Über lineare homogene Differentialgleichungen derselben Art.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i./B.

Unter einem *Rationalitätsbereich* Σ verstehen wir im folgenden irgend ein in sich vollständiges oder in sich abgeschlossenes System von Funktionen einer unabhängigen Variablen x, bei dem durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division je zweier Funktionen aus Σ (die Division durch Null ist ausgeschlossen) sowie durch Differentiation jeder Funktion aus Σ das System Σ nicht verlassen wird. Ein Rationalitätsbereich, der derartig definiert ist, braucht *nicht* alle Konstanten zu enthalten.

Von den Funktionen von Σ wird noch vorausgesetzt, daß jede einzelne dieser Funktionen ausnahmslos in demselben Bereiche S der Ebene eine eindeutige, bis auf isolierte Punkte überall in S reguläre analytische Funktion sein soll. Durch Anwendung der vier Spezies und der Differentiation auf die Funktionen von Σ wird dieser Charakter nicht zerstört. Durch die eingeführte Voraussetzung wird für jede lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ, abgesehen von isolierten Punkten, die Existenz regulärer Integrale innerhalb S gesichert.

Hat man zwei lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ

$$A \equiv a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x) y = 0,$$

$$A_1 \equiv \bar{a}_0(x)\frac{d^n z}{dx^n} + \bar{a}_1(x)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + \bar{a}_n(x) z = 0$$

der gleichen Ordnung n, so heißen diese *von derselben Art,* wenn die Integrale von $A = 0$ und $A_1 = 0$ durch eine Beziehung der Form

$$z = p_0(x) y + p_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

verknüpft sind, wobei

$$p_0(x),\ p_1(x),\ \cdots,\ p_{n-1}(x)$$

Funktionen des Rationalitätsbereiches bedeuten. Nach einem leicht herleitbaren Satz von L. Fuchs ist dieses Verhältnis ein umkehrbares, d. h. man kann die Integrale von $A = 0$ durch eine analoge Beziehung aus denen von $A_1 = 0$ finden.

Ist C irgend ein linearer homogener Differentialausdruck, so ist unter dem *symbolischen Produkt* BC bekanntlich der lineare homogene Differentialausdruck

$$b_0(x)\frac{d^m C}{dx^m} + b_1(x)\frac{d^{m-1}C}{dx^{m-1}} + \cdots + b_m(x)C$$

zu verstehen, falls B den linearen homogenen Differentialausdruck

$$b_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + b_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + b_m(x)y$$

vorstellt.

Eine lineare homogene Differentialgleichung $A = 0$ mit Koeffizienten aus Σ heißt *reduzibel*, wenn man ihre linke Seite A in die Form eines symbolischen Produktes BC bringen kann, wobei B und C lineare homogene Differentialausdrücke bedeuten, die auch nur Koeffizienten aus Σ besitzen.

Für lineare homogene Differentialgleichungen derselben Art ist bisher nur folgender Satz von Fuchs*) bekannt: Ist $A = 0$ irgend eine reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ, so ist auch jede lineare homogene Differentialgleichung $A_1 = 0$ mit Koeffizienten aus Σ, die mit $A = 0$ von derselben Art ist, ebenfalls reduzibel. Dieser Satz nun läßt sich auf folgende Weise erweitern:

I. *Ist $A = 0$ irgend eine reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ, kann man also dem Begriff der Reduzibilität entsprechend A als symbolisches Produkt BC schreiben, wobei B und C lineare homogene Differentialausdrücke mit Koeffizienten aus Σ bedeuten, so läßt sich die linke Seite jeder linearen homogenen Differentialgleichung $A_1 = 0$ mit Koeffizienten aus Σ, die mit $A = 0$ von derselben Art ist, als symbolisches Produkt $A_1 = B_1 C_1$ schreiben, wobei B_1 und C_1 zwei lineare homogene Differentialausdrücke mit Koeffizienten aus Σ bedeuten und $B = 0$ mit $B_1 = 0$ und $C = 0$ mit $C_1 = 0$ von derselben Art sind.*

Auf Grund dieses Satzes lassen sich die früher von mir in diesen Annalen für die Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreduzible Faktoren und in „größte vollständig reduzible" Faktoren gewonnenen

*) L. Fuchs, Zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen, Berl. Ak. Sitzungsber. 1888, S. 1276 = Ges. Werke III, S. 18; vgl. auch die Darstellung in Ludwig Schlesingers Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen II_1, Leipzig 1897, S. 120.

