

Espressioni indeterminate.

(Di ETTORE BORTOLOTTI, a Bologna.)

Le espressioni che, seguendo l'uso degli antichi, chiameremo indeterminate, e che risultano dal confronto di due infiniti o di due infinitesimi, si presentano di continuo nella Analisi, poichè si collegano direttamente ai problemi di convergenza; ma, quantunque l'importanza loro sia riconosciuta dai geometri, i mezzi che possediamo pel calcolo di tali espressioni sono assai scarsi, poichè si riducono alla regola detta de l'HÔPITAL (*) ed a quella che, trovata dal CAUCHY, fu poi precisata ed estesa dallo STOLZ (**).

Entrambe queste regole sono manchevoli, poichè fanno dipendere il calcolo del limite del quoziente $\frac{f}{\varphi}$ di due funzioni, le quali sono in uno stesso

(*) La qual regola dovrebbe a miglior ragione essere detta di G. BERNOULLI.

(**) Per le indicazioni storiche e bibliografiche vedasi l'articolo di A. PRINGSHEIM, *Principes de la théorie des fonctions* nel tomo II, Vol. I, pag. 50-58 della *Encyclopédie des Sciences Math.* Si veda anche il *Formulario* di G. PEANO. Editio V, fascicolo I, pag. 285-287.

Aggiungerò qualche cenno su l'opera del LAGRANGE, circa questo argomento, opera che da cotesti autori non fu presa in esame. Il LAGRANGE ne tratta, nella *Théorie des fonctions analytiques* (Paris, Prairial, a. V, pag. 32-41) e più estesamente nelle *Leçons sur le calcul des fonctions* (Paris, a. 1806). In quest'ultima opera egli dà due dimostrazioni della nota regola, pel caso $\frac{0}{0}$ (pag. 76-87), delle quali la seconda è sostanzialmente la medesima che anche oggi si dà nei libri di calcolo (Cf. JORDAN, *Analyse*, Tomo I (1909), pag. 273).

Dalla regola de l'HÔPITAL deduce più innanzi (pag. 315, 316) la dimostrazione della eguaglianza: $y'(x) = \frac{dy}{dx}$; cioè la identità fra il concetto di *funzione prima* (coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$) e quello di *quoziente di due differenziali*.

Notevole in fine è la considerazione di funzioni le quali, quando la variabile descrive un cammino che attraversa certi punti particolari, cambiano di forma nel passaggio per tali punti. Cotesti punti, egli dice, sono caratterizzati dal fatto che in essi la funzione assume forma indeterminata... *ce qu'il me semble qu'on n'avait pas encore remarqué* (pag. 321).

punto infinite od infinitesime, da quello dei quozienti delle derivate o delle differenze finite; mentre è noto che questi ultimi possono mancare, pur esistendo il proposto (*).

A tale difetto è, nella massima parte dei casi, posto riparo con l'uso delle formule seguenti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\varphi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{f_{r+1} - f_r}{\varphi_{r+1} - \varphi_r} \quad (I)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{a-x} \int_x^a \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx, & \text{per } a \text{ finito} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx, & \text{per } a \text{ infinito,} \end{cases} \quad (II)$$

che qui si troveranno dimostrate.

Ricavo la formola (I) come conseguenza di alcuni teoremi che io stesso avevo precedentemente stabiliti per il calcolo delle serie (**).

Il passaggio dalla formola (I) alle (II) non è facile nè immediato.

Il LAGRANGE nelle sue opere ha varie volte notato le difficoltà che si riscontrano nel tradurre in calcolo differenziale le formule trovate per mezzo di considerazioni di differenze finite: « *La raison en est que, dans le passage « supposé du fini à l'infiniment petit, les fonctions changent réellement de nature, et que le $\frac{dy}{dx}$ qu'on employe dans le calcul différentiel, est essentielle-
« ment une fonction différente de la fonction y , tandis que, tant que la différence dx a une valeur quelconque, aussi petite qu'on voudra, cette quantité
« n'est que la différence de deux fonctions de la même forme...* » (**).

Per vincere tale difficoltà ho dovuto premettere alcuni lemmi relativi alla *rappresentazione asintotica di serie mediante integrali definiti*, dai quali lemmi derivano altrettanti *criteri per la integrabilità impropria*, quanti già furono da me stabiliti per la convergenza delle serie (****).

Questi criteri valgono non solo per l'*integrale di Riemann*; ma anche

(*) Si veda, p. es., l'articolo del PRINGSHEIM, citato alla nota (**) della pagina precedente.

(**) Cf. *Convergenza di algoritmi infiniti*. Mem. Acc. Modena, Serie III, Vol. VII, a. 1907.

(***) Loc. cit., pag. 304. V. anche alla pag. 312, ed in parecchi altri passi della medesima opera.

(****) *Convergenza di algoritmi finiti* al loc. cit.

per l'*integrale definito superiore* (*) ed, in particolare, servono al calcolo della *estensione esteriore* degli insiemi e della *frequenza* (**). Allo studio della frequenza dedico appunto il § III di questo scritto, e ciò perchè, dalla determinazione della frequenza dei punti dove il quoziente delle derivate (o quello delle differenze finite) può assumere valori arbitrari senza che quello delle funzioni cessi dall'aver limite determinato e finito, ricaverò una condizione necessaria e sufficiente perchè abbia limite il quoziente di due funzioni che in uno stesso punto sono infinite od infinitesime.

I.

1 (***) **TEOREMA 1.^o** *Date due variabili u_n, b_n , delle quali la prima è finita per ogni valore finito di n , la seconda è reale positiva monotona: se la media aritmetica dei rapporti di quelle variabili ha limite determinato e finito (o nullo)*

$$\lambda = \lim \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right),$$

A) *Se la serie $\sum b_n$ diverge ed esistono due numeri N, L , tali che*

$$n \geq N, \quad \frac{n b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} < L, \quad (1)$$

(*) Nel senso del DARBOUX e del VOLTERRA: Cf., p. es., DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale*. Vol. II, 1.^a Parte (Pisa 1909), pag. 17. V. anche G. PEANO, *Formulario*. Editio 5^a, pag. 343.

(**) Sul concetto di frequenza v. la mia nota: *Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza* (Rend. Acc. Lincei, Vol. XII, 1906).

(***) Il teorema I, A) fu dato dal CESARO (Analisi Algebrica, pag. 103), pel caso che la serie $\sum b_n$ sia divergente e la variabile b_n vada allo zero sempre decrescendo; si trova nella forma attuale, insieme col teorema I, B) nella Mem. *Convergenza di algoritmi infiniti*, da me pubblicata nelle Mem. Acc. di Modena, Serie III, Vol. VII, a. 1907. Quivi per altro è supposto che le variabili $\frac{n b_n}{b_1 + \dots + b_n}, \left| 1 - \frac{n b_n}{b_1 + \dots + b_n} \right|$ abbiano, per $n = \infty$, minimo limite diverso dallo zero; la qual condizione ho riconosciuto essere superflua. Tralascio qui le dimostrazioni, le quali sono indicate nella citata Memoria, e sono nuovamente esposte, da un punto di vista più generale, nella Memoria: E. BORTOLOTTI, *Sugli integrali definiti impropri* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXXV, (1913)], Cap. V.

si ha ancora :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right). \quad (2)$$

B) Se la serie Σb_n converge ed esistono due numeri L_1, N_1 , tali che

$$n \geq N_1, \quad \frac{n b_{n+1}}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} < L_1, \quad (3)$$

converge anche la serie Σu_n , e si ha :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right). \quad (4)$$

TEOREMA 2.^o Se alle ipotesi del Teorema 1.^o A) si aggiungono le altre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n b_{n+1} - (b_1 + \dots + b_n) \right\} = C \text{ (finito o nullo)}$$

$$\max. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \frac{u_1}{b_1} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right| = M \text{ (finito o nullo)},$$

la relazione (2) ha luogo purchè esista uno dei due membri.

