Mittelwertbildung und Reihentransformation.

Von

Konrad Knopp in Königsberg i. Pr.

In der vorstehenden gleichbetitelten Arbeit hat Herr Jacobsthal zwei interessante Resultate gefördert. Er hat zunächst zu der von Euler herrührenden klassischen Reihentransformation

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}a_\nu = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\Delta^{k-1}a_1 \text{ [1]}$$

einen neuen Zugang gefunden und dabei die wenig bekannte Tatsache wieder bewiesen, daß sie bei *jeder* konvergenten Reihe $\sum(-1)^{\nu-1}a_\nu$ — mit reellen oder komplexen Gliedern — erlaubt ist. Sodann hat er die folgende, insbesondere für die numerische Behandlung bestimmter sogleich zu nennender Reihentypen vorteilhafte Entdeckung gemacht: Sind

$$s_n = s_n^{(1)} = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1}a_n, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

die Teilsummen der Reihe $\sum(-1)^{\nu-1}a_\nu$, stellt man diesen noch das Glied $s_0 = s_0^{(1)} = 0$ voran und setzt nun, unter $p_1, p_2, \dots$ *irgendwelche* ganze Zahlen $\geqq 2$ verstehend, nacheinander erst

$$s_n^{(2)} = \frac{s_n^{(1)} + s_{n+1}^{(1)} + \dots + s_{n+p_1-1}^{(1)}}{p_1}, \qquad (n = 0, 1, \dots),$$

und dann weiter allgemein

$$s_n^{(k+1)} = \frac{s_n^{(k)} + s_{n+1}^{(k)} + \dots + s_{n+p_k-1}^{(k)}}{p_k}, \quad \begin{cases} k = 2, 3, \dots, \\ n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

---

[1]) Ich setze, wie in der Reihenlehre meist üblich, $\Delta^0 a_\nu = a_\nu$ und für $k \geqq 1$

$$\Delta^k a_\nu = \Delta^{k-1}a_\nu - \Delta^{k-1}a_{\nu+1} = a_\nu - \binom{k}{1}a_{\nu+1} + \binom{k}{2}a_{\nu+2} \dots + (-1)^k\binom{k}{k}a_{\nu+k}.$$

so sind in der Matrix

$$(\mathrm{M})\qquad \begin{vmatrix} s_0^{(1)} & s_0^{(2)} & \dots & s_0^{(k)} & \dots \\ s_1^{(1)} & s_1^{(2)} & \dots & s_1^{(k)} & \dots \\ s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & \dots & s_2^{(k)} & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \\ . & . & \dots & . & \dots \end{vmatrix}$$

die aufeinander folgenden Spalten unter bestimmten Voraussetzungen immer besser werdende Approximationsfolgen für die Summe s der Reihe $\sum (-1)^{\nu-1} a_\nu$. Diese Voraussetzungen sind folgende: *Die Zahlen a_ν sollen positiv und r-fach bzw. vollmonoton sein.* Dabei nennt Herr Jacobsthal die Folge $(a_1, a_2, \dots)$ mehrfach monoton, wenn sie selbst und ihre aufeinander folgenden Differenzenreihen

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_\nu & \dots \\ \Delta a_1 & \Delta a_2 & \Delta a_3 & \dots & \Delta a_\nu & \dots \\ \Delta^2 a_1 & \Delta^2 a_2 & \Delta^2 a_3 & \dots & \Delta^2 a_\nu & \dots \\ . & . & . & \dots & . & \dots \\ . & . & . & \dots & . & \dots \end{array}$$

nur positive Glieder enthalten; und zwar heißt sie *r-fach monoton,* wenn genau die ersten r Differenzenreihen nur positive Glieder enthalten, und *vollmonoton,* wenn dies bei *allen* Differenzenreihen der Fall ist. Dann lautet sein wesentliches Ergebnis genauer:

Ist $(a_1, a_2, \dots)$ eine r-fach (bzw. voll-) monotone Nullfolge, so streben die Glieder der ersten r (bzw. aller) Spalten der Matrix M *alternierend*[2]) *gegen den Grenzwert s.*

Diese beiden Ergebnisse aber sind auf einem Wege hergeleitet, der mir der Einfachheit derselben nicht ganz angemessen erscheint. Im folgenden will ich zeigen, daß die genannten (und darüber noch etwas hinausgehende) Resultate, sich in der leichtesten Weise ergeben, wenn man die Fragestellung ein klein wenig verändert[3]).