Sätze unmittelbar auf die Zerlegung der linken Seiten zweier linearer homogener Differentialgleichungen, die von derselben Art sind, ausdehnen. Diese Sätze findet man als Theoreme II—IV im § 3, während § 1 zwei Hilfssätze enthält und § 2 den oben angeführten Satz I beweist.

§ 1.

(1) Wir beginnen mit einem einfachen Hilfssatz, der seinem Wesen nach der Picard-Vessiotschen Theorie über die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung angehört, aber in der vorliegend präzizierten Form noch nicht ausgesprochen zu sein scheint:

$$A \equiv a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

bedeute irgend eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ, $y_1, y_2, \cdots, y_n$ irgend ein beliebiges, aber fest gewähltes Fundamentalsystem von Integralen von $A = 0$, schließlich sei

$$r\left(y_1, y_2, \cdots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right)$$

irgend eine rationale Funktion der Integrale $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und ihrer Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ. Unterwirft man $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und ihre Abgeleiteten den Substitutionen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe, d. h. ersetzt man y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ durch

$$\lambda_{i1}y_1 + \lambda_{i2}y_2 + \cdots + \lambda_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

wobei die Größen λ_{ik} ein System von n^2 beliebigen Konstanten bedeuten, und behält $r\left(y_1, y_2, \cdots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots\right)$, als Funktion der Integrale von $A = 0$ betrachtet, immer den nämlichen Wert bei, so ist r eine bloße Funktion des Rationalitätsbereiches Σ.

Wir bemerken, daß unser Hilfssatz nicht formale Invarianz von r für willkürliche Größen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ voraussetzt, sondern nur gleiche Wertigkeit, falls die Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ein Fundamentalsystem von $A = 0$ bedeuten.

Zum Beweise beseitigen wir aus r mit Hilfe der linearen homogenen Differentialgleichung $A = 0$ n^{te} und höhere Abgeleitete und erhalten durch diese Reduktion eine rationale Funktion

$$r_1\left(y_1, y_2, \cdots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right),$$

die $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und ihre Abgeleiteten höchstens bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung enthält und, da die vorgelegte Differentialgleichung $A = 0$ nur

Koeffizienten aus Σ hat, ebenfalls nur Koeffizienten aus Σ besitzt. Wir denken uns r_1 als Quotient zweier Funktionen geschrieben, die ganz und rational in $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und ihren Abgeleiteten bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind und deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche Σ angehören.

Wir scheiden aus dem Bereich S der Ebene alle Singularitäten der n Funktionen $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0}$ aus; die angegebenen Funktionen können als Funktionen aus Σ innerhalb des Bereiches S nur an isolierten Stellen aufhören regulär zu sein. Ebenso scheiden wir aus S alle Stellen aus, an denen eine der im Zähler oder Nenner von r_1 auftretenden Funktionen von Σ aufhört regulär zu sein; auch diese Stellen liegen wegen der den Funktionen aus Σ auferlegten Bedingungen isoliert. Schließlich bemerken wir noch, daß die im Nenner von r_1 als Koeffizienten auftretenden Funktionen aus Σ auch nur für isolierte Werte von x verschwinden können, sonst hätten ihre reziproken Werte, die nach der Bedeutung des Rationalitätsbereiches ihm angehören, entgegen der über die Funktionen von Σ gemachten Voraussetzung nicht bloß isolierte Singularitäten. Die erwähnten Nullstellen scheiden wir ebenfalls aus S aus.

Es sei nun x_0 irgend eine Stelle des Bereiches S, die nicht zu den ausgesonderten gehört. Da die Funktionen $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0}$ an der Stelle x_0 regulär sind, so verhalten sich auch die Integrale $y_1, y_2, \cdots, y_n$ der Differentialgleichung $A = 0$ an der Stelle x_0 regulär. Für x_0 mögen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und ihre Abgeleiteten $\frac{d^k y_i}{dx^k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1;\ i = 1, 2, \cdots, n)$ die Werte $y_{10}^0, y_{20}^0, \cdots, y_{n0}^0$ und y_{ik}^0 annehmen. Da x_0 eine reguläre Stelle ist, verschwindet an der Stelle x_0 die Wronskische Determinante

$$(W)\qquad \begin{vmatrix} y_{10}^0 & y_{20}^0 & \cdots & y_{n0}^0 \\ y_{11}^0 & y_{21}^0 & \cdots & y_{n1}^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n-1}^0 & y_{2n-1}^0 & \cdots & y_{nn-1}^0 \end{vmatrix}$$

nicht.