O, più generalmente: Se alle ipotesi del Teorema 1.^o A) aggiungiamo l'altra

$$\max. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \frac{u_1}{b_1} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right| = A \text{ (finito o nullo)}$$

ed è soddisfatta la relazione :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n b_{n+1}}{b_1 + \dots + b_n} = 1,$$

la corrispondente relazione (2) del teorema 1.^o A) è soddisfatta, purchè esista uno qualsiasi dei due membri.

2. Qualunque variabile U_n della quale si voglia determinare il comportamento assintotico per $n = \infty$, può essere considerata come somma dei primi n valori della sua differenza finita,

$$U_n = U_1 + (U_2 - U_1) + \dots + (U_n - U_{n-1})$$

e, quando sia infinitesima per $n = \infty$, può anche rappresentarsi come espressione del resto della serie $\Sigma (U_n - U_{n-1})$, scrivendo

$$U_n = (U_n - U_{n+1}) + (U_{n+1} - U_{n+2}) + \dots,$$

onde, dai teoremi precedenti, si ricava :

TEOREMA 3.^o Date due variabili U_n, B_n , delle quali la prima è determinata e finita insieme con la sua differenza $u_n = \Delta U_n = U_n - U_{n-1}$ per ogni valore finito di n ; la seconda è infinita (infinitesima) per $n = \infty$ ed ha differenza finita $b_n = \Delta B_n$ monotona; se esistono due numeri positivi N, L , tali che

$$n \geq N, \quad \left| \frac{n \Delta B_{n+1}}{B_n} \right| < L;$$

si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_n}{B_n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{\Delta U_r}{\Delta B_r} \quad (5)$$

purchè esista il secondo membro e, nel caso di B_n infinitesima, sia infinitesima anche U_n .

OSSERVAZIONE. Quando non esistano i limiti delle espressioni al secondo membro nelle formole (2), (4), ci si giova di relazioni relative ai *max. lim.* dei due membri le quali sussistono in ogni caso; più precisamente si ha:

Nelle ipotesi del Teorema 1.^o esistono due numeri positivi ν, μ_1 tali che, nei casi ivi considerati, si ha rispettivamente:

$$\max. \lim_{n=\infty} \left| \frac{u_1 + \dots + u_n}{b_1 + \dots + b_n} \right| < \nu \max. \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{u_1}{b_1} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right| \quad (2')$$

$$\max. \lim_{n=\infty} \left| \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} \right| < \mu_1 \max. \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{u_1}{b_1} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right|. \quad (4')$$

TEOREMA 4.^o Se le variabili b_n, c_n sono reali e positive, se la variabile a_n è per ogni valore di n determinata e finita, e se sono soddisfatte le condizioni:

1.^o la b_n è monotona,

2.^o le serie $\sum_1^\infty a_n, \sum_1^\infty a_n c_n$ sono entrambi convergenti,

3.^o il quoziente $\left| \frac{a_{n+1} c_{n+1} + a_{n+2} c_{n+2} + \dots}{c_{n+1} + c_{n+2} + \dots} \right|$ ha limite inferiore finito,

4.^o assunto come infinitesimo principale per $n = \infty$ la variabile $\gamma_n = c_{n+1} + c_{n+2} + \dots$; se $\sum b_n c_n$ converge, il suo resto $b_{n+1} c_{n+1} + b_{n+2} c_{n+2} + \dots$ ha ordine finito di infinitesimo (*); se la $\sum b_n c_n$ diverge la somma $b_1 c_1 + \dots + b_n c_n$ ha ordine finito di infinito.

(*) L'ordine di infinito o di infinitesimo di una variabile u_n rispetto ad una seconda v_n , si intende definito del comportamento assintotico del rapporto $\frac{\Delta u_n}{u_n} : \frac{\Delta v_n}{v_n}$. (Cfr. *Sugli integrali definiti impropri*, loc. cit., n.º 30.)

I. Se la serie $\sum b_n c_n$ converge, converge anche la serie $\sum a_n b_n c_n$, e si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} c_{n+2} + \dots}{b_{n+1} c_{n+1} + b_{n+2} c_{n+2} + \dots} = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} c_{n+1} + a_{n+2} c_{n+2} + \dots}{c_{n+1} + c_{n+2} + \dots},$$

purchè esista il secondo membro, (anche se esiste solo il primo membro e se il resto $b_{n+1} c_{n+1} + \dots$, è infinitesimo del 1.º ordine).

II. Se la serie $\sum b_n c_n$ diverge, si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n}{b_1 c_1 + \dots + b_n c_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} c_{n+1} + a_{n+2} c_{n+2} + \dots}{c_{n+1} + c_{n+2} + \dots},$$

purchè esista il secondo membro.

II.

3. LEMMA 1.º Sia $\varphi(x)$ una funzione reale della variabile reale x , che in un determinato intorno $x_0 \text{---}\infty$, dell'infinito, è monotona e derivabile; la sua derivata $\varphi'(x)$ sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito $x_0 \text{---}x$; esistano due numeri positivi x_1, M , tali che

$$x \geq x_1, \quad \left| \frac{x \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < M; \quad (6)$$

voglio provare:

1.º che esistono altri due numeri x_1, M_1 , tali che:

$$\text{per integrali } \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx \text{ divergenti; } x \geq x_1, \quad \left| \frac{x \varphi(x)}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx} \right| < M_1, \quad (7)$$

$$\text{» » » convergenti; } x \geq x_1, \quad \left| \frac{x \varphi(x)}{\int_x^{\infty} \varphi(x) dx} \right| < M_1; \quad (8)$$

2.º che la funzione $\varphi(x)$ soddisfa la condizione:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = 1. \quad (9)$$

Per dimostrare la 1.^a parte considero che, nel caso di integrali diver-

genti, si ricava dalla (6)

$$x \geq x_0, \quad \left| x \varphi(x) - x_0 \varphi(x_0) - \int_{x_0}^x \varphi(x) dx \right| < M \left| \int_{x_0}^x \varphi(x) dx \right|,$$

$$|x \varphi(x)| < (1 + M) \left| \int_{x_0}^x \varphi(x) dx \right| + |x_0 \varphi(x_0)|.$$

Osservando che $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_0 \varphi(x_0)}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx} = 0$, e dividendo per $\int_{x_0}^x \varphi(x) dx$, subito

si ricava la formula (7).

