Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali e il teorema di permutabilità.

MEMORIA II.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

Nel presente lavoro si semplificano e si completano le ricerche esposte nell'altra Memoria sull'argomento pubblicata nel Vol. XXVII di questi *Annali* (1918) (*).

Lo studio delle trasformazioni di Ribaucour pei sistemi H di Guichard-Darboux ((M), §§ 23, 24) porta alla nozione dei sistemi n^{pli} ortogonali $(\Sigma, \bar{\Sigma})$ con rotazioni ***associate*** β_{ik}, $\bar{\beta}_{ik}$, cioè tali che $\bar{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$. Si stabilisce l'esistenza di particolari trasformazioni di Ribaucour, indicate con T_m, mediante le quali da una coppia (β_{ik}, β_{ki}) di sistemi associati di rotazioni si passa ad altre tali coppie $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, e si dimostra che per queste T_m sussiste un teorema *speciale* di permutabilità. Le attuali T_m costituiscono una generalizzazione delle trasformazioni indicate collo stesso simbolo in (M) (§§ 15, 16), alle quali si riducono nel caso particolare dei sistemi (E) che presentano la simmetria nelle rotazioni: $\beta_{ki} = \beta_{ik}$, $\beta'_{ki} = \beta'_{ik}$. Applicando questi risultati ai sistemi H di Guichard-Darboux, si ottiene per questi sistemi l'effettiva costruzione delle corrispondenti T_m (di cui l'esistenza erasi già stabilita in (M)), mediante l'integrazione di un sistema *lineare* ai differenziali totali, e si prova che anche in questo caso sussiste un teorema speciale di permutabilità. Si estendono poi, nei §§ 10, 11, i risultati ai sistemi H *generalizzati* che trovano i loro associati ancora in uno spazio euclideo, ma con un $d s^2$ indefinito.

Il seguito della Memoria è dedicato alle ricerche analoghe pei sistemi n^{pli}

(*) I richiami a questa Memoria saranno contrassegnati con (M).

ortogonali ***negli spazii a curvatura costante.*** È qui da osservare che, ammettendo questi spazii una rappresentazione conforme sull'euclideo, che conserva le varietà sferiche ed i circoli, risulta già a priori che le proprietà relative alle trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali si trasportano dallo spazio euclideo a quelli di curvatura costante. Ma è interessante stabilirne le formole effettive, che offrono la più stretta analogia con quelle vigenti nello spazio euclideo e conducono per tal modo a nuove classi particolari notevoli di sistemi n^{pli} ortogonali, quali i ***sistemi*** E (§ 14), i ***sistemi*** H (§§ 17, 18), ed i ***sistemi*** Q (§§ 19, 20), per le cui trasformazioni di Ribaucour sussiste ancora un teorema speciale di permutabilità.

§ 1.

Le trasformazioni di Ribaucour per le rotazioni β_{ik}.

Nelle formole stabilite in (M) per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio S_n euclideo ad n dimensioni si distinguono quelle che concernono soltanto le rotazioni β_{ik} dalle altre in cui entrano in considerazione i coefficienti H_i^2 del ds^2, riferito ad un sistema n^{plo} ortogonale Σ cui appartengono quelle rotazioni. Le prime sono comuni a tutti i sistemi trasformati di Combescure di Σ e, dal punto di vista analitico, che qui vogliamo porre in rilievo, sono relative alle trasformazioni del sistema a derivate parziali caratteristico per le rotazioni (M) § 1:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} &= \beta_{il}\beta_{lk} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} &+ \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Una *trasformazione di Ribaucour* delle β_{ik} in nuove soluzioni β'_{ik} del sistema (I) risulta individuata ogniqualvolta si assumano n funzioni (trasformatrici): $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ soddisfacenti al sistema *completamente integrabile* delle equazioni di trasformazione:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \cdot \gamma_k \; (i \neq k). \tag{1}$$

Se si pone

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2, \quad (2) \qquad \Theta_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda, \quad (3)$$

le formole che dànno le nuove rotazioni β'_{ik} sono le (40*) (M) § 7:

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma_i \Theta_k}{A}. \tag{4}$$

Verifichiamo in effetto che questi valori (4) delle β'_{ik} soddisfano alle relative equazioni (I):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_l} = \beta'_{il} \beta'_{lk} \\ &\frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta'_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta'_{\lambda i} \beta'_{\lambda k} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Per questo si cominci dall'osservare che, derivando la Θ_i data dalla (3) rapporto ad u_k $(k \neq i)$, si ha

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k}\right) + \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda,$$

ossia per le (1)

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik}\gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ki}\gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda.$$

Eseguendo le derivazioni colle (I), (1), e raccogliendo i termini, possiamo scrivere

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \gamma_k \left\{ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} \right\} + \beta_{ki} \left\{ \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \beta_{ik}\gamma_i + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda k} \gamma_\lambda \right\};$$

ma a destra il coefficiente di γ_k è nullo per la seconda delle (I) e quello di β_{ki}, secondo la (3), è Θ_k.