Wir setzen

$$Y_i = \lambda_{i1} y_1 + \lambda_{i2} y_2 + \cdots + \lambda_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

und für die Abgeleiteten

$$\frac{d^k Y_i}{dx^k} = \lambda_{i1} \frac{d^k y_1}{dx^k} + \lambda_{i2} \frac{d^k y_2}{dx^k} + \cdots + \lambda_{in} \frac{d^k y_n}{dx^k}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 1, 2, \cdots, n-1),$$

wobei die λ_{il} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ l = 1, 2, \cdots, n)$ n^2 Konstanten bedeuten. Sind Y_{ik}^0 $(i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 0, 1, \cdots, n-1)$ n^2 willkürlich vorgegebene

Konstanten, so schließt man aus dem Nichtverschwinden der Wronskischen Determinante (W), daß man die n^2 Gleichungen

$$(G) \qquad Y_{ik}^0 = \lambda_{i1} y_{1k}^0 + \lambda_{i2} y_{2k}^0 + \cdots + \lambda_{in} y_{nk}^0$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

stets durch n^2 Konstante λ_{il} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ l = 1, 2, \cdots, n)$ befriedigen kann. Mit anderen Worten: Läßt man in dem System von Gleichungen (G) die Konstanten λ_{il} alle möglichen Werte durchlaufen, so nehmen die Größen Y_{ik}^0 ebenfalls alle möglichen konstanten Werte an.

Die Funktion $r_1\left(y_1, y_2, \cdots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right)$ sollte sich bei allen linearen homogenen Transformationen der $y_1, y_2, \cdots, y_n$ mit konstanten Koeffizienten nicht ändern, mithin muß

$$r_1\left(x;\ y_1, y_2, \cdots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right)$$
$$= r_1\left(x;\ Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \frac{dY_1}{dx}, \frac{dY_2}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}Y_n}{dx^{n-1}}\right)$$

sein, wobei wir durch Beifügung des Arguments x die Abhängigkeit der aus Σ stammenden Koeffizienten von der Variablen x andeuteten. Im besonderen folgt für die Stelle x_0

$$r_1(x_0;\ y_{10}^0, y_{20}^0, \cdots, y_{n0}^0, y_{11}^0, y_{21}^0, \cdots, y_{nn-1}^0)$$
$$= r_1(x_0;\ Y_{10}^0, Y_{20}^0, \cdots, Y_{n0}^0, Y_{11}^0, Y_{21}^0, \cdots, Y_{nn-1}^0).$$

Betrachtet man $r_1(x_0;\ Y_{10}^0, Y_{20}^0, \cdots, Y_{n0}^0, Y_{11}^0, Y_{21}^0, \cdots, Y_{nn-1}^0)$ als gebrochene rationale Funktion der n^2 willkürlichen Konstanten $Y_{10}^0, Y_{20}^0, \cdots, Y_{n0}^0, Y_{11}^0, Y_{21}^0, \cdots, Y_{nn-1}^0$, so verschwinden die im Nenner auftretenden Koeffizienten infolge der Wahl von x_0 nicht. Man kann daher in dem Nenner, der eine ganze rationale Funktion der n^2 Größen $Y_{10}^0, Y_{20}^0, \cdots, Y_{n0}^0, Y_{11}^0, Y_{21}^0, \cdots, Y_{nn-1}^0$ ist, für die soeben genannten n^2 Größen auf unendlich viele Arten Zahlen setzen, sodaß der Nennerausdruck nicht verschwindet. (Vgl. etwa H. Weber, Algebra, [zweite Auflage, Braunschweig 1898] Bd. 1, S. 147). Hierdurch wird ausgeschlossen, daß die Funktion r_1 infolge Verschwindens ihres Nenners an der Stelle x_0 unendlich wird. Da nun x_0 für alle in

$$r_1\left(x;\ y_1, y_2, \cdots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right)$$

