Schwingungsprobleme und Integralgleichungen.

Von

E. Trefftz in Dresden.

Behandelt man die einfachen Schwingungsprobleme, z. B. das Problem der schwingenden Saite oder des schwingenden Stabes, mit der Methode der Integralgleichungen, so erhält man in einfacher Weise außer dem Existenzbeweise für die Eigenschwingungen den Satz über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen mit der Einschränkung, daß für die zu entwickelnde Funktion bei der schwingenden Saite zweimalige, beim schwingenden Stabe viermalige Differenzierbarkeit gefordert wird. Im folgenden gebe ich einen einfachen Beweis dafür, daß von den zu entwickelnden Funktionen im Falle der schwingenden Saite nur für den ersten und im Falle des schwingenden Stabes nur für den zweiten Differentialquotienten quadratische Integrabilität gefordert zu werden braucht. Außerdem ergibt sich dabei der Konvergenzbeweis für die bilineare Entwicklung des Kernes nach den Eigenfunktionen; da es sich um Kerne von positivem Typus handelt, ist dies letzte Resultat nur eine Bestätigung eines bekannten Ergebnisses von Mercer[1]), der allgemein für Kerne von positivem Typus die Konvergenz der bilinearen Entwicklung bewiesen hat.

1. Die Integralgleichung der Eigenfunktionen. Es sei gestattet, Bekanntes kurz zu wiederholen. Wir bezeichnen mit $E(s, t)$ die Entfernung aus der Gleichgewichtslage, welche an der Stelle s entsteht, wenn an der Stelle t eine Kraft vom Betrage 1 wirkt. Dann erhalten wir nach dem d'Alembertschen Prinzip die Ausschwingung $Y(s, \tau)$ an der Stelle s zur Zeit τ, indem wir an jeder Stelle t die Trägheitskräfte $-\mu(t)\frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2}$ anbringen (wo $\mu(t)$ die Masse des schwingenden Stabes oder der Saite

[1]) Mercer, Phil. Trans. 209 (1909) A, S. 415.

pro Längeninhalt an der betreffenden Stelle bedeutet) und durch Integration die Einflüsse auf die Stelle s summieren

$$Y(s,\tau) = -\int_0^l E(s,t)\mu(t)\frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2}dt.$$

Machen wir den gewohnten Ansatz $Y(s,\tau) = y(s)\cdot\cos\nu\tau$, so ergibt sich für die Schwingungsfigur die Integralgleichung

$$y(s) = \nu^2\int_0^l E(s,t)\mu(t)y(t)\,dt$$

(l = Länge der schwingenden Saite oder des Stabes).

Die Einflußfunktion $E(s,t)$ ist symmetrisch; bringen wir nämlich an der Stelle s eine Last P_s und an der Stelle t eine Last P_t auf das System, und sind $y(s)$ und $y(t)$ die bei s und t dadurch hervorgerufenen Durchbiegungen, so ändern sich $y(s)$ und $y(t)$ um $\delta y(s) = E(s,t)\delta P_t$ und $\delta y(t) = E(t,t)\delta P_t$, wenn P_t um δP_t vergrößert wird. Dabei wächst die Verzerrungsenergie um die hierbei geleistete Arbeit

$$\delta V = E(s,t)\delta P_t P_s + E(t,t)\delta P_t P_t.$$

Es ist also

$$\frac{\partial V}{\partial P_t} = E(s,t)P_s + E(t,t)P_t,$$

das heißt

$$E(s,t) = \frac{\partial^2 V}{\partial P_s \partial P_t} = E(t,s).$$

Die Integralgleichung wird in bekannter Weise symmetrisiert, indem $K(s,t) = \sqrt{\mu(s)}\cdot\sqrt{\mu(t)}\cdot E(s,t)$ und $\varphi(s) = \sqrt{\mu(s)}\cdot y(s)$ gesetzt wird. Aus der Symmetrie folgt die Existenz der Eigenwerte und der Eigenfunktionen. Entwickelbar nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ ist nach den Sätzen von Erhard Schmidt[2]) jede Funktion, welche durch eine quadratisch integrable Funktion $g(t)$ in der Form $f(s) = \int_0^l K(s,t)\cdot g(t)\cdot dt$ darstellbar ist. Die mechanische Bedeutung dieser Bedingung erhalten wir, wenn wir sie folgendermaßen schreiben:

$$\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}} = \int_0^l E(s,t)\sqrt{\mu(t)}g(t)\,dt,$$

d. h. es muß eine Verteilung von Kräften $\sqrt{\mu(t)}g(t)$ pro Längeneinheit geben, welche als Deformationsfigur gerade die Funktion $\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ ergibt.