Dunque intanto le Θ_i, definite dalla (3), soddisfano al sistema differenziale

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \Theta_k, \tag{6}$$

che è precisamente *l'aggiunto* del sistema (1). D'altra parte, se deriviamo rispetto ad u_i l'espressione (A) definita dalla (2), troviamo

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = 2\gamma_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + 2 \sum_{\lambda}^{(i)} \gamma_\lambda \frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial u_i} = 2\gamma_i \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda \right\},$$

o in fine

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = 2\gamma_i \Theta_i . \tag{7}$$

Con queste formole (6), (7) si verifica subito che le β'_{ik}, definite dalle (4), soddisfano alle (5). E risulta anche facilmente che il passaggio inverso, dalle β'_{ik} alle β_{ik}, è una trasformazione della stessa natura, per la quale le funzioni trasformatrici γ_i debbono sostituirsi colle $\frac{\gamma_i}{A}$ e corrispondentemente le Θ_i con $-\frac{\Theta_i}{A}$.

§ 2.

Le formole del teorema generale di permutabilità.

Prendiamo un secondo sistema di funzioni trasformatrici, che indichiamo con $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$, onde avremo, come per le (1)

$$\frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma'_k .$$

Applicando alle β_{ik} la nuova trasformazione $(\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n)$, e indicando con β''_{ik} le rotazioni trasformate, avremo per le (4)

$$\beta''_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma'_i \Theta'_k}{A'},$$

dove si è posto:

$$A' = \sum_{\lambda} \gamma'^2_\lambda, \quad \Theta'_i = \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma'_\lambda .$$

Le formole del teorema di permutabilità, stabilite in (M) § 10, dimostrano che si ottiene un sistema $(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n)$ di funzioni trasformatrici, pel passaggio dalle rotazioni β'_{ik} ad un quarto nuovo sistema di rotazioni $\overline{\beta}_{ik}$, ove si prenda

$$\Gamma_i = \frac{\tau\,\gamma_i}{A} + \gamma'_i, \tag{8}$$

quando la funzione τ sia determinata con una quadratura (che introduce una costante arbitraria) dalle condizioni:

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2\,\gamma'_i\,\Theta_i. \tag{9}$$

Attualmente, per la verifica analitica, è da osservarsi in primo luogo che le condizioni d'integrabilità di queste (9) sono identicamente soddisfatte, e che dalla derivazione delle (8) risulta subito per le precedenti

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_k} = \beta'_{ik}\,\Gamma_k,$$

le quali formole provano che le $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ sono in effetto funzioni trasformatrici per le β'_{ik}.

Se ora poniamo

$$B = \sum_\lambda \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda, \tag{10}$$

ne risulta derivando

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = \gamma_i\,\Theta'_i + \gamma'_i\,\Theta_i,$$

e per ciò la funzione

$$\tau' = -(\tau + 2B) \tag{11}$$

soddisfa alle equazioni analoghe alle (9)

$$\frac{\partial \tau'}{\partial u_i} = -2\,\gamma_i\,\Theta'_i. \tag{9'}$$

Dunque le funzioni $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_n$ definite in analogia colle (9) da

$$\Gamma'_i = \frac{\tau'\,\gamma'_i}{A'} + \gamma_i \tag{12}$$

saranno funzioni trasformatrici pel passaggio dal sistema (β''_{ik}) di rotazioni ad uno nuovo. Secondo il teorema di permutabilità, quest'ultimo coincide coll'altro $(\overline{\beta}_{ik})$ sopra ottenuto trasformando il sistema (β'_{ik}) colla trasformazione

$(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n)$. Queste proprietà confermiamo ora col calcolo effettivo delle $\overline{\beta}_{ik}$, secondo la formola (4):

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta'_{ik} - \frac{2\,\Gamma_i}{\sum\limits_\lambda \Gamma_\lambda^2}\left\{\frac{\partial \Gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta'_{\lambda k}\,\Gamma_\lambda\right\}. \tag{13}$$

Sostituendo per le Γ_i i valori (8) troviamo

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \frac{A\,A' - \tau\,\tau'}{A},$$

ed anche la formola

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta'_{\lambda k}\,\Gamma_\lambda = \Theta'_k - \frac{\tau'\,\Theta_k}{A}, \tag{14}$$

onde la (13) si cangia nella formola definitiva

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2}{A\,A' - \tau\,\tau'}\left\{A\,\gamma'_i\,\Theta'_k + A'\,\gamma_i\,\Theta_k + \tau\,\gamma_i\,\Theta'_k + \tau'\,\gamma'_i\,\Theta_k\right\}. \tag{15}$$

Ora il secondo membro di questa resta manifestamente invariato se si scambiano le γ_i colle γ'_i, e perciò Θ_i con Θ'_i, A con A' e τ con τ', e ne risulta verificato il teorema di permutabilità.