[2]) Die genaue Erklärung dieser Bezeichnung wird weiter unten gegeben.

[3]) Herr Jacobsthal braucht und beweist auf dem von ihm eingeschlagenen Wege u. a. noch den Satz, *daß in der Matrix* M *auch die Glieder der ersten Zeile $s_0^{(k)} \to s$ streben, und zwar unter der alleinigen Voraussetzung, daß die Glieder der ersten Spalte $s_n^{(1)} \to s$ streben.* Diesen an sich sehr interessanten Satz kann man ganz kurz so beweisen: Wie üblich erkennt man zunächst, daß es genügt, den Satz für $s = 0$ zu beweisen. Versteht man dann unter ε_n den größten der unter den Zahlen $|s_n^{(1)}|$, $|s_{n+1}^{(1)}|$, $|s_{n+2}^{(1)}|, \dots$ vorkommenden Werte und bildet nun, von diesen Zahlen ε_n (an

I. Die Eulersche Transformation.

Ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}a_\nu$ *konvergent mit der Summe* s, *so gilt (bei sonst beliebigen komplexen* a_ν*) das gleiche auch von der Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,\Delta^{k-1}a_1.$$

Beweis. Bezeichnet man die Teilsummen der gegebenen Reihe mit s_n, die der transformierten Reihe mit S_n, so ist zunächst

$$\text{(a)}\qquad S_n=\frac{\binom{n}{0}s_0+\binom{n}{1}s_1+\dots+\binom{n}{n}s_n}{2^n}\,[4].$$

In der Tat, schreibt man diese Behauptung ausführlicher in der Form

$$2^{n-1}a_1+2^{n-2}\Delta a_1+\dots+2^0\Delta^{n-1}a_1=\binom{n}{1}s_1+\binom{n}{2}s_2+\dots+\binom{n}{n}s_n,$$

so ergibt sich ihre Richtigkeit unmittelbar durch Vergleich der Koeffizienten, mit denen $(-1)^{k-1}a_k$ beiderseits auftritt; denn dieser ist

$$\text{links: }\binom{n-1}{k-1}+2\binom{n-2}{k-1}+2^2\binom{n-3}{k-1}+\dots+2^{n-k}\binom{k-1}{k-1},$$

$$\text{rechts: }\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}+\dots+\binom{n}{n}.$$

Und daß diese beiden Ausdrücke einander gleich sind, ist eine elementare Tatsache aus der Lehre von den Binomialkoeffizienten.

Daß nun aus $s_n\to s$ nach (a) sofort auch $S_n\to s$ folgt, ergibt sich jetzt in üblicher Weise so: Setzt man $s_\nu=s+\varepsilon_\nu$, so ist

$$\text{(b)}\qquad S_n=s+\frac{\binom{n}{1}\varepsilon_0+\binom{n}{1}\varepsilon_1+\dots+\binom{n}{n}\varepsilon_n}{2^n}$$

Stelle der s_n) ausgehend, eine genau analoge Matrix M′, doch so, daß dabei die ganzen Zahlen $p_1, p_2, \dots$ *sämtlich* gleich 2 genommen werden, so sieht man sofort, daß für alle Indexpaare $|s_n^{(k)}|\leqq\varepsilon_n^{(k)}$, speziell also $|s_0^{(k)}|\leqq\varepsilon_0^{(k)}$ ist. Es genügt jetzt also, die Beziehung $\varepsilon_0^{(k)}\to 0$ zu beweisen. Da aber, wie man sofort nachrechnet,

$$\varepsilon_0^{(k)}=\frac{\binom{k}{0}\varepsilon_0+\binom{k}{1}\varepsilon_1+\dots+\binom{k}{k}\varepsilon_k}{2^k}$$

ist, so folgt dies wörtlich ebenso wie weiter unten im Text das entsprechende bei der Gleichung I, (b).