[2]) E. Schmidt, Über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgegebener. Math. Ann. 63.

Da die Kräfte, welche eine vorgegebene Deformation erzeugen, durch den zweiten Differentialquotienten bei der schwingenden Saite und durch den vierten beim schwingenden Stabe gegeben sind, so folgt, daß der zweite bzw. vierte Differentialquotient des Quotienten $f(s)/\sqrt{\mu(s)}$ quadratisch integrabel sein muß, wenn das Schmidtsche Kriterium erfüllt sein soll.

Der Grundgedanke, der zur Einschränkung dieser Bedingungen führt, ist der, den Kern der obigen Integralgleichungen zu zerlegen, so daß er in der Form:

$$K(s,t) = \int_0^l G(s,r)\cdot G(t,r)\cdot dr$$

aus einem unsymmetrischen Kerne $G(s,t)$ erzeugt erscheint.

2. **Die Zerlegung des Kernes für die Integralgleichung der schwingenden Saite.** Bei der schwingenden Saite, die in den Endpunkten $s=0$ und $s=l$ befestigt sei, setzt sich die Einflußfunktion $E(s,t)$ einfach aus zwei linearen Stücken zusammen, die für $s=0$ und $s=l$ verschwinden und bei $s=t$ so aneinander gefügt sind, daß der Differentialquotient einen von t unabhängigen Sprung erleidet, dessen Betrag wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich -1 setzen können. Der Differentialquotient $\frac{\partial E(s,t)}{\partial s}$ ist also stückweise konstant; es ist für $s<t$ $\frac{\partial E(s,t)}{\partial s} = \frac{\partial E(t-0,t)}{\partial s}$ für $s>t$ $\frac{\partial E(s,t)}{\partial s} = \frac{\partial E(t+0,t)}{\partial s}$ und $\frac{\partial E(t-0,t)}{\partial s} - \frac{\partial E(t+0,t)}{\partial s} = 1$.

Daraus folgt bei Berücksichtigung der Randbedingungen $E(0,t)=0$ und $E(l,t)=0$

$$E(s,t) = \int_0^l \frac{\partial E(r,s)}{\partial r}\,\frac{\partial E(r,t)}{\partial r}\,dr = \int_0^l \frac{\partial E(s,r)}{\partial r}\cdot\frac{\partial E(t,r)}{\partial r}\,dr$$

und

$$K(s,t) = \int_0^l \sqrt{\mu(s)}\,\frac{\partial E(s,r)}{\partial r}\,\sqrt{\mu(t)}\,\frac{\partial E(t,r)}{\partial r}\,dr.$$

Setzen wir also:

$$G(s,r) = \sqrt{\mu(s)}\,\frac{\partial E(s,r)}{\partial r}$$

so ist

$$K(s,t) = \int_0^l G(s,r)\,G(t,r)\,dr.$$

Der Kern $G(s,t)$ ist unsymmetrisch; bezeichnen wir mit $\varphi_n(s)$ und $\psi_n(s)$ das System der zu diesem Kern gehörenden adjungierten Schmidtschen Eigenfunktionen, so sind die Funktionen $\varphi_n(s)$ identisch mit den Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$, und nach den Entwicklungssätzen von

Schmidt lassen sich alle diejenigen Funktionen nach den $\varphi_n(s)$ absolut und gleichmäßig konvergent entwickeln, die sich durch eine quadratisch integrable Funktion $q(r)$ in der Form $\int\limits_0^l G(s,r)\,q(r)\,dr$ darstellen lassen. Diese Bedingung schreiben wir analog wie oben

$$\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}} = \int\limits_0^l \frac{\partial E(r,s)}{\partial r}\, q(r)\,dr\,.$$

Erfüllt $f(s)$ die Randbedingungen $f=0$ für $s=0$ und $s=l$, so wird diese Gleichung mit $q(s) = \frac{d}{ds}\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ erfüllt. Damit ist die Konvergenz der Entwicklung bewiesen unter der Bedingung, daß die Funktion $\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ einen quadratisch integrablen ersten Differentialquotienten besitzt.

