*	*·7*	*·8*	*·9*	*1·0*	*1·1*	*1·2*
k = *0·0*	·4117	·3905	·3670	·3417	·3149	·2873	·2595	·2319	·2052	·1798	·1560	·1341	·1141
0·1	·3905	·3723	·3518	·3292	·3050	·2796	·2537	·2277	·2022	·1777	·1546	·1332	·1136
0·2	·3670	·3518	·3342	·3145	·2930	·2702	·2464	·2222	·1983	·1749	·1527	·1319	·1127
0·3	·3417	·3292	·3145	·2978	·2791	·2588	·2374	·2154	·1931	·1712	·1501	·1301	·1116
0·4	·3149	·3050	·2930	·2791	·2632	·2457	·2268	·2070	·1867	·1665	·1467	·1277	·1099
0·5	·2873	·2796	·2702	·2588	·2457	·2309	·2146	·1972	·1790	·1606	·1423	·1246	·1078
0·6	·2595	·2537	·2464	·2374	·2268	·2146	·2008	·1859	·1700	·1535	·1370	·1206	·1049
0·7	·2319	·2277	·2222	·2154	·2070	·1972	·1859	·1733	·1597	·1453	·1306	·1158	·1014
0·8	·2052	·2022	·1983	·1931	·1867	·1790	·1700	·1597	·1483	·1360	·1232	·1101	·0971
0·9	·1798	·1777	·1749	·1712	·1665	·1606	·1535	·1453	·1360	·1258	·1149	·1035	·0920
1·0	·1560	·1546	·1527	·1501	·1467	·1423	·1370	·1306	·1232	·1149	·1058	·0962	·0862
1·1	·1341	·1332	·1319	·1301	·1277	·1246	·1206	·1158	·1101	·1035	·0962	·0882	·0798
1·2	·1141	·1136	·1127	·1116	·1099	·1078	·1049	·1014	·0971	·0920	·0862	·0798	·0729
1·3	·0963	·0959	·0954	·0947	·0936	·0921	·0901	·0876	·0845	·0807	·0763	·0712	·0656
1·4	·0805	·0803	·0800	·0795	·0788	·0778	·0765	·0748	·0725	·0698	·0665	·0626	·0583
1·5	·0666	·0665	·0664	·0661	·0656	·0650	·0642	·0630	·0615	·0595	·0571	·0543	·0510
1·6	·0547	·0547	·0546	·0544	·0541	·0538	·0532	·0525	·0514	·0501	·0484	·0464	·0439
1·7	·0445	·0445	·0444	·0443	·0442	·0440	·0436	·0432	·0425	·0416	·0405	·0390	·0373
1·8	·0359	·0359	·0359	·0358	·0357	·0356	·0354	·0351	·0347	·0341	·0334	·0324	·0312
1·9	·0287	·0287	·0287	·0287	·0286	·0285	·0284	·0283	·0280	·0276	·0272	·0265	·0257
2·0	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0226	·0225	·0224	·0221	·0218	·0214	·0209
2·1	·0179	·0179	·0179	·0178	·0178	·0178	·0178	·0177	·0176	·0175	·0173	·0171	·0167
2·2	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0138	·0138	·0167	·0136	·0135	·0133
2·3	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0106	·0106	·0105	·0104
2·4	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0081	·0081	·0081	·0080
2·5	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0061	·0061
2·6	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0046	·0046	·0046	·0046

Correlations from Tetrachoric Groupings.

$r = \cdot 80$.