auftretenden Funktionen eine reguläre Stelle ist, so hat

$$r_1(x_0;\ Y_{10}^0, Y_{20}^0, \cdots, Y_{n0}^0, Y_{11}^0, Y_{21}^0, \cdots, Y_{nn-1}^0)$$

einen wohlbestimmten endlichen Wert, wenn man nur $Y_{10}^0, Y_{20}^0, \cdots, Y_{n0}^0, Y_{11}^0, Y_{12}^0, \cdots, Y_{nn-1}^0$, was auf unendlich viele Arten möglich ist, derartig wählt, daß der Nenner von Null verschieden ausfällt. Der Wert $r_1(x_0; Y_{10}^0, Y_{20}^0, \cdots, Y_{n0}^0, Y_{11}^0, Y_{21}^0, \cdots, Y_{nn-1}^0)$ ändert sich aber nach Voraussetzung nicht, welche willkürliche Werte man auch immer den n^2 Größen $Y_{10}^0, Y_{20}^0, \cdots, Y_{n0}^0, Y_{11}^0, Y_{21}^0, \cdots, Y_{nn-1}^0$ beilegt; hieraus folgt, daß

$$r_1(x_0; Y_{10}^0, Y_{20}^0, \cdots, Y_{n0}^0, Y_{11}^0, Y_{21}^0, \cdots, Y_{nn-1}^0)$$

überhaupt nicht von $Y_{10}^0, Y_{20}^0, \cdots, Y_{n0}^0, Y_{11}^0, Y_{21}^0, \cdots, Y_{nn-1}^0$ abhängt. Mithin ist, da ja x_0, abgesehen von isolierten Punkten, jede Stelle des Bereiches S sein kann, $r_1\left(x; y_1, y_2, \cdots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right)$ frei von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und deren Abgeleiteten, also eine Funktion aus Σ.

Wir benötigen noch folgenden weiteren Hilfssatz:

(2) Es seien $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ und $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ zwei Systeme von je m rationalen Funktionen von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und deren Ableitungen mit Koeffizienten aus Σ. Die zwei Funktionensysteme mögen sich, falls $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ein bestimmtes Fundamentalsystem der linearen homogenen Differentialgleichung $A = 0$ bedeuten, bei allen linearen homogenen Substitutionen der $y_1, y_2, \cdots, y_n$ linear homogen mit konstanten Koeffizienten kogredient zueinander transformieren. Verschwindet die Wronskische Determinante der Funktionen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ nicht, so besteht, wie wir behaupten, ein System von Gleichungen

$$\eta_i = r_0(x)\,\zeta_i + r_1(x)\,\frac{d\zeta_i}{dx} + r_2(x)\,\frac{d^2\zeta_i}{dx^2} + \cdots + r_{m-1}(x)\,\frac{d^{m-1}\zeta_i}{dx^{m-1}},$$

wobei $r_0(x), r_1(x), r_2(x), \cdots, r_{m-1}(x)$ Funktionen aus dem Rationalitätsbereich Σ bedeuten.

Da die Wronskische Determinante der Größen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ nach Voraussetzung von Null verschieden ist, so findet man durch Auflösen der Gleichungen

$$\eta_i = r_0(x)\zeta_i + r_1(x)\frac{d\zeta_i}{dx} + r_2(x)\frac{d^2\zeta_i}{dx^2} + \cdots + r_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}\zeta_i}{dx^{m-1}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

die Funktionen r_k als Determinantenquotienten, $r_k = \frac{D_k}{D}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$; hierbei ist D die Wronskische Determinante von $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ und D_k geht aus D hervor, wenn man in der $(k+1)^{\text{ten}}$ Kolonne von D die Größen $\frac{d^k\zeta_i}{dx^k}(i = 1, 2, \cdots, m)$ durch $\eta_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ ersetzt. Bei linearer homogener Transformation der $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ transformieren sich ihre Abgeleiteten kogredient, wie dies nach Voraussetzung auch für $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ zutrifft. Bei linearer homogener Transformation der Größen $y_1, y_2, \cdots, y_n$, die solche der Größen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ und $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ zur Folge haben soll, multiplizieren sich daher Zähler und Nenner von $\frac{D_k}{D}$ mit der Substitutionsdeterminante der Funktionen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$; mithin ändert sich hierbei der Quotient $\frac{D_k}{D}$ überhaupt nicht. Da $\frac{D_k}{D}$ eine rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ ist, so folgt nach dem Hilfssatz unter (1), daß die Funktionen $r_k = \frac{D_k}{D}$ $(k=0,1,2,\cdots,m-1)$ Funktionen des Rationalitätsbereiches Σ sind. Hiermit ist der Hilfssatz unter (2) bewiesen.