Aus der Zerlegung des Kernes folgt ohne weiteres die Positivität der Eigenwerte ν_n^2, die man gewöhnlich aus der physikalischen Tatsache der Positivität der Deformationsenergie ableitet.

Ferner können wir aus der Darstellungsform

$$K(s,t) = \int\limits_0^l G(s,r)\,G(t,r)\,dr$$

direkt auf die Konvergenz der bilinearen Entwicklung des Kernes

$$K(s,t) = \sum \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\nu_n^2}$$

schließen. Zunächst folgt aus dem eben benutzten Schmidtschen Entwicklungssatze nur die gleichmäßige Konvergenz in t bei festem s bzw., wegen der Symmetrie, in s bei festem t. Man kann aber nach dem Vorgange von Mercer (Seite 440 der in Fußnote [1]) zitierten Arbeit) hieraus in folgender Weise auf die gleichmäßige Konvergenz in s *und* t schließen: zunächst folgt aus einem Satze von Dini[3]), daß die Reihe $K(s,s) = \sum \frac{\varphi_n^2(s)}{\nu_n^2}$[4]) als eine Reihe positiver, stetiger Funktionen, welche eine stetige Funktion darstellt, in dem Intervall $0 - l$ mit Einschluß der Grenzen gleichmäßig konvergiert. Dann folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\sum \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\nu_n^2}$ direkt aus der Ungleichung $\varphi_n(s)\,\varphi_n(t) \leqq \frac{1}{2}\varphi_n^2(s) + \frac{1}{2}\varphi_n^2(t)$.

---

[3]) Dini-Lüroth, Grundlagen der Theorie der Funktionen einer reellen Variablen. § 99.

[4]) Bei unstetiger Massenverteilung $\sqrt{\mu(s)}$ betrachtet man statt $K(s,t)$ die Einflußfunktion $E(s;t) = \sum \frac{y_n(s)\,y_n(t)}{\nu_n^2}$.

3. Zerlegung des Kernes für die Integralgleichung des schwingenden Stabes. Zur Zerlegung des Kernes in der Integralgleichung des schwingenden Balkens führen wir außer der Einflußfunktion für die Durchbiegungen $E(s,t)$ noch ein: die Momenten-Einflußfunktion $M(s,t)$ und die Querkrafts-Einflußfunktion $Q(s,t)$, welche die von der im Punkte t wirkenden Last 1 hervorgerufenen Momente bzw. Querkräfte darstellen. Für die drei Einflußfunktionen gelten die Gleichungen

$$EJ\frac{\partial^2 E(s,t)}{\partial s^2} = -M(s,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial M(s,t)}{\partial s} = Q(s,t),[5]$$

außerdem haben wir die gleichen Randbedingungen wie für die Eigenfunktionen, nämlich

beim freigelagerten Balken

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad s=0 \quad E(0,t)=0 \quad \text{und} \quad M(0,t)=0,\\ &\text{für} \quad s=l \quad E(l,t)=0 \quad \text{und} \quad M(l,t)=0, \end{aligned}$$

beim beiderseits eingespannten Balken

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad s=0 \quad E(0,t)=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial E(0,t)}{\partial s}=0,\\ &\text{für} \quad s=l \quad E(l,t)=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial E(l,t)}{\partial s}=0, \end{aligned}$$

an einem freien Balkenende $s=l \quad Q(l,t)=0$ und $M(l,t)=0$.