$h=$	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0	2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6
$k=$0·0	·0953	·0798	·0662	·0545	·0444	·0358	·0287	·0227	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·1	·0946	·0793	·0659	·0543	·0443	·0357	·0286	·0227	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·2	·0936	·0787	·0655	·0540	·0441	·0357	·0286	·0227	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·3	·0923	·0778	·0649	·0536	·0438	·0355	·0285	·0226	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·4	·0906	·0766	·0641	·0531	·0435	·0353	·0283	·0225	·0177	·0138	·0107	·0082	·0062	·0047
0·5	·0885	·0751	·0631	·0524	·0430	·0350	·0281	·0224	·0177	·0138	·0107	·0082	·0062	·0047
0·6	·0859	·0733	·0618	·0515	·0424	·0346	·0279	·0223	·0176	·0137	·0106	·0082	·0062	·0046
0·7	·0828	·0710	·0601	·0503	·0416	·0341	·0275	·0220	·0174	·0137	·0106	·0081	·0062	·0046
0·8	·0791	·0682	·0581	·0489	·0406	·0334	·0271	·0217	·0172	·0135	·0105	·0081	·0061	·0046
0·9	·0749	·0650	·0557	·0471	·0394	·0325	·0265	·0213	·0170	·0134	·0104	·0080	·0061	·0046
1·0	·0702	·0614	·0529	·0451	·0379	·0315	·0258	·0209	·0167	·0132	·0103	·0079	·0061	·0046
1·1	·0652	·0574	·0498	·0427	·0362	·0302	·0249	·0202	·0163	·0129	·0101	·0078	·0060	·0045
1·2	·0597	·0530	·0464	·0401	·0342	·0287	·0238	·0195	·0158	·0126	·0099	·0077	·0059	·0045
1·3	·0541	·0484	·0427	·0372	·0319	·0271	·0226	·0186	·0151	·0121	·0096	·0075	·0058	·0044
1·4	·0484	·0436	·0388	·0341	·0295	·0252	·0212	·0176	·0144	·0117	·0093	·0073	·0057	·0043
1·5	·0427	·0388	·0348	·0309	·0270	·0232	·0197	·0165	·0136	·0111	·0089	·0070	·0055	·0042
1·6	·0372	·0341	·0309	·0276	·0243	·0211	·0181	·0153	·0127	·0104	·0084	·0067	·0053	·0041
1·7	·0319	·0295	·0270	·0243	·0216	·0190	·0164	·0140	·0117	·0097	·0079	·0063	·0050	·0039
1·8	·0271	·0252	·0232	·0211	·0190	·0168	·0146	·0126	·0107	·0089	·0073	·0059	·0047	·0037
1·9	·0226	·0212	·0197	·0181	·0164	·0146	·0129	·0112	·0096	·0081	·0067	·0055	·0044	·0035
2·0	·0186	·0176	·0165	·0153	·0140	·0126	·0112	·0098	·0085	·0072	·0060	·0050	·0040	·0032
2·1	·0151	·0144	·0136	·0127	·0117	·0107	·0096	·0085	·0074	·0064	·0054	·0045	·0037	·0030
2·2	·0121	·0117	·0111	·0104	·0097	·0089	·0081	·0072	·0064	·0055	·0047	·0040	·0033	·0027
2·3	·0096	·0093	·0089	·0084	·0079	·0073	·0067	·0060	·0054	·0047	·0041	·0035	·0029	·0024
2·4	·0075	·0073	·0070	·0067	·0063	·0059	·0055	·0050	·0045	·0040	·0035	·0030	·0025	·0021
2·5	·0058	·0057	·0055	·0053	·0050	·0047	·0044	·0040	·0037	·0033	·0029	·0025	·0022	·0018
2·6	·0044	·0043	·0042	·0041	·0039	·0037	·0035	·0032	·0030	·0027	·0024	·0021	·0018	·0016

$r = \cdot 85$.