§ 3.

Le rotazioni associate nei sistemi H di Guichard-Darboux.

Abbiamo chiamato sistemi H di Guichard-Darboux ((M) § 23) quei sistemi n^{pli} ortogonali dell'S_n, pei quali i coefficienti H_i^2 del $d s^2$ soddisfano alla condizione

$$\sum_\lambda H_\lambda^2 = \text{cost.}$$

Ora le rotazioni β_{ik} di siffatti sistemi soddisfano, oltre che alle equazioni generali (I), anche a quelle che ne derivano permutando ivi in ciascuna rotazione β_{ik} i due indici, onde il sistema differenziale per le rotazioni dei sistemi H si scrive

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} &= \beta_{il}\,\beta_{lk} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} &+ \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k} = 0 \\ \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} &+ \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{i\lambda}\,\beta_{k\lambda} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Si è visto (l. c.) che l'integrale generale (β_{ik}) delle (II) dipende da $n\,(n-1)$ *funzioni arbitrarie*, e che ad ogni sua soluzione (β_{ik}) corrispondono in particolare ∞^n sistemi H con quelle rotazioni, che si ottengono integrando il sistema (completo) di equazioni ai differenziali totali

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\,H_k\,, \qquad \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda}\,H_\lambda\,. \tag{16}$$

Essendo le (II) simmetriche nelle rotazioni, ne risulta che, ponendo

$$\bar{\beta}_{ik} = \beta_{ki}\,,$$

anche le $\bar{\beta}_{ik}$ daranno le rotazioni per una classe di nuovi sistemi n^{pli} ortogonali, fra i quali si troveranno in particolare dei sistemi $\bar{H}$ di Guichard-Darboux, definiti dal sistema ai differenziali totali corrispondente alle (16)

$$\frac{\partial \bar{H}_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\bar{H}_k\,, \quad \frac{\partial \bar{H}_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\bar{H}_\lambda\,. \tag{16*}$$

Diremo che le β_{ik} e le $\bar{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$ costituiscono un ***sistema di rotazioni associate*** (β_{ik}, β_{ki}); la ricerca di queste rotazioni associate dipende dall'integrazione del sistema differenziale (II). E diremo ancora ***associati*** due sistemi H, $\bar{H}$ di Guichard-Darboux che corrispondano, secondo le (16), (16*), il primo alle rotazioni β_{ik}, il secondo alle loro associate β_{ki}.

Come si è detto, i teoremi generali permettono di precisare l'esistenza ed il grado di arbitrarietà delle soluzioni (β_{ik}) delle (II). Le trasformazioni di Ribaucour ci daranno ora il modo di dedurre da una soluzione iniziale (β_{ik}) infinite nuove soluzioni (β'_{ik}) con operazioni che consistono soltanto nell'integrazione di un sistema *lineare* (completo) di equazioni ai differenziali totali. Per questo procediamo alla risoluzione del seguente problema: ***Dato un sistema di rotazioni associate*** β_{ik}, $\bar{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$, ***trovarne uno nuovo*** β'_{ik}, $\bar{\beta}'_{ik} = \beta'_{ki}$, ***le cui rotazioni siano legate rispettivamente alle primitive da due trasformazioni di Ribaucour*** $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_n)$.

§ 4.

Le trasformazioni T_m dei sistemi (β_{ik}, β_{ki}) di rotazioni associate.

Cominciamo dall'osservare che le $2n$ funzioni trasformatrici (associate) γ_i, $\overline{\gamma}_i$ debbono soddisfare alle equazioni di trasformazione

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\overline{\gamma}_k, \tag{17}$$

e posto come al § 1

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2, \quad \Theta_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda$$

$$\overline{A} = \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2, \quad \overline{\Theta}_i = \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda}\overline{\gamma}_\lambda,$$

si ha, con notazioni di evidente significato, per la (4)

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma_i\Theta_k}{A}, \quad \overline{\beta}'_{ik} = \overline{\beta}_{ik} - \frac{2\overline{\gamma}_i\overline{\Theta}_k}{\overline{A}} = \beta_{ki} - \frac{2\overline{\gamma}_i\overline{\Theta}_k}{\overline{A}}.$$

Per ciò la condizione del problema enunciato, che debba aversi $\overline{\beta}'_{ik} = \beta'_{ki}$, porta che, per tutte le coppie i, k di indici diversi, si abbia

$$\frac{\Theta_i}{A\overline{\gamma}_i} = \frac{\overline{\Theta}_k}{\overline{A}\gamma_k}.$$