[4]) Die Entdeckung dieses einfachen Zusammenhanges zwischen den Teilsummen der gegebenen Reihe und denen der transformierten scheint mir das wichtigste an den §§ 1 und 2 der Jacobsthalschen Arbeit. Er gelangt aber zu ihr auf einem sehr weiten Umwege und benützt sie auch nicht zum Beweis für die Gültigkeit der Transformation.

und es genügt zu zeigen, daß der letzte Quotient $\to 0$ strebt. Ist aber $\varepsilon > 0$ gegeben, so kann man m so groß wählen, daß für $\nu > m$ stets $|\varepsilon_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist; dann ist für $n > m$

$$|S_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{\binom{n}{0}\varepsilon_0 + \binom{n}{1}\varepsilon_1 + \dots + \binom{n}{m}\varepsilon_m}{2^n} \right|.$$

Da nun weiter für jedes feste $\nu = 0, 1, \dots, m$ ersichtlich $\frac{1}{2^n}\binom{n}{\nu}\varepsilon_\nu \to 0$ strebt, so kann man jetzt $n_0 > m$ so wählen, daß für $n > n_0$

$$|S_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ist. Damit ist schon alles bewiesen.

II. Die Mittelbildungen.

Noch wesentlich leichter ergibt sich das zweite der eingehend genannten Resultate. Zur bequemen Formulierung sage ich, ähnlich wie Herr Jacobsthal, von einer gegen x konvergierenden Folge $(x_0, x_1, \dots)$, daß sie sich *alternierend* ihrem Grenzwert nähert, wenn die Fehler $(x - x_n)$ abwechselnde Vorzeichen haben.

Dann gelten die folgenden drei Sätze:

Satz 1. *Es sei $(a_1, a_2, \dots)$ eine r-fach monotone Nullfolge $(r \geqq 1)$ und also $\sum (-1)^{\nu-1} a_\nu$ eine konvergente Reihe, in der sich die Teilsummen*

$$s_0 = 0, \quad s_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n, \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

ihrem Grenzwert s, der Summe der Reihe, alternierend nähern. Dann bilden die absoluten Beträge der Fehler, also die Zahlen

$$t_n = (-1)^n (s - s_n), \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

eine $(r-1)$-fach monotone Folge[5]) *und in der $(r-1)$-ten Differenzenreihe bilden noch die geradstelligen und ungeradstelligen Glieder für sich eine (einfach) monotone Folge.*

Beweis. Es ist

$$t_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - + \dots,$$

also

$$\Delta^\lambda t_n = \Delta^\lambda a_{n+1} - \Delta^\lambda a_{n+2} + \dots;$$

[5]) Unter einer 0-fach monotonen Zahlenfolge hat man hier konsequenterweise nur zu verstehen, daß die Folge *positive* Glieder hat.

und da für $\lambda = 0, 1, \ldots, r-1$ die Folge $(\Delta^\lambda a_1, \Delta^\lambda a_2, \ldots)$ monoton ist, so ist für diese λ sicher $\Delta^\lambda t_n > 0$. Da ferner hiernach

$$\Delta^\lambda t_n - \Delta^\lambda t_{n+2} = \Delta^\lambda a_{n+1} - \Delta^\lambda a_{n+2}$$

auch noch für $\lambda = r-1$ etwas positives liefert, so ist auch der zweite Teil des Satzes schon bewiesen.

Satz 2. *Es nähere sich die Folge $(x_0, x_1, \ldots)$ alternierend ihrem Grenzwerte x und so, daß die absoluten Beträge der Fehler*

$$y_n = (-1)^n (x - x_n)$$

eine q-fach monotone Folge bilden; und es sei p eine ganze Zahl $\geqq 2$. Dann konvergieren auch die arithmetischen Mittel

$$x'_n = \frac{x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{n+p-1}}{p}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

alternierend gegen x und zwar so, daß jetzt die absoluten Beträge der Fehler

$$y'_n = (-1)^n (x - x'_n)$$

eine $(q-1)$-fach monotone Folge bilden.