$h=$	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0	2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6
$k=$0·0	·0963	·0805	·0666	·0547	·0445	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·1	·0959	·0803	·0665	·0547	·0445	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·2	·0954	·0800	·0664	·0546	·0444	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·3	·0947	·0795	·0661	·0544	·0443	·0358	·0287	·0227	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·4	·0936	·0788	·0656	·0541	·0442	·0357	·0286	·0227	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·5	·0921	·0778	·0650	·0538	·0440	·0356	·0285	·0227	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·6	·0901	·0765	·0642	·0532	·0436	·0354	·0284	·0226	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·7	·0876	·0748	·0630	·0525	·0432	·0351	·0283	·0225	·0177	·0138	·0107	·0082	·0062	·0047
0·8	·0845	·0725	·0615	·0514	·0425	·0347	·0280	·0224	·0176	·0138	·0107	·0082	·0062	·0047
0·9	·0807	·0698	·0595	·0501	·0416	·0341	·0276	·0221	·0175	·0137	·0106	·0081	·0062	·0046
1·0	·0763	·0665	·0571	·0484	·0405	·0334	·0272	·0218	·0173	·0136	·0106	·0081	·0062	·0046
1·1	·0712	·0626	·0543	·0464	·0390	·0324	·0265	·0214	·0171	·0135	·0105	·0081	·0061	·0046
1·2	·0656	·0583	·0510	·0439	·0373	·0312	·0257	·0209	·0167	·0133	·0104	·0080	·0061	·0046
1·3	·0597	·0535	·0473	·0411	·0352	·0297	·0247	·0202	·0163	·0130	·0102	·0079	·0060	·0046
1·4	·0535	·0485	·0432	·0380	·0329	·0280	·0234	·0194	·0157	·0126	·0100	·0078	·0060	·0045
1·5	·0473	·0432	·0390	·0346	·0302	·0260	·0220	·0183	·0150	·0121	·0097	·0076	·0058	·0045
1·6	·0411	·0380	·0346	·0311	·0274	·0239	·0204	·0172	·0142	·0116	·0093	·0073	·0057	·0044
1·7	·0352	·0329	·0302	·0274	·0245	·0216	·0186	·0159	·0133	·0109	·0088	·0070	·0055	·0043
1·8	·0297	·0280	·0260	·0239	·0216	·0192	·0168	·0144	·0122	·0102	·0083	·0067	·0053	·0041
1·9	·0247	·0234	·0220	·0204	·0186	·0168	·0149	·0129	·0111	·0093	·0077	·0063	·0050	·0039
2·0	·0202	·0194	·0183	·0172	·0159	·0144	·0129	·0114	·0099	·0084	·0070	·0058	·0047	·0037
2·1	·0163	·0157	·0150	·0142	·0133	·0122	·0111	·0099	·0087	·0075	·0063	·0053	·0043	·0034
2·2	·0130	·0126	·0121	·0116	·0109	·0102	·0093	·0084	·0075	·0065	·0056	·0047	·0039	·0032
2·3	·0102	·0100	·0097	·0093	·0088	·0083	·0077	·0070	·0063	·0056	·0049	·0042	·0035	·0029
2·4	·0079	·0078	·0076	·0073	·0070	·0067	·0063	·0058	·0053	·0047	·0042	·0036	·0031	·0025
2·5	·0060	·0060	·0058	·0057	·0055	·0053	·0050	·0047	·0043	·0039	·0035	·0031	·0026	·0022
2·6	·0046	·0045	·0045	·0044	·0043	·0041	·0039	·0037	·0034	·0032	·0029	·0025	·0022	·0019

Supplementary Tables for determining High

$r = \cdot 90.$

$h=$	0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9	1·0	1·1	1·2
$k=$0·0	·4282	·4067	·3822	·3552	·3266	·2969	·2670	·2377	·2094	·1827	·1579	·1353	·1149
0·1	·4067	·3887	·3678	·3441	·3183	·2910	·2630	·2350	·2077	·1817	·1574	·1350	·1147
0·2	·3822	·3678	·3504	·3302	·3076	·2830	·2573	·2311	·2052	·1801	·1564	·1345	·1144
0·3	·3552	·3441	·3302	·3135	·2943	·2728	·2498	·2258	·2016	·1778	·1550	·1336	·1140
0·4	·3266	·3183	·3076	·2943	·2784	·2602	·2401	·2187	·1966	·1744	·1528	·1322	·1132
0·5	·2969	·2910	·2830	·2728	·2602	·2453	·2284	·2097	·1900	·1698	·1497	·1302	·1119
0·6	·2670	·2630	·2573	·2498	·2401	·2284	·2145	·1988	·1817	·1637	·1454	·1274	·1101
0·7	·2377	·2350	·2311	·2258	·2187	·2097	·1988	·1860	·1717	·1561	·1399	·1236	·1075
0·8	·2094	·2077	·2052	·2016	·1966	·1900	·1817	·1717	·1600	·1470	·1331	·1186	·1041
0·9	·1827	·1817	·1801	·1778	·1744	·1698	·1637	·1561	·1470	·1365	·1249	·1124	·0997
1·0	·1579	·1574	·1564	·1550	·1528	·1497	·1454	·1399	·1331	·1249	·1155	·1052	·0942
1·1	·1353	·1350	·1345	·1336	·1322	·1302	·1274	·1236	·1186	·1124	·1052	·0969	·0878
1·2	·1149	·1147	·1144	·1140	·1132	·1119	·1101	·1075	·1041	·0997	·0942	·0878	·0806
1·3	·0967	·0966	·0965	·0962	·0958	·0950	·0939	·0923	·0900	·0869	·0830	·0783	·0727
1·4	·0807	·0807	·0806	·0805	·0802	·0798	·0792	·0782	·0767	·0747	·0720	·0686	·0645
1·5	·0668	·0668	·0667	·0667	·0665	·0663	·0660	·0654	·0645	·0632	·0614	·0591	·0562
1·6	·0548	·0548	·0548	·0547	·0547	·0546	·0544	·0540	·0535	·0528	·0516	·0501	·0481
1·7	·0446	·0446	·0446	·0445	·0445	·0445	·0444	·0442	·0439	·0435	·0428	·0418	·0405
1·8	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0358	·0357	·0356	·0353	·0350	·0344	·0338
1·9	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0286	·0286	·0284	·0282	·0279	·0274
2·0	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0226	·0225	·0223	·0220
2·1	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0178	·0178	·0178	·0177	·0176	·0175
2·2	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0138	·0138	·0137
2·3	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0106
2·4	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082
2·5	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062
2·6	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047