Ciò equivale a dire che, indicando con μ, $\overline{\mu}$ due convenienti fattori di proporzionalità, avremo per tutti i valori dell'indice i

$$\Theta_i = \mu\overline{\gamma}_i, \qquad \overline{\Theta}_i = \overline{\mu}\gamma_i, \tag{18}$$

e inoltre

$$\overline{\mu}A = \mu\overline{A}. \tag{18*}$$

Proviamo subito che questi due fattori μ, $\overline{\mu}$ sono di necessità due costanti m, $\overline{m}$, poichè, derivando le (18) rispetto ad una qualunque u_k, risulta per la (6)

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\mu\,\overline{\gamma}_i) = \beta_{ki}\,.\,\mu\,\overline{\gamma}_k\,, \qquad \frac{\partial}{\partial u_k}(\overline{\mu}\,\gamma_i) = \beta_{ik}\,.\,\overline{\mu}\,\gamma_k\,,$$

indi per le (17): $\frac{\partial \mu}{\partial u_k} = 0$, $\frac{\partial \overline{\mu}}{\partial u_k} = 0$. Si osservi ora che, essendo A, $\overline{A}$ positive, queste due costanti m, $\overline{m}$ hanno lo stesso segno. Ma di più, senza scapito della generalità, possiamo supporle eguali, come risulta dal considerare che se si moltiplicano p. e. tutte le γ_i per un fattore costante b (senza alterare le $\overline{\gamma}_i$) ciò equivale a cangiare m, $\overline{m}$ rispettivamente in $\frac{m}{b}$, $b\,\overline{m}$, onde basta prendere $b^2 = \frac{m}{\overline{m}}$ per raggiungere lo scopo.

Otteniamo adunque la soluzione più generale del problema proposto assoggettando le $2\,n$ incognite $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$ a soddisfare al sistema lineare ai differenziali totali

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma_k\,, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = m\,\overline{\gamma}_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda \\ &\frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\,\overline{\gamma}_k\,, \quad \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} = m\,\gamma_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda}\,\overline{\gamma}_\lambda\,, \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

dove m rappresenta una costante arbitraria, e inoltre, secondo la (18*), alla equazione in termini finiti

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2\,. \tag{III*}$$

Ma dai calcoli stessi sopra eseguiti risulta che il sistema (III) ai differenziali totali è completamente integrabile. Di più, avendosi qui

$$\Theta_i = m\,\overline{\gamma}_i\,, \quad \overline{\Theta}_i = m\,\gamma_i\,,$$

segue dalle (7) § 1: $\frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial u_i} = 2\,m\,\gamma_i\,\overline{\gamma}_i$, e per ciò il sistema differenziale (III) possiede l'integrale quadratico

$$A - \overline{A} = \text{cost.}, \quad \text{o} \quad \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 - \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2 = \text{cost.},$$

e basta quindi disporre dei valori iniziali delle γ_i, $\overline{\gamma}_i$ in guisa da annullare la costante del secondo membro perchè risulti soddisfatta anche la (III*).

Da tutto ciò si conclude: *Dato un sistema di rotazioni associate* (β_{ik}, β_{ki}) *se ne ottengono infiniti nuovi* $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, *integrando il sistema lineare completo ai differenziali totali* (III), *nelle* $2n$ *funzioni incognite* $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$, *coll'aggiunta della condizione ai limiti* (III*); *le nuove rotazioni* β'_{ik} *si calcolano dalle formole*

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2m\gamma_i\overline{\gamma}_k}{A}. \tag{19}$$

Chiameremo T_m una tale trasformazione (di Ribaucour) che dal sistema di rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}) fa nascere il nuovo $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$. È manifesto che in questa T_m entrano (oltre la costante m) precisamente $2n-2$ costanti arbitrarie essenziali. Anche è da osservare che nel passaggio inverso da $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ a (β_{ik}, β_{ki}) le funzioni trasformatrici sono (§ 1)

$$\Gamma_i = \frac{\gamma_i}{A}, \quad \overline{\Gamma}_i = \frac{\overline{\gamma}_i}{A},$$

e siccome si ha

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta'_{\lambda i}\Gamma_\lambda = \frac{1}{A}\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} - \frac{\gamma_i}{A^2}\cdot 2m\gamma_i\overline{\gamma}_i + \sum_\lambda^{(i)}\left(\beta_{\lambda i} - \frac{2m\gamma_\lambda\overline{\gamma}_i}{A}\right)\frac{\gamma_\lambda}{A} =$$

$$= \frac{1}{A}m\overline{\gamma}_i - \frac{2m\overline{\gamma}_i}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = -\frac{m\overline{\gamma}_i}{A},$$

vediamo che: *la trasformazione inversa della* T_m *è una* T_{-m}.

§ 5.

Il teorema speciale di permutabilità per le T_m.

Ad un sistema di rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}) applichiamo due diverse trasformazioni T_m, $T_{m'}$, che lo cangino rispettivamente nei due sistemi di rotazioni associate $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$, e supponiamo di più che *sia* $m'^2 \neq m^2$. Sussiste in questa ipotesi il teorema speciale di permutabilità:

Esiste uno ed un solo quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ *di rotazioni associate, calcolabile in termini finiti, che è legato a* $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ *da una* $T_{m'}$ *e a* $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$ *da una* T_m.