Beweis. Es ist

$$y'_n = \frac{y_n - y_{n+1} + y_{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1} y_{n+p-1}}{p}$$

und also

$$p\,\Delta^\lambda y'_n = \Delta^\lambda y_n - \Delta^\lambda y_{n+1} + \cdots + (-1)^{p-1} \Delta^\lambda y_{n+p-1}.$$

Da nun für $\lambda = 0, 1, \ldots, q-1$ die Folge $(\Delta^\lambda y_0, \Delta^\lambda y_1, \ldots)$ monoton ist, so steht für diese Werte von λ rechterhand etwas positives, — w. z. b. w.[6]).

Satz 3. *Ist unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes die q^{te} Differenzenreihe der y_n so beschaffen, daß in ihr noch die geradstelligen und die ungeradstelligen Glieder für sich eine monotone Folge bilden, so gilt das gleiche von der $(q-1)$-ten Differenzenreihe der y'_n.*

Beweis. Nach dem vorigen Beweis ist für $\lambda = q-1$

$$\begin{aligned} p(\Delta^\lambda y'_n - \Delta^\lambda y'_{n+2}) &= (\Delta^\lambda y_n - \Delta^\lambda y_{n+1}) + (-1)^{p-1}(\Delta^\lambda y_{n+p} - \Delta^\lambda y_{n+p+1}) \\ &= \Delta^q y_n + (-1)^{p-1} \Delta^q y_{n+p}, \end{aligned}$$

und hier stehen nun für ungerades p zwei positive Summanden und für gerades p eine nach Voraussetzung noch positive Differenz, also in jedem Falle etwas positives, — w. z. b. w.

---

[6]) Da hiernach evidenterweise stets $y'_n < \frac{y_n}{p}$ ist, so liefert die Folge x'_n bei gleichem Index jedesmal eine mindestens p-mal so gute Approximation für x als die Folge x_n.

In diesen einfachen und durchsichtigen Sätzen ist aber das zweite der einleitend genannten Ergebnisse vollauf enthalten. Denn ist $(a_1, a_2, \ldots)$ eine r-fach monotone Nullfolge, so bestimmt zunächst Satz 1 das Verhalten der Folge $(s_0, s_1, \ldots)$. Wendet man auf diese Folge dann die Sätze 2 und 3 für $q = r - 1$ und $p = p_1$ an, so ergibt sich ebenso das Verhalten der Folge $(s_0^{(2)}, s_1^{(2)}, \ldots)$; und indem man dieselben Sätze für $q = r - 2$ und $p = p_2$ auf diese neue Folge anwendet, ergibt sich ebenso das Verhalten der Folge $(s_0^{(3)}, s_1^{(3)}, \ldots)$, usw. So ergibt sich der Reihe nach, daß die in den ersten r Spalten der Matrix (M) stehenden Folgen in der Tat sämtlich alternierend gegen ihren Grenzwert s streben [und zwar genauer so, daß die absoluten Fehler $(-1)^n (s - s_n^{(k)})$ bei festem $k = 1, 2, \ldots, r$ eine $(r-k)$-fach monotone Folge bilden], daß jede dieser Folgen eine bessere Approximationsfolge für s bildet als die vorausgehende[7]) und daß in der letzten von ihnen noch die geradstelligen und die ungeradstelligen Glieder für sich eine monotone Folge bilden. Ist aber $(a_1, a_2, \ldots)$ *vollmonoton*, so streben *alle* in den Spalten von (M) stehenden Folgen alternierend gegen s [und zwar so, daß die absoluten Fehler $(-1)^n (s - s_n^{(k)})$ für *jedes* k eine *vollmonotone* Folge bilden] und *jede* dieser Folgen liefert bessere Approximationen[7]) für s als die vorausgehende.

Berlin-Lichterfelde, den 3. Juni 1919.

[7]) Und zwar ist $|s - s_n^{(k)}| < \dfrac{|s - s_n^{(1)}|}{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}$, die Approximation also mindestens 2^{k-1}-mal so gut.

(Eingegangen am 3. Juni 1919.)