Auch bei diesem Satze ist, wie ich noch hervorheben möchte, nicht vorausgesetzt, daß sich $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ bezw. $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ für beliebige Größen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ linear homogen transformieren sollen, sondern nur für solche Größen $y_1, y_2, \cdots, y_n$, die ein bestimmtes Fundamentalsystem von Integralen von $A = 0$ sind.

§ 2.

Wir wenden uns nun zu dem Beweis des in der Einleitung angegebenen Hauptsatzes I. Die lineare homogene Differentialgleichung $A = 0$ sei nach Voraussetzung so beschaffen, daß $A = BC$ ist. Es seien $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $A = 0$, und zwar seien diese so gewählt, daß die ersten l von ihnen $y_1, y_2, \cdots, y_l$ ein Fundamentalsystem der linearen homogenen Differentialgleichung $C(y) = 0$ bilden. Aus der Zerlegung $A = BC$ schließen wir, daß $B = 0$ durch die $m = n - l$ Funktionen $C(y_{l+1}), C(y_{l+2}), \cdots, C(y_n)$ befriedigt wird. Diese bilden ein Fundamentalsystem von $B = 0$; denn sie sind linear unabhängig, weil sonst $C(y) = 0$ außer den Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_l$ noch ein von diesen linear unabhängiges Integral in Form einer linearen homogenen Kombination von $y_{l+1}, y_{l+2}, \cdots, y_n$ besitzen würde.

Die lineare homogene Differentialgleichung $A_1 = 0$ soll mit $A = 0$ von derselben Art sein. Gibt

$$P(y) = p_0(x)\, y + p_1(x) \frac{dy}{dx} + \cdots + p_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

die Beziehung, welche den Übergang von den Integralen von $A = 0$ zu denen von $A_1 = 0$ vermittelt, so hat $A_1 = 0$ die Funktionen $P(y_1), P(y_2), \cdots, P(y_n)$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen. Mit Hilfe der ersten l Funktionen bilden wir die lineare homogene Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} z & P(y_1) & P(y_2) & \cdots & P(y_l) \\ \frac{dz}{dx} & \frac{dP(y_1)}{dx} & \frac{dP(y_2)}{dx} & \cdots & \frac{dP(y_l)}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^l z}{dx^l} & \frac{d^l P(y_1)}{dx^l} & \frac{d^l P(y_2)}{dx^l} & \cdots & \frac{d^l P(y_l)}{dx^l} \end{vmatrix} = 0.$$

Dividiert man durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung in z, der als Wronskische Determinante der l linear unabhängigen Funktionen $P(y_1), P(y_2), \cdots, P(y_l)$ nicht verschwindet, so hat man eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ; die lineare homogene Differentialgleichung $C=0$ hat nämlich $y_1, y_2, \cdots, y_l$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen und besitzt Koeffizienten aus Σ, während die Faktoren von $z, \frac{dz}{dx}, \cdots, \frac{d^l z}{dx^l}$ offenbar rationale Funktionen von $y_1, y_2, \cdots, y_l$ sind, die sich als Determinantenquotienten bei linearer homogener Transformation von $y_1, y_2, \cdots, y_l$ nicht ändern und demnach Funktionen des Rationalitätsbereiches Σ sind. Die so gewonnene lineare homogene Differentialgleichung l^{ter} Ordnung mit Koeffizienten aus Σ und dem Fundamentalsystem $P(y_1), P(y_2), \cdots, P(y_l)$ von Integralen bezeichnen wir mit $C_1 = 0$. Da die lineare homogene Differentialgleichung $A_1 = 0$ die Funktionen $P(y_1), P(y_2), \cdots, P(y_n)$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen hat, so muß sich A_1 zerlegen lassen in $A_1 = B_1 C_1$, wobei B_1 ebenso wie A_1 und C_1 auch nur Koeffizienten aus Σ hat. Die lineare homogene Differentialgleichung $B_1 = 0$ hat jetzt

$$C_1(P(y_{l+1})),\ C_1(P(y_{l+2})), \cdots, C_1(P(y_n))$$

zu einem Fundamentalsystem von Integralen.