Nel caso di integrali convergenti si ha $\lim_{x \rightarrow \infty} x \varphi(x) = 0$, perciò dalla (6) si ha

$$x \geq x_0, \quad \left| x \varphi(x) + \int_x^{\infty} \varphi(x) dx \right| < M \left| \int_x^{\infty} \varphi(x) dx \right|,$$

d'onde la (8).

Per dimostrare la (9), poniamo per abbreviare scrittura $\lambda(x) = \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$, ed avremo:

$$\lambda(x) - 1 = \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x+\theta} \left| \frac{(x+\theta) \varphi'(x+\theta)}{\varphi(x+\theta)} \frac{\varphi(x+\theta)}{\varphi(x)} \right|.$$

Se ora supponiamo $\varphi(x)$ non decrescente, abbiamo $\lambda(x) \geq \frac{\varphi(x+\theta)}{\varphi(x)} \geq 1$; perciò ricordando la (6):

$$x \geq x_1, \quad 0 \leq \lambda(x) - 1 \leq \frac{1}{x+\theta} M \lambda(x), \quad \text{cioè:} \quad 1 \leq \lambda(x) < \frac{1}{1 - \frac{M}{x+\theta}},$$

la quale appunto dimostra la formula (9).

Similmente si procede nella supposizione di $\varphi(x)$ non crescente.

LEMMA 2.^o Sia $\varphi(x)$ una funzione reale della variabile reale x , che in un determinato intorno $x_0 \nearrow a$ a sinistra del punto a , è monotona e derivabile, la sua derivata $\varphi'(x)$ sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo $x_0 \nearrow x$, ($x < a$); esistano due numeri positivi ε , M , tali che

$$a - x < \varepsilon, \quad (a - x) \left| \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < M; \quad (10)$$

voglio provare:

1.° Che esistono altri due numeri σ , μ , tali che:

$$\left. \begin{aligned} \text{se } a \text{ è un punto di infinito per la } \Phi(x) &= \int_{x_0}^x \varphi(x) dx, \\ \text{per } (a-x) < \sigma, \quad (a-x) \left| \frac{\varphi(x)}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx} \right| &< \mu, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{se, nel punto } a, \text{ ha valor finito la } \Phi(x) &= \int_{x_0}^x \varphi(x) dx, \\ \text{per } (a-x) < \sigma, \quad (a-x) \left| \frac{\varphi(x)}{\int_x^a \varphi(x) dx} \right| &< \mu; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2.° Che la funzione $\varphi(x)$ soddisfa la relazione:

$$a > x \geq x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi\left(a - \frac{a-x}{n+1}\right)}{\varphi\left(a - \frac{a-x}{n}\right)} = 1. \quad (13)$$

La dimostrazione delle formole (11), (12) è interamente analoga a quella fatta al lemma precedente per le (7), (8); per provare la (13), poniamo

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)}, \quad x_n = a - \frac{a-x_1}{n}, \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n = \frac{a-x_1}{n(n+1)}; \\ a > x_1 &\geq x_0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

e, per fissare le idee, supponiamo $\varphi(x)$ non decrescente, avremo:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda_n - 1 &= \frac{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}{\varphi(x_n)} = \Delta x_n \frac{\varphi'(x_n + \theta \Delta)}{\varphi(x_n + \theta \Delta)} \cdot \frac{\varphi(x_n + \theta \Delta)}{\varphi(x_n)} \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{a-x_1}{n} \cdot \frac{\varphi'(x_n + \theta \Delta)}{\varphi(x_n + \theta \Delta)} \cdot \frac{\varphi(x_n + \theta \Delta)}{\varphi(x_n)} \right\}. \end{aligned}$$

Ora si ha:

$$\frac{a-x_1}{n} = a - x_n = \left\{ a - (x_n + \theta \Delta) \right\} \frac{a-x_n}{a - (x_n + \theta \Delta)} < \left(a - (x_n + \theta \Delta) \right) \frac{a-x_n}{a-x_{n+1}}$$

cioè:

$$\frac{a-x_1}{n} < \left(a - (x_n + \theta \Delta) \right) \frac{n+1}{n} \leq 2 \left(a - (x_n + \theta \Delta) \right).$$

Vediamo dunque che

$$a - x_n < \varepsilon; \quad 0 \leq \lambda_n - 1 < \frac{2}{n+1} M \lambda_n, \quad \text{cioè} \quad 1 \leq \lambda_n < \frac{1}{1 - \frac{2M}{n+1}},$$

dalla quale appunto si ricava la formola (13).

4. OSSERVAZIONE. Se l'ordine di infinito o di infinitesimo di una funzione $\varphi(x)$, per $x = \infty$, rispetto alla x considerata come infinito del primo ordine si definisce per mezzo del limite della espressione $\frac{x \varphi'(x)}{\varphi(x)}$, e si deduce (quando non esista limite) dal comportamento assintotico di tale espressione (*), e se l'ordine di infinito o di infinitesimo, per $x = a$ (a distanza finita) si definisce mediante il quoziente $\frac{(a-x) \varphi'(x)}{\varphi(x)}$; si possono brevemente riunire i due lemmi dimostrati nell'enunciato:

Se una funzione monotona $\varphi(x)$ ha ordine finito o nullo di infinito (o di infinitesimo), anche il suo integrale ha ordine finito o nullo di infinito (o di infinitesimo) ed essa soddisfa la relazione $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = 1$.

5. Si costruisca, con legge arbitraria, una successione x_n sempre crescente, la quale, nel caso in cui si tratti di applicare il lemma 1.º tenda all'infinito, e, nel caso del lemma 2.º tenda al numero finito e determinato a .

Supponiamo poi che:

$$\left. \begin{aligned} \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \text{sia } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x_{n+1} - x_n)}{x_n} = 1 \\ \gg \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \text{sia } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x_{n+1} - x_n)}{a - x_n} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

onde per i lemma 1.º, 2.º, verrà:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1. \quad (16)$$

Per una funzione $\varphi(x)$ le condizioni (6), (10) dei lemma ricordati, si scri-

(*) Nella nota: *Sul calcolo degli infiniti*, [R. Acc. Lincei, vol. XVII, (1908) pag. 245] ho mostrato come questo modo di definire l'ordine di infinito non si discosti sostanzialmente da quello proposto dal CAUCHY e comunemente seguito, e presenti vantaggio nella pratica del calcolo degli infiniti. Ulteriori sviluppi si trovano nel Cap. III della Memoria citata, *Sugli integrali definiti impropri*.

veranno :

$$n \geq N; \quad x_n \left| \frac{\varphi'(x_n)}{\varphi(x_n)} \right| < M, \quad (a - x_n) \left| \frac{\varphi'(x_n)}{\varphi(x_n)} \right| < M,$$

le quali, sia per $\lim x_n = \infty$, sia per $\lim x_n = a$, sono riassunte nell'unica formula :

$$n \geq N; \quad n \Delta x_n \left| \frac{\varphi'(x_n)}{\varphi(x_n)} \right| < M: \quad (17)$$

mentre poi, dai ricordati lemma, ricaveremo :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1, \quad (18)$$

inoltre, per integrali divergenti,

$$n \geq N_1; \quad \left| \frac{n \Delta x_n \varphi(x_n)}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx} \right| < \mu, \quad (19)$$

e, per integrali convergenti,

$$n \geq N_1, \quad \left| \frac{n \Delta x_n \varphi(x_n)}{\int_{x_n}^{x_\infty} \varphi(x) dx} \right| < \mu_1 \quad (20)$$

con $x_\infty = \lim x_n$.