$r = \cdot 95.$

$h=$	0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9	1·0	1·1	1·2
$k=$0·0	·4495	·4271	·4005	·3705	·3385	·3055	·2729	·2414	·2116	·1840	·1586	·1357	·1151
0·1	·4271	·4099	·3880	·3622	·3333	·3026	·2713	·2407	·2113	·1839	·1586	·1356	·1151
0·2	·4005	·3880	·3712	·3500	·3252	·2976	·2685	·2392	·2106	·1835	·1585	·1356	·1150
0·3	·3705	·3622	·3500	·3338	·3135	·2898	·2637	·2365	·2092	·1829	·1582	·1355	·1150
0·4	·3385	·3333	·3252	·3135	·2980	·2787	·2564	·2320	·2067	·1816	·1576	·1352	·1149
0·5	·3055	·3026	·2976	·2898	·2787	·2640	·2459	·2250	·2024	·1792	·1563	·1346	·1147
0·6	·2729	·2713	·2685	·2637	·2564	·2459	·2321	·2153	·1960	·1753	·1542	·1335	·1141
0·7	·2414	·2407	·2392	·2365	·2320	·2250	·2153	·2025	·1870	·1694	·1506	·1315	·1131
0·8	·2116	·2113	·2106	·2092	·2067	·2024	·1960	·1870	·1753	·1611	·1452	·1283	·1113
0·9	·1840	·1839	·1835	·1829	·1816	·1792	·1753	·1694	·1611	·1505	·1377	·1234	·1084
1·0	·1586	·1586	·1585	·1582	·1576	·1563	·1542	·1506	·1452	·1377	·1281	·1167	·1041
1·1	·1357	·1356	·1356	·1355	·1352	·1346	·1335	·1315	·1283	·1234	·1167	·1082	·0981
1·2	·1151	·1151	·1150	·1150	·1149	·1147	·1141	·1131	·1113	·1084	·1041	·0981	·0906
1·3	·0968	·0968	·0968	·0968	·0967	·0966	·0964	·0959	·0950	·0934	·0908	·0870	·0818
1·4	·0808	·0808	·0808	·0808	·0807	·0807	·0806	·0804	·0800	·0792	·0778	·0755	·0721
1·5	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0667	·0665	·0661	·0654	·0642	·0622
1·6	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0547	·0545	·0542	·0536	·0525
1·7	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0445	·0445	·0445	·0443	·0440	·0435
1·8	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0358	·0357	·0355
1·9	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0286	·0285
2·0	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227	·0227
2·1	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0178
2·2	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139
2·3	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107
2·4	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082
2·5	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062
2·6	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047

Correlations from Tetrachoric Groupings.