Bedeuten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ irgend n Konstanten, so ist ersichtlich, da wir lineare homogene Differentialausdrücke vor uns haben:

$$\begin{aligned} & C_1(P(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n)) \\ = \ & C_1(\lambda_1 P(y_1) + \lambda_2 P(y_2) + \cdots + \lambda_n P(y_n)) \\ = \ & \lambda_1 C_1(P(y_1)) + \lambda_2 C_1(P(y_2)) + \cdots + \lambda_n C_1(P(y_n)). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird aber, da die Funktionen

$$P(y_1),\ P(y_2), \cdots, P(y_l)$$

Integrale von $C_1 = 0$ sind, gleich

$$\lambda_{l+1} C_1(P(y_{l+1})) + \lambda_{l+2} C_1(P(y_{l+2})) + \cdots + \lambda_n C_1(P(y_n)).$$

Ebenso wird, da C ein linearer homogener Differentialausdruck ist und die Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_l$ der linearen homogenen Differentialgleichung $C = 0$ genügen:

$$\begin{aligned} & C(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n) \\ = \ & \lambda_1 C(y_1) + \lambda_2 C(y_2) + \cdots + \lambda_n C(y_n) \\ = \ & \lambda_{l+1} C(y_{l+1}) + \lambda_{l+2} C(y_{l+2}) + \cdots + \lambda_n C(y_n). \end{aligned}$$

Wir können daher sagen: Bei linearer homogener Transformation der $y_1, y_2, \cdots, y_n$ transformieren sich die zwei Funktionensysteme

$$C(y_{l+1}),\ C(y_{l+2}),\ \cdots,\ C(y_n)$$

und

$$C_1(P(y_{l+1})),\ C_1(P(y_{l+2})),\ \cdots,\ C_1(P(y_n))$$

in kogredienter Weise; sie verhalten sich also wie die Funktionen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$ und $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ bei dem Hilfssatze unter (2) in § 1. Mithin ergeben sich die Relationen

$$C_1(P(y_i))$$
$$= r_0(x)\, C(y_i) + r_1(x) \frac{d}{dx} C(y_i) + r_2(x) \frac{d^2 C(y_i)}{dx^2} + \cdots + r_{m-1}(x) \frac{d^{m-1} C(y_i)}{dx^{m-1}},$$

wobei

$$m = n - l, \quad i = l + 1,\ l + 2, \cdots, n$$

ist und $r_0(x), r_1(x), \cdots, r_{m-1}(x)$ Funktionen aus dem Rationalitätsbereich Σ bedeuten. Die eben gewonnenen Gleichungen besagen aber, da $C(y_{l+1}), C(y_{l+2}), \cdots, C(y_n)$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $B = 0$ und $C_1(P(y_{l+1})), C_1(P(y_{l+2})), \cdots, C_1(P(y_n))$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $B_1 = 0$ sind, daß die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $B = 0$ und $B_1 = 0$ von derselben Art sind. Hiermit ist der in der Einleitung angegebene Satz I völlig bewiesen.

§ 3.

Der lineare homogene Differentialausdruck A sei in irreduzible Faktoren $A = Q_\lambda Q_{\lambda-1} Q_{\lambda-2} \cdots Q_1$ zerlegt. Ist $A = 0$ und $A_1 = 0$ von derselben Art, so kann man, wie sich durch wiederholte Anwendung unseres Satzes I ergibt, für A_1 die Zerlegung $A_1 = \overline{Q}_\lambda \overline{Q}_{\lambda-1} \overline{Q}_{\lambda-2} \cdots \overline{Q}_1$ herleiten, wobei stets zwei irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen $Q_i = 0$ und $\overline{Q}_i = 0$ mit gleichen Indizes $i\,(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$ von derselben Art sind. Eine Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreduzible Faktoren ist durchaus nicht eindeutig. Es sei A_1 noch auf irgend eine Weise in irreduzible Faktoren zerlegt: $A_1 = R_\lambda R_{\lambda-1} \cdots R_1$. Nach einem früheren Satz von mir (Math. Ann. 56, S. 565 und 62, S. 116) war dies nur derartig möglich, daß sich die λ irreduziblen Differentialgleichungen