Berücksichtigen wir nun, daß die Querkraft, welche eine bei t wirkende Last 1 hervorruft, von 0 bis t konstant ist, bei t einen Sprung vom Betrage -1 hat, und von da an wieder bis l konstant bleibt, d. h. daß

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad s<t \quad Q(s,t)=Q(0,t),\\ &\text{für} \quad s>t \quad Q(s,t)=Q(l,t)\\ &\text{und} \quad\quad\quad\; Q(0,t)-Q(l,t)=1 \end{aligned}$$

ist, so folgt:

$$\int_0^l Q(r,s)\frac{\partial E(r,t)}{\partial r}dr = Q(0,s)\{E(s,t)-E(0,t)\} + Q(l,s)\{E(l,t)-E(s,t)\}.$$

Nach den Randbedingungen wird nun an den Enden entweder E oder Q zu Null, es folgt also:

$$E(s,t)=\int_0^l Q(r,s)\frac{\partial E(r,t)}{\partial r}dr.$$

[5]) Wir bezeichnen durch E ohne Index den Elastizitätsmodul des Materials; eine Verwechslung mit der Funktion $E(s,t)$ ist wohl nicht zu befürchten.

Führen wir hier eine partielle Integration aus $\left(Q(r,t)=\frac{\partial M(r,t)}{\partial r}\right)$:

$$E(s,t)=M(r,s)\frac{\partial E(r,t)}{\partial r}\Bigg|_{r=0}^{r=l}-\int_0^l M(r,s)\frac{\partial^2 E(r,t)}{\partial r^2}\,dr,$$

so fällt wegen der Randbedingungen das erste Glied der rechten Seite fort, da an den Grenzen entweder M oder $\frac{\partial E}{\partial r}$ verschwindet, und unter dem Integral ist der zweite Differentialquotient

$$\frac{\partial^2 E(r,t)}{\partial r^2}=-M(r,t)/EJ(r),$$

so daß wir schließlich

$$E(s,t)=\int_0^l \frac{M(r,s)\,M(r,t)}{E\cdot J(r)}\,dr$$

erhalten.

Setzen wir jetzt

$$G(s,r)=\sqrt{\mu(s)}\,\frac{M(r,s)}{\sqrt{E\cdot J(r)}},$$

so haben wir die gesuchte Zerlegung von $K(s,t)$ gefunden

$$K(s,t)=\int_0^l G(s,r)\,G(t,r)\,dr.$$

Die übrigen Schlüsse bleiben die gleichen wie oben. Zunächst folgt aus der Zerlegung, daß die Eigenwerte positiv sind; dann folgt die Konvergenz der bilinearen Entwicklung des Kernes. Was die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen angeht, so ist die Bedingung für gleichmäßige und absolute Konvergenz die Darstellbarkeit in der Form

$$f(s)=\int_0^l G(s,r)\,q(r)\,dr$$

durch eine quadratisch integrable Funktion $q(r)$.

Das schreiben wir

$$\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}=\int_0^l M(r,s)\,\frac{q(r)}{\sqrt{EJ(r)}}\,dr.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn wir $\frac{q(r)}{\sqrt{EJ(r)}}=-\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{f(r)}{\sqrt{\mu(r)}}\right)$ setzen, wie man erkennt, wenn man die partiellen Integrationen rückwärts ausführt, die oben zur Zerlegung des Kernes führten, und dabei berücksichtigt, daß wir von den zu entwickelnden Funktionen die Erfüllung der gleichen Randbedingungen verlangen müssen wie von den Eigenfunktionen.

Es ergibt sich also das Resultat: Eine den Randbedingungen genügende Funktion $f(s)$ läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ entwickeln, wenn der Quotient $\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ einen quadratisch integrablen zweiten Differentialquotienten besitzt.