Per dimostrarlo troviamo le formole effettive che individuano il quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ nel modo seguente. Indichiamo, come sopra, con $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$ le funzioni trasformatrici per la T_m che da (β_{ik}, β_{ki}) conduce a $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, e similmente con $(\gamma'_i, \overline{\gamma}'_i)$ quelle per la T'_m da (β_{ik}, β_{ki}) a $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$.

Sussisteranno allora la (III), (III*) per le $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$ e le analoghe per le $(\gamma'_i, \overline{\gamma}'_i)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_k} &= \beta_{ik}\gamma'_k, \quad \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} = m'\overline{\gamma}'_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma'_\lambda \\ \frac{\partial \overline{\gamma}'_i}{\partial u_k} &= \beta_{ki}\overline{\gamma}'_k, \quad \frac{\partial \overline{\gamma}'_i}{\partial u_i} = m'\gamma'_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda}\overline{\gamma}'_\lambda \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

$$\sum_\lambda \gamma'^2_\lambda = \sum_\lambda \overline{\gamma}'^2_\lambda. \tag{IV*}$$

Ora ai tre sistemi di rotazioni (β_{ik}), (β'_{ik}), (β''_{ik}) applichiamo il teorema generale di permutabilità (§ 2), sicchè le trasformatrici $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ pel passaggio dal sistema (β'_{ik}) al quarto $(\overline{\beta}_{ik})$ saranno date dalle (8) § 2:

$$\Gamma_i = \frac{\tau\gamma_i}{A} + \gamma'_i, \tag{20}$$

dove τ è definita con una quadratura dalla (9), la quale, essendo qui $\Theta_i = m\overline{\gamma}_i$, ci dà

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2m\gamma'_i\overline{\gamma}_i. \tag{21}$$

Similmente, indicando con $\overline{\Gamma}_1, \overline{\Gamma}_2, \dots, \overline{\Gamma}_n$ le analoghe trasformatrici dal sistema (β'_{ki}) associato a (β'_{ik}) all'altro $(\overline{\beta}_{ki})$ associato di $(\overline{\beta}_{ik})$, avremo per le formole stesse

$$\overline{\Gamma}_i = \frac{\overline{\tau}\,\overline{\gamma}_i}{A} + \overline{\gamma}'_i, \tag{20*}$$

con $\overline{\tau}$ definito per una quadratura da

$$\frac{\partial \overline{\tau}}{\partial u_i} = -2m\gamma_i\overline{\gamma}'_i. \tag{21*}$$

D'altra parte si passa, per ipotesi, dal sistema di rotazioni associate $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ all'altro $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ mediante una $T_{m'}$ e dovranno quindi sussistere per le Γ_i, $\overline{\Gamma}_i$ le relative formole di trasformazione (III), (III*) § 2; ma queste, per le verifiche già effettuate al § 2, si riducono soltanto alle seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i}+\sum_{\lambda}^{(i)}\beta'_{\lambda i}\,\Gamma_\lambda=m'\,\overline{\Gamma}_i\\ \frac{\partial \overline{\Gamma}_i}{\partial u_i}+\sum_{\lambda}^{(i)}\beta'_{i\lambda}\,\overline{\Gamma}_\lambda=m'\,\Gamma_i\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2=\sum_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda^2.\tag{23}$$

La prima delle (22), calcolata colla (14) § 2, osservando che qui

$$\Theta'_i=m'\,\overline{\gamma}'_i\,,\qquad \Theta_i=m\,\overline{\gamma}_i\,,$$

diventa

$$m'\,\overline{\gamma}'_i-\frac{\tau+2\,B}{A}\,m\,\overline{\gamma}_i=m'\left(\frac{\overline{\tau}\,\overline{\gamma}_i}{A}+\overline{\gamma}'_i\right),$$

e riducendo:

$$m\,\tau+m'\,\overline{\tau}=-\,2\,m\,B\quad \left(B=\sum_\lambda \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda\right).\tag{24}$$

Similmente calcolando la seconda delle (22), si ottiene l'altra

$$m'\,\tau+m\,\overline{\tau}=-\,2\,m\,\overline{B},\ \text{con}\ \overline{B}=\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda\,\overline{\gamma}'_\lambda.\tag{24*}$$

Ora, avendo supposto $m'^2 \neq m^2$, queste due equazioni risolute dànno

$$\left.\begin{aligned}\tau=\frac{2\,m}{m'^2-m^2}\,(m\,B-m'\,\overline{B})\\ \overline{\tau}=\frac{2\,m}{m'^2-m^2}\,(m\,\overline{B}-m'\,B),\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

e così, nell'ipotesi che sussista il teorema di permutabilità, risulta da queste formole determinato *in termini finiti* il quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik},\ \overline{\beta}_{ki})$.