$$\overline{Q}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \lambda)$$

und die λ irreduziblen Differentialgleichungen

$$R_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \lambda)$$

einander in einer gewissen Reihenfolge eineindeutig zuordnen lassen und zwei zugeordnete lineare homogene Differentialgleichungen immer von derselben Art sind. Da zwei lineare homogene Differentialgleichungen derselben Ordnung, die mit einer dritten von derselben Art sind, es auch untereinander sind, so folgt der Satz:

II. *Wie auch immer die linken Seiten zweier linearer homogener Differentialgleichungen, die von derselben Art sind, in irreduzible Faktoren zerlegt werden, stets kann man die Faktoren einer jeden Zerlegung des einen Differentialausdruckes den Faktoren einer jeden Zerlegung des anderen Differentialausdruckes eineindeutig zuordnen, sodaß immer die zwei durch Nullsetzen der zugeordneten Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen gegenseitig von derselben Art sind.*

Da jede lineare homogene Differentialgleichung als mit sich selbst von derselben Art angesehen werden kann, so enthält der Satz II das Theorem über die verschiedenartig möglichen Zerlegungen eines einzelnen linearen homogenen Differentialausdruckes in irreduzible Faktoren als Spezialfall.

Ein linearer homogener Differentialausdruck A kann auch in *größte vollständig reduzible Faktoren* zerlegt werden. (Math. Ann. 62, S. 112); es sei $A = V_\varrho V_{\varrho-1} \cdots V_1$ eine derartige Zerlegung, wobei $V_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, \varrho)$ demnach vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen sind. Ist $A_1 = 0$ eine lineare homogene Differentialgleichung, die mit $A = 0$ von derselben Art ist, so ergibt sich mit Hilfe des Satzes I leicht, daß man A_1 in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegen kann, nämlich $A_1 = \overline{V}_\varrho \overline{V}_{\varrho-1} \cdots \overline{V}_1$, wobei stets zwei vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen $V_i = 0$ und $\overline{V}_i = 0$ mit gleichen Indizes i $(i = 1, 2, \cdots, \varrho)$ von derselben Art sind. Ist $A_1 = 0$ noch auf irgend eine Weise in größte vollständig reduzible Faktoren $A_1 = W_\varrho W_{\varrho-1} \cdots W_1$ zerlegt, so müssen nach einem früher von mir gefundenen Satz stets die Differentialgleichungen $\overline{V}_i = 0$ und $W_i = 0$ mit gleichen Indizes i $(i = 1, 2, \cdots, \varrho)$ von derselben Art sein.*) Da zwei lineare homogene Differentialgleichungen, die mit einer dritten von derselben Art sind, es auch untereinander sind, so ergibt sich der Satz:

III. *Wie auch immer die linken Seiten zweier linearer homogener Differentialgleichungen, die von derselben Art sind, in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt werden, stets enthält jede Zerlegung gleich viele größte vollständig reduzible Faktoren, und diese sind stets der Reihe nach einander so zugeordnet, daß immer zwei durch Nullsetzen zugeordneter größter vollständig reduzibler Faktoren sich ergebende lineare homogene Differentialgleichungen von derselben Art sind.*

Analog zu dem Schlußsatz meiner Arbeit in den Math. Ann. 62, S. 117 kann man auch folgenden Satz aussprechen:

---

*) Für die Zerlegung eines einzelnen Differentialausdruckes in größte vollständig reduzible Faktoren findet sogar eine noch weitergehende, besonders einfache Beziehung statt, die ich als Ähnlichkeit bezeichnete (Math. Ann. 62, S. 95 und 62, S. 112).

IV. *Hat man zwei lineare homogene Differentialgleichungen, die von derselben Art sind, und zerlegt man die linke Seite der einen in irreduzible Faktoren, so sind die durch Nullsetzen der Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen mit denjenigen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen von derselben Art, die sich ergeben, wenn man zunächst die linke Seite der einen oder der anderen Differentialgleichung irgendwie in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt und alsdann jeden vollständig reduziblen Faktor noch weiter in irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen zerlegt.*

Freiburg i. B., Mai 1910.