$r = \cdot 90.$

h=	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0	2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6
k=0·0	·0967	·0807	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·1	·0966	·0807	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·2	·0965	·0806	·0667	·0548	·0446	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·3	·0962	·0805	·0667	·0547	·0445	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·4	·0958	·0802	·0665	·0547	·0445	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·5	·0950	·0798	·0663	·0546	·0445	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·6	·0939	·0792	·0660	·0544	·0444	·0358	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·7	·0923	·0782	·0654	·0540	·0442	·0357	·0286	·0227	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·8	·0900	·0767	·0645	·0535	·0439	·0356	·0286	·0227	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·9	·0869	·0747	·0632	·0528	·0435	·0353	·0284	·0226	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·0	·0830	·0720	·0614	·0516	·0428	·0350	·0282	·0225	·0177	·0138	·0107	·0082	·0062	·0047
1·1	·0783	·0686	·0591	·0501	·0418	·0344	·0279	·0223	·0176	·0138	·0107	·0082	·0062	·0047
1·2	·0727	·0645	·0562	·0481	·0405	·0338	·0274	·0220	·0175	·0137	·0106	·0082	·0062	·0047
1·3	·0664	·0596	·0526	·0456	·0388	·0325	·0267	·0216	·0173	·0136	·0106	·0081	·0062	·0046
1·4	·0596	·0543	·0485	·0426	·0367	·0310	·0258	·0211	·0169	·0134	·0105	·0081	·0062	·0046
1·5	·0526	·0485	·0439	·0391	·0341	·0292	·0246	·0203	·0164	·0131	·0103	·0080	·0061	·0046
1·6	·0456	·0426	·0391	·0353	·0312	·0271	·0231	·0193	·0158	·0127	·0101	·0079	·0060	·0046
1·7	·0388	·0367	·0341	·0312	·0281	·0247	·0214	·0181	·0150	·0122	·0098	·0077	·0059	·0045
1·8	·0325	·0310	·0292	·0271	·0247	·0221	·0194	·0167	·0140	·0116	·0094	·0074	·0058	·0044
1·9	·0267	·0258	·0246	·0231	·0214	·0194	·0173	·0151	·0129	·0108	·0088	·0071	·0056	·0043
2·0	·0216	·0211	·0203	·0193	·0181	·0167	·0151	·0134	·0116	·0099	·0082	·0067	·0053	·0042
2·1	·0173	·0169	·0164	·0158	·0150	·0140	·0129	·0116	·0102	·0088	·0075	·0062	·0050	·0040
2·2	·0136	·0134	·0131	·0127	·0122	·0116	·0108	·0099	·0088	·0078	·0067	·0056	·0046	·0037
2·3	·0106	·0105	·0103	·0101	·0098	·0094	·0088	·0082	·0075	·0067	·0058	·0050	·0042	·0034
2·4	·0081	·0081	·0080	·0079	·0077	·0074	·0071	·0067	·0062	·0056	·0050	·0044	·0037	·0031
2·5	·0062	·0062	·0061	·0060	·0059	·0058	·0056	·0053	·0050	·0046	·0042	·0037	·0032	·0027
2·6	·0046	·0046	·0046	·0046	·0045	·0044	·0043	·0042	·0040	·0037	·0034	·0031	·0027	·0024

$r = \cdot 95.$

h=	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0	2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6
k=0·0	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·1	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·2	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·3	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·4	·0967	·0807	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·5	·0966	·0807	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·6	·0964	·0806	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·7	·0959	·0804	·0667	·0548	·0445	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·8	·0950	·0800	·0665	·0547	·0445	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·9	·0934	·0792	·0661	·0545	·0445	·0359	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·0	·0908	·0778	·0654	·0542	·0443	·0358	·0287	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·1	·0870	·0755	·0642	·0536	·0440	·0357	·0286	·0227	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·2	·0818	·0721	·0622	·0525	·0435	·0355	·0285	·0227	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·3	·0752	·0676	·0593	·0508	·0426	·0350	·0283	·0226	·0178	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·4	·0676	·0619	·0554	·0483	·0411	·0342	·0279	·0224	·0177	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·5	·0593	·0554	·0505	·0450	·0390	·0330	·0273	·0221	·0176	·0138	·0107	·0082	·0062	·0047
1·6	·0508	·0483	·0450	·0409	·0362	·0312	·0263	·0215	·0173	·0137	·0106	·0082	·0062	·0047
1·7	·0426	·0411	·0390	·0362	·0328	·0289	·0248	·0207	·0169	·0135	·0105	·0081	·0062	·0047
1·8	·0350	·0342	·0330	·0312	·0289	·0261	·0229	·0195	·0162	·0131	·0104	·0080	·0062	·0046
1·9	·0283	·0279	·0273	·0263	·0248	·0229	·0205	·0179	·0152	·0125	·0101	·0079	·0061	·0046
2·0	·0226	·0224	·0221	·0215	·0207	·0195	·0179	·0160	·0139	·0117	·0096	·0077	·0060	·0046
2·1	·0178	·0177	·0176	·0173	·0169	·0162	·0152	·0139	·0124	·0107	·0090	·0073	·0058	·0045
2·2	·0139	·0139	·0138	·0137	·0135	·0131	·0125	·0117	·0107	·0095	·0082	·0068	·0055	·0043
2·3	·0107	·0107	·0107	·0106	·0105	·0104	·0101	·0096	·0090	·0082	·0072	·0062	·0051	·0041
2·4	·0082	·0082	·0082	·0082	·0081	·0080	·0079	·0077	·0073	·0068	·0062	·0054	·0046	·0038
2·5	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0061	·0060	·0058	·0055	·0051	·0046	·0040	·0034
2·6	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0046	·0046	·0046	·0045	·0043	·0041	·0038	·0034	·0030