§ 6.

Verifiche generali e caso singolare.

Bisogna ora dimostrare che i valori (25) di τ, $\overline{\tau}$ soddisfano rispettivamente alle (21), (21*), come anche alla (23). La prima cosa risulta subito da ciò che si ha (§ 2)

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = \gamma_i \Theta'_i + \gamma'_i \Theta_i = m' \gamma_i \overline{\gamma}_i + m \overline{\gamma}_i \gamma'_i,$$

e similmente

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial u_i} = m' \overline{\gamma}_i \gamma'_i + m \gamma_i \overline{\gamma}'_i,$$

onde, per le (25), risultano appunto verificate le (21), (21*). Quanto alla (23), si osservi che essendo per le (20), (20*)

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \frac{\tau^2}{A} + \frac{2B\tau}{A} + \sum_\lambda \gamma'^2_\lambda.$$

$$\sum_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda^2 = \frac{\overline{\tau}^2}{A} + \frac{2\overline{B}\,\overline{\tau}}{A} + \sum_\lambda \overline{\gamma}'^2_\lambda,$$

la (23) equivale all'altra

$$\tau^2 - \overline{\tau}^2 + 2B\tau - 2\overline{B}\,\overline{\tau} = 0, \tag{26}$$

che per le (25) risulta un'identità.

A questo punto abbiamo dimostrato che, prendendo per τ, $\overline{\tau}$ i valori (25), le formole (20), (20*) fanno derivare dal sistema di rotazioni associate $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ un quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ *mediante una* $T_{m'}$. Sarà provato il teorema completo di permutabilità se dimostriamo in fine che questo quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ proviene a sua volta dal terzo $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$ *mediante una* T_m. Per questo basta calcolare, secondo la (11) § 2, le quantità

$$\tau' = -(\tau + 2B), \qquad \overline{\tau}' = -(\overline{\tau} + 2\overline{B}),$$

ciò che dà per le (25)

$$\tau' = \frac{2\,m'}{m^2 - m'^2}\,(m'\,B - m\,\overline{B})$$

$$\overline{\tau}' = \frac{2\,m'}{m^2 - m'^2}\,(m'\,\overline{B} - m\,B),$$

le quali formole corrispondono perfettamente alle (25) stesse, scambiata m con m', onde risulta provato l'asserto.

Nelle verifiche ora eseguite per dimostrare il teorema di permutabilità è essenziale l'ipotesi che sia diversa da zero la quantità $m'^2 - m^2$, al denominatore delle (25). Ma anche nel caso *singolare* $m'^2 = m^2$, quando vi si aggiunga una nuova condizione necessaria, continua a sussistere il teorema stesso, come ora andiamo a dimostrare. Supponiamo per fissare le idee $m' = m$, poichè l'altro caso $m' = -m$ si riconduce a questo cangiando di segno tutte le γ'_i (cf. § 4). Riprendendo i calcoli al paragrafo precedente, vediamo dalle equazioni (24), (24*) che in tal caso, se il teorema di permutabilità delle due T_m deve ancora sussistere, dovrà necessariamente verificarsi la condizione $B = \overline{B}$, cioè

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda = \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda\,\overline{\gamma}'_\lambda, \tag{27}$$

e le due (24), (24*) si riducono allora all'unica

$$\tau + \overline{\tau} = -2\,B, \tag{28}$$

soddisfatta la quale è pure verificata la (26). Ora nel caso attuale $m' = m$ si ha

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = \frac{\partial \overline{B}}{\partial u_i} = m\,(\gamma_i\,\overline{\gamma}'_i + \overline{\gamma}_i\,\gamma'_i)$$

e quindi $B - \overline{B} = \text{cost.}$, o

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda - \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda\,\overline{\gamma}'_\lambda = \text{cost.}$$

Scelto adunque il primo sistema trasformato $(\beta'_{ik},\ \beta'_{ki})$, potremo in infiniti modi disporre del secondo $(\beta''_{ik},\ \beta''_{ki})$ in guisa che, annullandosi la costante del secondo membro nella equazione superiore, si trovi verificata la (27). Per abbreviare diremo allora che i due sistemi $(\beta'_{ik},\ \beta'_{ki})$, $(\beta''_{ik},\ \beta''_{ki})$, derivati ambedue da (β_{ik}, β_{ki}) per una T_m, si trovano fra loro *in involuzione*. Supposta questa condizione soddisfatta, e legando τ, $\overline{\tau}$ fra loro colla (28), risultano le (21*) conseguenze delle (21), e quindi in tal caso avremo non più un solo quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ del teorema di permutabilità, ma una serie ∞^1 di tali sistemi, dipendentemente dalla costante arbitraria che resta in τ. Concludiamo: *Nel caso singolare $m' = m$ il teorema di permutabilità per le trasformazioni T_m dei sistemi di rotazioni associate vale soltanto se i due sistemi $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$, derivati ciascuno dall'iniziale (β_{ik}, β_{ki}) per una T_m, si trovano in involuzione, ed in questo caso, in luogo di un solo quarto sistema $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$, se ne ha una serie semplicemente infinita.*

Osserviamo infine che $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$ saranno ancora in involuzione rispetto a $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$, come pure (β_{ik}, β_{ki}), $(\overline{\beta}_{ik}, \overline{\beta}_{ki})$ in involuzione fra loro rispetto a $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, come rispetto a $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$.