6. Poniamo :

$$b_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi(x) dx = \Delta x_n \varphi(x_n + \theta \Delta x_n) \quad (21)$$

onde :

$$b_1 + \dots + b_n = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx; \quad b_{n+1} + b_{n+2} + \dots = \int_{x_n}^{x_\infty} \varphi(x) dx,$$

e, dalle formule (18), (19), (20), dedurremo la esistenza di due numeri N_2 , μ_2 , tali che

$$\text{per serie } \Sigma b_n \text{ divergenti} \quad \text{e per } n \geq N_2, \quad \left| \frac{n b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \right| < \mu_2, \quad (22)$$

$$\text{» » » convergenti} \quad \text{» » } , \quad \left| \frac{n b_{n+1}}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} \right| < \mu_2. \quad (23)$$

Quando si voglia definire l'ordine di infinito al modo ricordato avremo :

LEMMA 3.^o Nelle condizioni supposte negli enunciati dei lemmi 1.^o, 2.^o, per

la $\varphi(x)$, (se b_n cioè ha ordine finito di infinito o di infinitesimo) anche la variabile $B_n = b_1 + \dots + b_n$ ha ordine finito (o nullo) di infinito, o la $\beta_n = b_{n+1} + b_{n+1} + \dots$ ha ordine finito (o nullo) di infinitesimo.

7. Si vuole ora che la variabile b_n definita dalle formole (21) sia monotona.

Nel caso di $x_\infty = \infty$, basta prendere

$$x_n = x_0 + nk \quad (k \text{ costante}) \quad (24)$$

per assicurarsi che la b_n è, nello stesso tono delle $\varphi(x)$, non crescente o non decrescente.

Altrimenti avviene per $x_\infty = a$.

In questa supposizione, prendendo la successione x_n determinata dalle formole (14), abbiamo:

$$b_{n+1} = \int_{a - \frac{a-x_0}{n}}^{a - \frac{a-x_0}{n+1}} \varphi(x) dx.$$

Poniamo $a - x = \frac{1}{z}$, $dz = \frac{dx}{z^2}$, ed abbiamo

$$b_{n+1} = \int_{\frac{n}{a-x_0}}^{\frac{n+1}{a-x_0}} \varphi\left(a + \frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z^2},$$

poichè gli intervalli di integrazione, al variare di n , non variano di ampiezza, per assicurare la monotonia di b_n basta la ipotesi che sia monotona la funzione sotto il segno. Da ciò:

Condizione sufficiente perchè la variabile

$$b_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi(x) dx, \quad x_n = a - \frac{a-x_0}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

sia monotona è che sia monotona, per x alla sinistra di a , la funzione

$$(a-x)^2 \varphi(x). \quad (25)$$

8. Sia data una funzione $f(x)$ della variabile reale x , determinata finita e positiva (o nulla) per tutti i valori di x di un determinato intorno x_0 di A , escluso il punto A medesimo. Questo punto potrà essere supposto a distanza

finita o nel punto dell'infinito. Sia $\varphi(x)$ una funzione reale, monotona, derivabile nei punti del medesimo intorno, che supporremo sempre positiva, la quale per $x=A$ abbia ordine finito (o nullo) di infinito o di infinitesimo: nel senso, più volte chiarito, che sia soddisfatta per essa l'una o l'altra delle:

$$x \geq x_0, \quad \left| \frac{x \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < \mu; \quad a - x < \varepsilon, \quad (a - x) \left| \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < \nu.$$

Determiniamo una successione x_n la quale tenda ad A sempre crescendo e soddisfi le relazioni (15).

Usando il simbolo \int per indicare l'integrale superiore, poniamo:

$$u_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx, \quad b_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi(x) dx = \varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n) \cdot \Delta x_n; \quad (26)$$

ed avremo:

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx &= \frac{1}{\varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n)} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = \frac{u_{n+1}}{\varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n)} = \\ &= \frac{\varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n)}{\varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n)} \Delta x_n \frac{u_{n+1}}{b_{n+1}}, \end{aligned}$$

la quale, brevemente, scriveremo:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \Delta x_n \cdot k_n \cdot a_n; \quad \text{con} \quad \frac{\varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n)}{\varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n)} = k_n, \quad \frac{u_{n+1}}{b_{n+1}} = a_n. \quad (27)$$

9. Nel caso di $A = x_\infty = \infty$, fatto per maggior semplicità

$$x_n = x_0 + n, \quad \Delta x_n = 1, \quad (28)$$

avremo:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = k_n a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_n} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 k_1 + \dots + a_n k_n}{n}. \quad (29)$$

Nel caso di $A = x_\infty = a$ (a distanza finita), supponendo la funzione $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ integrabile superiormente nel tratto $x_0 \dots a$, posto, come nelle (14),

$$x_n = a - \frac{a - x_0}{n}, \quad \Delta x_n = \frac{a - x_0}{n(n+1)},$$

avremo:

$$\frac{\int_{x_n}^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx}{\Delta x_n + \Delta x_{n+1} + \dots} = \frac{\alpha_{n+1} k_{n+1} \Delta x_{n+1} + \alpha_{n+2} k_{n+2} \Delta x_{n+2} + \dots}{\Delta x_{n+1} + \Delta x_{n+2} + \dots},$$

ed avendosi $\Delta x_n + \Delta x_{n+1} + \dots = a - x_n$, sarà ancora:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{a - x_n} \int_{x_n}^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_{n+1} k_{n+1} \Delta x_{n+1} + \alpha_{n+2} k_{n+2} \Delta x_{n+2} + \dots}{\Delta x_{n+1} + \Delta x_{n+2} + \dots}, \quad (30)$$

purchè esista uno di questi limiti.

10. Si consideri ora che, per i lemma 1, 2, e per le ipotesi supposte per le $\varphi(x)$, si ha $\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1$; e che, per funzioni φ non decrescenti si ha $\frac{\varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})} \leq k_n \leq \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)}$, e, per funzioni non crescenti si ha

$$\frac{\varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})} \geq k_n \geq \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)},$$

onde in ogni caso si concluderà essere

$$\lim_{n=\infty} k_n = 1. \quad (31)$$

La somma $A_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, di quantità tutte positive, convergerà per $n = \infty$ verso un limite finito od infinito.