Damit sind die Entwicklungssätze in dem gewünschten Umfange bewiesen. Die in dem Nenner stehende $\sqrt{\mu(s)}$ fällt in den Konvergenzkriterien fort, wenn wir von den $\varphi_n(s)$ zu den $y_n(s)$ zurückkehren. Haben wir eine Funktion $F(s)$, welche die Anfangslage des schwingenden Systems angibt, nach den $y_n(s)$ zu entwickeln

$$F(s) = \sum a_n y_n(s),$$

so erhalten wir die Koeffizienten a_n, indem wir die Funktion $f(s) = F(s)\sqrt{\mu(s)}$ nach den Funktionen $\varphi_n(s)$ entwickeln:

$$f(s) = F(s)\sqrt{\mu(s)} = \sum a_n \varphi_n(s) = \sum a_n y_n(s)\sqrt{\mu(s)}$$

und dann durch $\sqrt{\mu(s)}$ dividieren. Die Konvergenzbedingungen, welche für $\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ quadratische Integrabilität des ersten bzw. zweiten Differentialquotienten fordern, werden dann für $F(s)$ einfach zur Forderung der quadratischen Integrabilität des ersten Differentialquotienten bei der schwingenden Saite und des zweiten bei dem schwingenden Stabe, wozu noch die notwendige Erfüllung der Randbedingungen hinzutritt.

Damit ist das in der Einleitung Behauptete vollständig bewiesen.

4. Mechanische Bedeutung der Konvergenzkriterien. Die Konvergenzbedingung hat eine einfache mechanische Bedeutung. Ist $y = F(s)$ die Anfangslage, von der aus die Schwingung beginnt, so st die Deformationsarbeit, welche nötig ist, um diese Anfangslage zu erzeugen, bei der schwingenden Saite $\frac{1}{2} T \cdot \int\limits_0^l y'^2 \cdot ds$ (T = Spannung der Saite), beim schwingenden Stabe $\frac{1}{2}\int\limits_0^l E \cdot J \cdot y''^2 \cdot ds$. Wir sehen also, daß die Forderung nach der quadratischen Integrierbarkeit des ersten bzw. zweiten Differentialquotienten physikalisch mit der Bedingung endlicher Deformationsenergie der Ausgangslage identisch ist.

Wird dem schwingenden System noch eine Anfangsgeschwindigkeit $g(s)$ erteilt, so stellen wir den davon herrührenden Teil der Schwingung durch eine Reihe $\sum\limits_1^\infty b_n \cdot y_n(s) \cdot \sin \nu_n \tau$ dar. Hier sind die Koeffizienten

$$b_n = \frac{\int\limits_0^l \sqrt{\mu(s)}\, g(s)\, \varphi_n(s)\, ds}{\nu_n},$$

d. h. sie sind gleich den nach Fourier-Art gebildeten Koeffizienten von $\sqrt{\mu(s)}\, g(s)$ dividiert durch die Eigenwerte ν_n. Daß die so gebildete Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert, wenn die Funktion $g(s)$ quadratisch integrabel ist, folgt aus dem Hilfssatz, der in der Einleitung der zitierten Arbeit von E. Schmidt bewiesen wird; man kann diesen Satz so aussprechen: Sind α_n die Fourierkoeffizienten $\alpha_n = \int_0^l \gamma(s)\, \varphi_n(s)\, ds$ einer quadratisch integrablen Funktion, so konvergiert die Reihe $\sum \frac{\alpha_n \varphi_n(s)}{\nu_n}$ absolut und gleichmäßig. Die $\varphi_n(s)$ sind dabei die Eigenfunktionen, die ν_n die zugehörigen Eigenwerte zu einem symmetrischen oder unsymmetrischen Kern. In dieser Form bestätigt der Satz direkt die Behauptung über die Konvergenz der obigen Reihe. Nun ist aber die Forderung nach der quadratischen Integrabilität von $g(s)$ identisch mit der Bedingung, daß die kinetische Energie des Anfangszustandes endlich sein soll.

Wir können also das gesamte Resultat der Konvergenzuntersuchungen so aussprechen: Die Reihen

$$Y(s, \tau) = \sum a_n y_n(s) \cos \nu_n \tau + \sum b_n y_n(s) \sin \nu_n \tau$$

konvergieren in allen physikalisch realisierbaren Fällen (d. h. für alle mit endlichem Energieaufwand herstellbaren Anfangszustände) absolut und gleichmäßig.

Aachen, 16. Mai 1922.

(Eingegangen am 28. 5. 1922.)