§ 7.

Le trasformazioni T_m dei sistemi H di Guichard-Darboux.

Si è già osservato, al § 3, che ad ogni sistema (β_{ik}, β_{ki}) di rotazioni associate appartengono infinite coppie $(H, \overline{H})$ di sistemi n^{pli} ortogonali di Guichard-Darboux *associati* e corrispondenti alle soluzioni: $H_1, H_2, \ldots, H_n$); $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \ldots, \overline{H}_n$ dei sistemi differenziali (16), (16*). Si consideri ora una trasformazione T_m che cangi le rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}) nelle altre $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, mediante le funzioni trasformatrici $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$, soddisfacenti alle (III), (III*) § 4. La trasformazione T_m si può ora facilmente estendere alla coppia $(H, \overline{H})$ di sistemi H associati, che ne verrà convertita in un'altra tale coppia $(H', \overline{H}')$ corrispondente alle nuove rotazioni $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, e questo in modo che H' sia trasformato di Ribaucour di H, medesimamente $\overline{H}'$ di $\overline{H}$. Per questo basterà completare le n funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ coll'aggiunta della $(n+1)^{ma}$ φ, e similmente le $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n$ con una nuova $\overline{\varphi}$, determinando, se sarà possibile, φ, $\overline{\varphi}$ in guisa che soddisfino alle equazioni di trasformazione ((M) § 6)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i, \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_i} = \overline{H}_i \overline{\gamma}_i, \tag{29}$$

e insieme anche alle altre

$$\sum_\lambda H'^2_\lambda = \sum_\lambda H^2_\lambda, \qquad \sum_\lambda \overline{H}'^2_\lambda = \sum_\lambda \overline{H}^2_\lambda, \tag{30}$$

perchè allora i due sistemi H', $\overline{H}'$ trasformati saranno nuovamente della classe di Guichard-Darboux.

Ora si ha in generale ((M) § 6)

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2\varphi}{A}\Theta_\lambda, \quad \overline{H}'_\lambda = \overline{H}_\lambda - \frac{2\overline{\varphi}}{A}\overline{\Theta}_\lambda,$$

e per ciò nel caso nostro

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2m\varphi}{A}\overline{\gamma}_\lambda, \quad \overline{H}'_\lambda = \overline{H}_\lambda - \frac{2m\overline{\varphi}}{A}\gamma_\lambda.$$

Ne deduciamo

$$\sum_\lambda (H'^2_\lambda - H^2_\lambda) = \frac{4m\varphi}{A}(m\varphi - \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda),$$

$$\sum_\lambda (\overline{H}'^2_\lambda - \overline{H}^2_\lambda) = \frac{4m\overline{\varphi}}{A}(m\overline{\varphi} - \sum_\lambda \overline{H}_\lambda \gamma_\lambda),$$

e per soddisfare le (30) bisogna quindi prendere

$$\varphi = \frac{1}{m}\sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda, \quad \overline{\varphi} = \frac{1}{m}\sum_\lambda \overline{H}_\lambda \gamma_\lambda. \tag{31}$$

Ma allora sono anche soddisfatte le (29), come risulta calcolando

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda = \overline{\gamma}_i \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} H_\lambda \right\} + H_i \left\{ \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda} \overline{\gamma}_\lambda \right\}.$$

A destra il coefficiente di H_i, per la seconda delle (III) in prima linea, eguaglia $m\gamma_i$, e quello di $\overline{\gamma}_i$ è nullo per le (16), onde

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda = m H_i \gamma_i,$$

sicchè il valore (31) di φ verifica le (29), e similmente dicasi per $\overline{\varphi}$.

In riguardo alla trasformazione T_m di Ribaucour del sistema H in un nuovo H' (senza considerare gli associati), il risultato può dunque formularsi così: *Si determinino le $2n$ funzioni trasformatrici* (γ_i, $\overline{\gamma}_i$) *in guisa da soddisfare alle equazioni* (III), (III*), *ed alle prime n si aggreghi la* $(n+1)^{ma}$ φ

data da

$$\varphi = \frac{1}{m} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda .$$

Dopo ciò la trasformazione di Ribaucour $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$, *applicata al sistema H di Guichard-Darboux, dà un nuovo sistema H′ pel quale*

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2\, m\, \varphi}{A} \overline{\gamma}_\lambda .$$

È manifesto che queste trasformazioni di Ribaucour dei sistemi H dipendono da $2n - 1$ costanti arbitrarie (m inclusa). Ciò era già riconosciuto in (M) § 24; ma ora la costruzione effettiva risulta notevolmente semplificata, tutto riducendosi all'integrazione del sistema lineare (III).