Se il limite di A_n è finito, tale sarà, per la (31) anche quello di

$$\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n,$$

onde, in tale ipotesi, sarà

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} = 0. \quad (32)$$

Se il limite di A_n è infinito avremo, per un noto teorema,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = \lim_{n=\infty} k_n = 1 \quad (33)$$

dunque, anche in questo caso:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}. \quad (34)$$

Si consideri poi che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_{n+1} k_{n+1} \Delta x_{n+1} + \alpha_{n+2} k_{n+2} \Delta x_{n+2} + \dots}{\alpha_{n+1} \Delta x_{n+1} + \alpha_{n+2} \Delta x_{n+2} + \dots} = \lim_{n=\infty} k_n = 1.$$

Potremo dunque scrivere le (29), (30), al seguente modo:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n=\infty} \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_n} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx &= \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right) \\ \lim_{n=\infty} \frac{1}{a - x_n} \int_{x_n}^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx &= \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_{n+1} \Delta x_{n+1} + \alpha_{n+2} \Delta x_{n+2} + \dots}{\Delta x_{n+1} + \Delta x_{n+2} + \dots} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Determinata la successione x_n secondo le formole (28) e preso $b_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi(x) dx$, avremo, per $x_\infty = \infty$, una successione b_n monotona, la quale soddisfa tutte le condizioni richieste per le applicazioni del Teorema 1.^o

Tenuto calcolo che

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx, \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx,$$

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \int_{x_n}^{x_\infty} f(x) dx, \quad b_{n+1} + b_{n+2} + \dots = \int_{x_n}^{x_\infty} \varphi(x) dx,$$

avremo dunque per $x_\infty = \infty$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right) \left\{ \begin{aligned} &= \lim_{n=\infty} \frac{\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx}, \text{ per integrali divergenti} \\ &= \lim_{n=\infty} \frac{\int_{x_n}^{x_\infty} f(x) dx}{\int_{x_n}^{x_\infty} \varphi(x) dx}, \text{ per integrali convergenti} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

purchè esista il 1.^o membro.

Nel caso di $x_\infty = a$, considerando che la $\varphi_n = \varphi(x_n + \theta \Delta x_n)$ definita dalla formula (21) è funzione monotona di n e tenendo conto delle (22), (23), vediamo che sono soddisfatte tutte le condizioni richieste dall'enunciato del Teorema 4.^o, quindi avremo:

per integrali divergenti:

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} \Delta x_{n+1} + \dots}{\Delta x_{n+1} + \dots} &= \lim_{n=\infty} \frac{a_1 \varphi_1 \Delta x_1 + \dots + a_n \varphi_n \Delta x_n}{\varphi_1 \Delta x_1 + \dots + \varphi_n \Delta x_n} = \\ &= \lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{b_1 + \dots + b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx}, \end{aligned}$$

è, per integrali convergenti:

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} \Delta x_{n+1} + \dots}{\Delta x_{n+1} + \dots} &= \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} \varphi_{n+1} \Delta x_{n+1} + \dots}{\varphi_{n+1} \Delta x_{n+1} + \dots} = \\ &= \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} b_{n+1} + \dots}{b_{n+1} + \dots} = \lim_{n=\infty} \frac{\int_{x_n}^{x_\infty} f(x) dx}{\int_{x_n}^{x_\infty} \varphi(x) dx}, \end{aligned}$$

purchè esistano i primi membri.

Queste formole, le (35) e le (36) permettono di applicare ad integrali definiti le proprietà asintotiche delle serie espresse dai teoremi 1-4; infatti: per $x_\infty = \infty$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_n} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \left\{ \begin{array}{l} = \lim_{n=\infty} \frac{\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx}, \text{ per integrali divergenti;} \\ \\ = \lim_{n=\infty} \frac{\int_{x_n}^{\infty} f(x) dx}{\int_{x_n}^{\infty} \varphi(x) dx}, \text{ per integrali convergenti;} \end{array} \right. \quad (37)$$

e, per $x_\infty = a$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{a - x_n} \int_{x_n}^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \left\{ \begin{array}{l} = \lim_{n=\infty} \frac{\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx}, \text{ per integrali divergenti;} \\ \\ = \lim_{n=\infty} \frac{\int_{x_n}^a f(x) dx}{\int_{x_n}^a \varphi(x) dx}, \text{ per integrali convergenti.} \end{array} \right.$$

Ora si consideri che, per essere la funzione sotto il segno positiva,

si ha :

$$x_n \leq x < x_{n+1},$$

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_0} \int_{x_0}^{x_n} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \leq \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_{n+1}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx;$$

ed è $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_0}{x_n - x_0} = 1$, dunque si ha ancora :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_n} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx.$$

Similmente si provano le eguaglianze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a - x_n} \int_{x_n}^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{a - x} \int_x^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x f(x) dx}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx},$$

e le altre analoghe, nelle quali si sostituisce la variabile continua x alla variabile discreta n .

Tutte queste eguaglianze valgono purchè esista uno dei due membri.

Rimangono così provati i seguenti teoremi :

TEOREMA 5.^o *Se $f(x)$, $\varphi(x)$ sono funzioni determinate positive della variabile reale x in ogni punto a distanza finita del raggio x_0 , se la $\varphi(x)$ è monotona derivabile e, relativamente ad essa esistono due numeri x_1 , μ , tali che*

$$x \geq x_1, \quad \left| \frac{x \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < \mu,$$

secondo che l'integrale $\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx$ è divergente o convergente ha luogo l'una o l'altra delle relazioni :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \left\{ \begin{array}{l} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x f(x) dx}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{\infty} f(x) dx}{\int_x^{\infty} \varphi(x) dx} \end{array} \right. \quad (38)$$

purchè esista il 1.^o membro determinato e finito (o nullo).

TEOREMA 6.^o Se $f(x)$, $\varphi(x)$ sono funzioni della variabile reale x determinate e positive in ogni punto dell'intorno x_0 di a , se la $\varphi(x)$ è monotona e derivabile, se inoltre esistono due numeri ε , μ , tali che

$$a - x < \varepsilon, \quad (a - x) \left| \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < \mu,$$

secondo che l'integrale $\int_{x_0}^a \varphi(x) dx$ è divergente o convergente ha luogo l'una o l'altra delle relazioni:

$$\lim_{x=a} \frac{1}{a-x} \int_x^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \left\{ \begin{array}{l} = \lim_{x=a} \frac{\int_{x_0}^x f(x) dx}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx} \\ = \lim_{x=a} \frac{\int_x^a f(x) dx}{\int_x^a \varphi(x) dx} \end{array} \right. \quad (39)$$

purchè il primo membro sia determinato e finito (o nullo).

TEOREMA 7.^o Le formole (38) del Teorema 5.^o valgono purchè esista uno qualunque dei due membri, se alle ipotesi dell'enunciato si aggiungano le seguenti:

1.^o L'integrale $\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx$ diverge ed è soddisfatta la relazione:

$$x \geq x_1, \quad \left| \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \right| < \mu.$$

2.^o L'integrale $\int_{x_0}^x \varphi(x) dx$ è infinito del 1.^o ordine (al senso chiarito al n.^o 4).

Le formole (39) del teorema 6.^o valgono purchè esista uno qualunque dei due membri, se alle ipotesi dell'enunciato si aggiungano le seguenti:

1.^o L'integrale $\int_{x_0}^a \varphi(x) dx$ converge ed è soddisfatta la relazione:

$$x \geq x_1, \quad \left| \frac{1}{a-x} \int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \right| < \mu.$$

2.^o L'integrale $\int_x^a \varphi(x) dx$ è infinitesimo del 1.^o ordine.