Supplementary Tables for determining High

$r = 1{\cdot}00$.

h=	*0*	*·1*	*·2*	*·3*	*·4*	*·5*	*·6*	*·7*	*·8*	*·9*	*1·0*	*1·1*	*1·2*
k=*0·0*	·5000	·4602	·4207	·3821	·3446	·3085	·2743	·2420	·2119	·1841	·1587	·1357	·1151
0·1	·4602	·4602	·4207	·3821	·3446	·3085	·2743	·2420	·2119	·1841	·1587	·1357	·1151
0·2	·4207	·4207	·4207	·3821	·3446	·3085	·2743	·2420	·2119	·1841	·1587	·1357	·1151
0·3	·3821	·3821	·3821	·3821	·3446	·3085	·2743	·2420	·2119	·1841	·1587	·1357	·1151
0·4	·3446	·3446	·3446	·3446	·3446	·3085	·2743	·2420	·2119	·1841	·1587	·1357	·1151
0·5	·3085	·3085	·3085	·3085	·3085	·3085	·2743	·2420	·2119	·1841	·1587	·1357	·1151
0·6	·2743	·2743	·2743	·2743	·2743	·2743	·2743	·2420	·2119	·1841	·1587	·1357	·1151
0·7	·2420	·2420	·2420	·2420	·2420	·2420	·2420	·2420	·2119	·1841	·1587	·1357	·1151
0·8	·2119	·2119	·2119	·2119	·2119	·2119	·2119	·2119	·2119	·1841	·1587	·1357	·1151
0·9	·1841	·1841	·1841	·1841	·1841	·1841	·1841	·1841	·1841	·1841	·1587	·1357	·1151
1·0	·1587	·1587	·1587	·1587	·1587	·1587	·1587	·1587	·1587	·1587	·1587	·1357	·1151
1·1	·1357	·1357	·1357	·1357	·1357	·1357	·1357	·1357	·1357	·1357	·1357	·1357	·1151
1·2	·1151	·1151	·1151	·1151	·1151	·1151	·1151	·1151	·1151	·1151	·1151	·1151	·1151
1·3	·0968	·0968	·0968	·0968	·0968	·0968	·0968	·0968	·0968	·0968	·0968	·0968	·0968
1·4	·0808	·0808	·0808	·0808	·0808	·0808	·0808	·0808	·0808	·0808	·0808	·0808	·0808
1·5	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668	·0668
1·6	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548	·0548
1·7	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446
1·8	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359
1·9	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287
2·0	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228
2·1	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179
2·2	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139
2·3	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107
2·4	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082
2·5	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062
2·6	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047

Correlations from Tetrachoric Groupings.

$r = 1{\cdot}00.$

h =	*1·3*	*1·4*	*1·5*	*1·6*	*1·7*	*1·8*	*1·9*	*2·0*	*2·1*	*2·2*	*2·3*	*2·4*	*2·5*	*2·6*
k = *0·0*	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·1	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·2	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·3	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·4	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·5	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·6	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·7	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·8	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
0·9	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·0	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·1	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·2	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·3	·0968	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·4	·0808	·0808	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·5	·0668	·0668	·0668	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·6	·0548	·0548	·0548	·0548	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·7	·0446	·0446	·0446	·0446	·0446	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·8	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0359	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
1·9	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0287	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
2·0	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0228	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
2·1	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0179	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
2·2	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0139	·0107	·0082	·0062	·0047
2·3	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0107	·0082	·0062	·0047
2·4	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0082	·0062	·0047
2·5	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0062	·0047
2·6	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047	·0047