12. OSSERVAZIONE 1.^a *Le condizioni imposte al rapporto $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ possono far difetto in tutti i punti di un insieme di misura nulla, ed in tali punti quel rapporto può assumere valori dati a piacere senza che i teoremi enunciati cessino di essere validi.*

13. OSSERVAZIONE 2.^a *I teoremi trovati per l'integrale superiore valgono naturalmente anche per l'integrale di Riemann, quando si abbia che fare con funzioni $f(x)$ integrabili.*

14. Se supponiamo che le funzioni $f(x)$ $\varphi(x)$ siano entrambe continue, o generalmente continue, nell'intervallo considerato, ponendo

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^x f(x) dx, & \Phi(x) &= \int_{x_0}^x \varphi(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

per integrali divergenti,

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \int_x^\infty f(x) dx, & \Phi(x) &= \int_x^\infty \varphi(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

per integrali convergenti estesi ad intervalli infiniti,

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \int_x^a f(x) dx, & \Phi(x) &= \int_x^a \varphi(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

per integrali convergenti di funzioni che hanno punti di infinito

avremo, per integrali divergenti $F' = f$, $\Phi' = \varphi$ e per integrali convergenti $F' = -f$, $\Phi' = -\varphi$; possiamo dunque concludere:

TEOREMA 8.^o *Se $F(x)$, $\Phi(x)$ sono funzioni reali della variabile reale x , finite, ad un valore e derivabili per tutti i punti dell'intorno x_0 — a (a finito od infinito), infinite od infinitesime entrambe per $x = a$; se in questo punto la $\Phi(x)$ ha ordine finito (o nullo) di infinito o di infinitesimo (*) e la sua*

(*) Al senso più volte chiarito. — V. p. es. al n.º 4 di questa pubblicazione.

derivata è monotona, si ha:

$$\lim_{x=a} \frac{F(x)}{\Phi(x)} \left\{ \begin{array}{l} = \lim_{x=a} \frac{1}{a-x} \int_x^a \frac{F'(x)}{\Phi'(x)} dx, \text{ per } a \text{ finito,} \\ = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \frac{F'(x)}{\Phi'(x)} dx. \text{ per } a = \infty, \end{array} \right\} \quad (43)$$

purchè esista il secondo membro.

Se poi la funzione $\varphi(x)$ per a infinito ha ordine di infinito eguale ad 1 (come per $\varphi = x \lg x$, $\varphi = x \lg x \lg Gx$, ...) e, per a finito è infinitesima del 1.º ordine, la formula (43) vale purchè esista uno dei due membri ed il rapporto delle derivate (esclusi i punti di un insieme di misura nulla) abbia limite superiore finito.

15. OSSERVAZIONE. Quando non esistano i limiti delle espressioni al 2.º membro nelle formule (38), (39), (43) ci si giova di relazioni ricavate dalle formule (2') (4') relativi ai max. lim., le quali relazioni affermano l'esistenza di un numero positivo μ tale che il max. lim. del valore assoluto del 1.º membro è minore del prodotto del max. lim. del valore assoluto del 2.º, moltiplicato per μ .

III.

16. Dato un insieme di punti $[\xi]$ situati nel segmento $x_0 \overline{\quad} x$, rappresentando con $\varphi(x)$ la sua *indicatrice di frequenza* (*), ne rappresenteremo la *estensione esteriore* mediante l'integrale (superiore)

$$\int_{x_0}^x \varphi(x) dx;$$

diremo *frequenza dell'insieme* $[\xi]$ nel punto $x = \infty$, il limite

$$\lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx}{x - x_0}; \quad (44)$$

(*) Cioè una funzione che assume il valore 1 nei punti ξ ed il valore zero nei punti di $x_0 \overline{\quad} x$ non appartenenti all'insieme.

frequenza (a sinistra) nel punto a distanza finita a , il limite

$$\lim_{x=a} \frac{\int_x^a \varphi(x) dx}{a-x}; \quad (45)$$

e, quando cotesti limiti non esistano, diremo che la frequenza è compresa fra il minimo ed il massimo limite delle espressioni considerate.

Analogamente si definisce la frequenza a destra e la frequenza ordinaria, delle quali per altro qui non occorrerà parlare (*).

17. Sia data una funzione $y = y(x)$ che, nei punti dell'intervallo $x_0 \text{---} x$ è monotona insieme con la sua derivata e nel punto dove si vuol determinare la frequenza dell'insieme $[\xi]$ è infinita od infinitesima di ordine finito (al senso chiarito al n.º 4) e può anche essere determinata e finita.

Questa funzione stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i punti dell'intervallo $x_0 \text{---} x$ e quelli dell'intervallo $y_0 \text{---} y$; ($y_0 = y(x_0)$, $y = y(x)$): all'insieme $[\xi]$ corrisponde l'insieme $[\eta = y(\xi)]$, ed a questo quello.

Vogliamo determinare la frequenza dell'insieme $[\eta]$ in un dato punto, supposto nota quella dell'insieme $[\xi]$ nel punto corrispondente.

Anzitutto, nella supposizione che l'intervallo $y_0 \text{---} y$ comprenda nel suo estremo superiore il punto dell'infinito, cerchiamo la frequenza nel punto dell'infinito, cioè, designando con $\Phi(y)$, la indicatrice di frequenza dell'insieme $[\eta]$, proponiamoci di calcolare

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^y \Phi(y) dy}{y - y_0}. \quad (46)$$

Il punto x , che, nella corrispondenza considerata, corrisponde al punto all'infinito delle y , può essere all'infinito oppure a distanza finita.

(*) Il concetto di frequenza di un insieme nell'intorno di un punto assegnato, fu da me introdotto nella nota: *Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari* (Rend. Acc. Lincei, vol. XII, 1906) ed ulteriormente sviluppato nella Memoria *Convergenza di algoritmi infiniti*.

Nella prima ipotesi avremo:

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^{\bar{y}} \Phi(y) dy}{y - y_0} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi(x) y'(x) dx}{\int_{x_0}^{\bar{x}} y'(x) dx}$$

e, pel teorema 5.º, avremo:

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^{\bar{y}} \Phi(y) dy}{y - y_0} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi(x) dx}{x - x_0}. \quad (47)$$

Se invece supponiamo che il punto $y = \infty$ corrisponda al punto a distanza finita $x = a$, avremo:

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^{\bar{y}} \Phi(y) dy}{y - y_0} = \lim_{x=a} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi(x) y'(x) dx}{\int_{x_0}^{\bar{x}} y'(x) dx}$$

e, pel teorema 6.º,

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^{\bar{y}} \Phi(y) dy}{y - y_0} = \lim_{x=a} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi(x) dx}{a - x}. \quad (48)$$

Cerchiamo ora la *frequenza dell'insieme* $[n]$ nel punto a distanza finita $b = y(a)$.

Se anche il punto a che gli corrisponde è a distanza finita, abbiamo

$$\lim_{y=b} \frac{\int_y^{\bar{b}} \Phi(y) dy}{b - y} = \lim_{x=a} \frac{\int_x^{\bar{a}} \varphi(x) y'(x) dx}{\int_x^{\bar{a}} y'(x) dx}$$

e, pel teorema 6.º,

$$\lim_{y=b} \frac{\int_y^{\bar{b}} \Phi(y) dy}{b - y} = \lim_{x=a} \frac{\int_x^{\bar{a}} \varphi(x) dx}{a - x}. \quad (49)$$

Se poi il punto $y = b$ corrisponde al punto $x = \infty$, si ha :

$$\lim_{y=b} \frac{\int_y^b \Phi(y) dy}{b-y} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_x^\infty \varphi(x) y'(x) dx}{\int_x^\infty y'(x) dx},$$

e, pel teorema 5.º,

$$\lim_{y=b} \frac{\int_y^b \Phi(y) dy}{b-y} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx}{x-x_0}. \quad (50)$$

Le formule (47), (48), (49), (50) mostrano che in ogni caso la frequenza dell'insieme $[\xi]$ è eguale alla frequenza dell'insieme trasformato nel punto corrispondente. D'onde:

TEOREMA 9.º *La frequenza è invariante per tutte le trasformazioni generate da funzioni monotone insieme con la loro derivata, le quali nell'intorno del punto che si considera sono finite od hanno ordine finito di infinito o di infinitesimo (inteso l'ordine al senso chiarito al n.º 4).*

Giova osservare che qui noi supponiamo sempre soddisfatte per le funzioni trasformatrici $y(x)$ tutte le condizioni di continuità, derivabilità, monotonia... che sono richieste dal problema; poichè noi non ci occupiamo che della loro *rapidità di crescita o di evanescenza*, al fine di cercare le relazioni fra queste loro proprietà e la invarianza della frequenza.

18. Si osservi che se la funzione $y = y'(x)$ ha ordine determinato ed infinito di infinito o di infinitesimo, la sua reciproca $x = y(x)$ ha nel punto corrispondente ordine nullo (*), epperò, se in un punto $y = b$ l'insieme $[\tau]$ ha, in tale ipotesi, frequenza determinata, l'insieme $[\xi]$ ha nel punto corrispondente la medesima frequenza. D'onde:

TEOREMA 10.º *Se l'insieme $[\xi]$ ha frequenza determinata nel punto $x = a$ (finito od infinito), e si fa corrispondere biunivocamente all'insieme $[\tau]$ mediante la funzione $y = y(x)$ la quale in un intorno di a soddisfa le solite condizioni di continuità, derivabilità e monotonia, e per $x = a$ ha ordine determinato (finito nullo od infinito) di infinito o di infinitesimo, l'insieme trasformato avrà nel punto corrispondente la medesima frequenza o non avrà frequenza determinata.*

(*) Cfr. la nota: *Sul calcolo degli infiniti*, al loc. cit.

19. TEOREMA 11.^o Sia $[\xi]$ un insieme di punti del raggio $x_0' - \infty$, tale che la estensione esteriore della parte di esso contenuta nel segmento $x' - x + 1$ diventi infinitesima per $x = \infty$.

La frequenza di un tale insieme per $x = \infty$ è evidentemente infinitesima, dico che è tale nel punto $b = y(\infty)$ corrispondente anche la frequenza di qualunque insieme trasformato di $[\xi]$ mediante una funzione $y(x)$ la cui derivata sia monotona e soddisfi la condizione seguente: esistono tre numeri positivi X, l, L , tali che

$$x \geq X, \quad l \leq \frac{y'(x+1)}{y'(x)} \leq L (*). \quad (51)$$

E, di fatto,

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y(x)}^{\overline{y(x+1)}} \Phi(y) dy}{y(x+1) - y(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_x^{\overline{x+1}} \varphi(x) y'(x) dx}{y'(x+\theta)} = \left. \begin{aligned} &= \lim_{x=\infty} \frac{y'(x+\theta_1)}{y'(x+\theta)} \int_x^{\overline{x+1}} \varphi(x) dx. \end{aligned} \right\} (52)$$

Ora, per la formula (51) e per la supposta monotonia della $y'(x)$, vediamo che il fattore $\frac{y'(x+\theta_1)}{y'(x+\theta)}$ è minore certamente del maggiore dei due numeri $\frac{1}{l}, L$; il fattore $\int_x^{\overline{x+1}} \varphi(x) dx$ è per ipotesi infinitesimo, onde viene

$$\lim_{x=\infty} \frac{\int_{y(x)}^{\overline{y(x+1)}} \Phi(y) dy}{y(x+1) - y(x)} = 0;$$

ma si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{\int_{y(x_0)}^{\overline{y(x)}} \Phi(y) dy}{y(x) - y(x_0)} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_{y(x)}^{\overline{y(x+1)}} \Phi(y) dy}{y(x+1) - y(x)}$$

e da ciò segue l'enunciato.

(*) Questa condizione, nel calcolo degli infiniti, equivale a supporre che la $y'(x)$ abbia ordine finito (o nullo) di infinito, rispetto all'infinito principale e^∞ . (Cfr. E. BORTOLOTTI, *Contributo alla teoria degli infiniti* nel Tomo XI della serie III degli *Annali di Matematica*, pag. 60-65).

20. Trascuriamo le facili estensioni ed applicazioni di questo teorema, e lasciamo del pari la dimostrazione del seguente:

TEOREMA 12.^o *Se il dato insieme $[\xi]$ è tale che, per qualsiasi incremento positivo, finito Δx delle x (anche variabile con x), sempre si abbia*

$$\omega = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{x+\Delta} \varphi(x) dx}{\Delta x},$$

la frequenza dell'insieme dato nel punto $x = \infty$ è ω , ed essa rimane invariante qualunque sia la rapidità di crescita (o di evanescenza) della funzione trasformatrice — sempre supposte le solite condizioni di derivabilità e monotonia).

IV.

21. TEOREMA 13.^o *Siano date due funzioni reali $f(x)$, $\varphi(x)$, della variabile reale x , che in un determinato intorno del punto $x = a$ (finito od infinito) sono finite e derivabili. La funzione $\varphi(x)$ sia monotona insieme con la sua derivata ed infinita (od infinitesima) per $x = a$, di ordine finito o nullo (*). Le derivate $f'(x)$, $\varphi'(x)$ siano atte alla integrazione definita in ogni intervallo $x_0!-x$ ($x < a$), esista un numero μ tale che la condizione $\left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right| \leq \mu$ sia soddisfatta in tutti i punti di un determinato intorno di a esclusi tutt'al più quelli di un insieme di misura nulla.*

Condizione sufficiente perchè il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ abbia limite λ determinato e finito per $x = a$ è che ad ogni numero positivo ε corrisponda un intorno $x_0!-a$ tale che la condizione

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \lambda + \varepsilon \quad (53)$$

sia soddisfatta in tutti i punti dell'intorno, esclusi al più quelli di un insieme di frequenza infinitesima per $x = a$.

(*) Intendiamo sempre definito l'ordine di infinito al modo chiarito al n.º 4.

Se λ è diverso dallo zero sostituiremo al quoziente $\frac{f}{\varphi}$ quello $\frac{F}{\Phi} = \frac{f - \lambda \varphi}{\varphi}$, che dovrà tendere allo zero; perciò, senz'altro supporremo $\lambda = 0$.

Supponiamo, per fissare le idee, $a = \infty$ e $\varphi(x)$ infinita per $x = \infty$, e consideriamo l'integrale $\int_{x_\varepsilon}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx$.

Poichè la relazione $\left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right| > \mu$ non può verificarsi se non nei punti di un insieme di misura nulla, potremo, senza cambiare il valore dell'integrale considerato, sostituire in cotesti punti, al valore della funzione $\frac{f'}{\varphi'}$, lo zero.

Rappresentiamo con $\Phi(x)$ la indicatrice di frequenza dei punti nei quali è

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} > \varepsilon,$$

poichè anche in cotesti punti è sempre $\left| \frac{f'}{\varphi'} \right| < \mu$, avremo

$$\left| \int_{x_\varepsilon}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx \right| < \mu \int_{x_\varepsilon}^x \Phi(x) dx + \varepsilon (x - x_\varepsilon),$$

da cui

$$\frac{1}{x - x_\varepsilon} \left| \int_{x_\varepsilon}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx \right| < \mu \frac{\int_{x_\varepsilon}^x \Phi(x) dx}{x - x_\varepsilon} + \varepsilon. \quad (54)$$

Ma il quoziente $\frac{\int_{x_\varepsilon}^x \Phi(x) dx}{x - x_\varepsilon}$ è, per ipotesi, infinitesimo per $x = \infty$, onde vediamo che esiste un numero X tale che

$$x \geq X, \quad \frac{1}{x - x_\varepsilon} \left| \int_{x_\varepsilon}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx \right| < 2\varepsilon.$$

Dalla osservazione fatta al n.º 15 desumiamo dunque la esistenza di un numero finito μ tale che

$$x \geq X, \quad \left| \frac{\int_{x_\varepsilon}^x f'(x) dx}{\int_{x_\varepsilon}^x \varphi'(x) dx} \right| < 2\mu\varepsilon,$$

cioè

$$x \geq X, \quad \left| \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{\varphi(x) - \varphi(x_\varepsilon)} \right| < 2\mu\varepsilon,$$

ed anche

$$x \geq X, \quad \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < 2\mu\varepsilon \cdot \left(1 - \frac{\varphi(x_\varepsilon)}{\varphi(x)} \right) + \left| \frac{f(x_\varepsilon)}{\varphi(x_\varepsilon)} \right|,$$

ed essendo, per ipotesi, $\varphi(x)$ infinito per $x = \infty$, vediamo che ad ogni numero $\nu > 1$ può farsi corrispondere un $X_1 \geq X$ tale che

$$x \geq X_1, \quad \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < 2\mu\nu\varepsilon.$$

Dunque è

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Analoga dimostrazione si fa per funzioni $\varphi(x)$ infinitesime, e per il caso che il punto a sia a distanza finita.

22. TEOREMA 14.^o Siano $f(x)$, $\varphi(x)$ funzioni reali della variabile reale x , derivabili nell'intorno $x_0 \neq a$ (a finito od infinito), la $f(x)$ sia ivi monotona e la $\varphi(x)$ sia sempre crescente (decrescente) ed infinita (infinitesima) per $x = a$. Le loro derivate sieno atte alla integrazione definita in ogni intervallo $x_0 \neq x$ ($x < a$), ed esistano due numeri x_1 , μ tali che la relazione

$$\left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right| < \mu$$

sia soddisfatta in tutti i punti dell'intorno $x_1 \neq a$, esclusi tutt'al più quelli di un insieme di misura nulla.

Condizione necessaria e sufficiente perchè si abbia $\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ è che il quoziente delle derivate sia infinitesimo per $\varphi(x)$ che tende all'infinito (allo zero) percorrendo in modo arbitrario i punti di un insieme il cui complementare ha frequenza infinitesima per $\varphi(x)$ infinito (zero).

Quando x tende ad a per valori cui corrispondono punti $\varphi(x)$ dell'insieme complementare al considerato, il quoziente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ può aver limiti diversi dallo zero, ed anche diventare infinito, senza che per ciò cessi dall'essere

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

La condizione è necessaria. E' di fatto: Supponiamo prima $a = \infty$, e consideriamo il caso speciale di $\varphi(x) = x$ onde $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = f'(x)$.

Essendo ε un numero positivo scelto a piacere, indichiamo con $\Phi(x)$ la indicatrice di frequenza dei punti dell'intervallo x_0 — ∞ dove è $|f'(x)| > \varepsilon$, ed avremo:

$$x \geq x_0, \quad |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon \int_{x_0}^x \Phi(x) dx,$$

cioè

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| > \varepsilon \frac{\int_{x_0}^x \Phi(x) dx}{x - x_0};$$

ma è per ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

dunque deve ancora essere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x \Phi(x) dx}{x - x_0} = 0$$

e ciò dimostra l'enunciato.

Consideriamo ora in generale il quoziente di due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ soddisfacenti le condizioni dell'enunciato e sia $\varphi(x)$ infinita per $x = \infty$.

La funzione $y = \varphi(x)$ sarà atta alla inversione e, ricavato $x = \psi(y)$, avremo

$$f(x) = f(\psi(y)) = F(y).$$

Per la fatta dimostrazione abbiamo, come condizione necessaria per la evanescenza del quoziente $\frac{F(y)}{y}$, che sia infinitesima per $y = \infty$ la frequenza dei punti y dove può essere soddisfatta una relazione della forma $|F'(y)| > \varepsilon$; ma è $F'(y) = \left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right|$; $\frac{F(y)}{y} = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$; e di qui il teorema.

La medesima dimostrazione serve per il quoziente di due funzioni infinite entrambe in un punto a a distanza finita.

Pel quoziente di funzioni infinitesime considereremo prima il caso di

$\varphi(x) = a - x$ (a a distanza finita), poi passeremo al caso generale con considerazioni analoghe a quelle fatte precedentemente (*).

La condizione è sufficiente. Per i casi di $\varphi(x) = x$, $\varphi(x) = a - x$, il teorema è conseguenza del teorema 12.^o; da questi si passa al caso generale con considerazioni analoghe a quelle fatte precedentemente.

23. Quando la funzione $x = \psi(y)$ abbia, al senso più volte chiarito, ordine finito o nullo di infinito o di infinitesimo, oppure quando siano soddisfatte per esso le condizioni dei teoremi 11, 12; a frequenza infinitesima per un insieme $y = \varphi(x)$ nel punto $\varphi(x)$ corrisponde frequenza infinitesima per l'insieme corrispondente dei punti x , nel punto a .

In questi casi *la condizione necessaria e sufficiente per la evanescenza del quoziente $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ nel punto $x = a$ è semplicemente espressa dal richiedere che sia infinitesimo per $x = a$ l'insieme dei punti dove il quoziente delle derivate può assumere valori assoluti maggiori di un determinato numero positivo.*

Le conclusioni che abbiamo ricavate servono alla ricerca ed all'esame dei criterii di *convergenza di algoritmi infiniti*.

(*) Cfr. *Convergenza di algoritmi infiniti* al loc. cit., § IV.