In fine dimostriamo che per le trasformazioni T_m dei sistemi H sussiste il teorema speciale di permutabilità: *Se ad un sistema H di Guichard-Darboux sono contigui due nuovi H′, H″, per trasformazioni rispettive* T_m, $T_{m'}$ *con* $m'^2 \neq m^2$, *esiste un quarto sistema* $\overline{H}$ *perfettamente determinato, contiguo alla sua volta ad H′ per una* $T_{m'}$ *e ad H″ per una* T_m.

Siano γ_i, $\overline{\gamma}_i$, $\varphi = \frac{1}{m} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda$ le funzioni trasformatrici per la T_m che da H conduce ad H', e medesimamente γ'_i, $\overline{\gamma}'_i$, $\varphi' = \frac{1}{m'} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}'_\lambda$ quelle per la $T_{m'}$ da H ad H''. Per le formole (20), (20*) § 5 abbiamo

$$\Gamma_\lambda = \frac{\tau\, \gamma_\lambda}{A} + \gamma'_\lambda , \quad \overline{\Gamma}_\lambda = \frac{\overline{\tau}\, \overline{\gamma}_\lambda}{A} + \overline{\gamma}'_\lambda ,$$

dove τ, $\overline{\tau}$ hanno i valori dati dalle (25) ibid. Ora, se alle n funzioni trasformatrici $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ aggiungiamo la $(n+1)^{\text{ma}}$ Φ del teorema generale di permutabilità data da ((M) § 10),

$$\Phi = \frac{\tau\, \varphi}{A} + \varphi' ,$$

sarà provato che il quarto sistema $\overline{H}$ dopo (H, H', H'') è ancora un sistema di Guichard-Darboux, se verifichiamo che Φ soddisfa alla sua volta alla equazione corrispondente alle (31)

$$\Phi = \frac{1}{m'} \sum_\lambda H'_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda .$$

Ma questa si scrive

$$m'\left(\frac{\tau\varphi}{A}+\varphi'\right)=\sum_\lambda\left(H_\lambda-\frac{2m\varphi}{A}\overline{\gamma}_\lambda\right)\left(\frac{\tau\overline{\gamma}_\lambda}{A}+\overline{\gamma}'_\lambda\right),$$

ossia sviluppando e riducendo

$$m'\tau+m\overline{\tau}=-2m\overline{B},$$

che coincide colla (24*) ed è quindi in effetto verificata.

Osserviamo anche qui il caso *singolare* $m'^2=m^2$, ove il teorema di permutabilità cade in difetto, a meno che i due sistemi H', H'' si trovino in involuzione, verificandosi la relazione $\sum_\lambda \gamma_\lambda\gamma'_\lambda=\pm\sum_\lambda\overline{\gamma}_\lambda\overline{\gamma}'_\lambda$.

In tal caso è facile vedere che l'intero fascio (H', H'') è composto di sistemi di Guichard-Darboux (*), e lo stesso accade del fascio coniugato del teorema generale di permutabilità (M) § 12.

§ 8.

Caso particolare dei sistemi E.

In una coppia di rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}) può darsi che si abbia in particolare $\beta_{ki}=\beta_{ik}$; allora siamo in presenza di sistemi E di cui trattano i §§ 14-16 in (M). Le trasformazioni studiate al § 15 (M) ed ivi indicate collo stesso simbolo T_m sono appunto casi particolari delle attuali e se ne ottengono assumendo le $\overline{\gamma}_i$ coincidenti colle relative γ_i.

(*) Un sistema generico del fascio corrisponde alle funzioni trasformatrici

$$c_1\gamma_i+c_2\gamma'_i,\quad c_1\overline{\gamma}_i+c_2\overline{\gamma}'_i,\quad c_1\varphi+c_2\varphi'\qquad (c_1,\ c_2 \text{ costanti})$$

e siccome, per le (31) (ove ora $m'=m$), si ha

$$c_1\varphi+c_2\varphi'=\frac{1}{m}\sum_\lambda H_\lambda(c_1\overline{\gamma}_\lambda+c_2\overline{\gamma}'_\lambda),$$

il sistema stesso è di Guichard-Darboux.

Ma, pur partendo da un sistema iniziale E, possiamo anche applicare una generale trasformazione:

$$T_m \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n)$$

senza che le seconde funzioni trasformatrici $\overline{\gamma}_i$ eguaglino le prime γ_i. Per tal modo otterremo dal sistema E coppie di rotazioni associate e *distinte* $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$. Ora applichiamo ai tre sistemi di rotazioni (β_{ik}), (β'_{ik}), (β''_{ik}) il teorema generale di permutabilità (§ 2), e facilmente dedurremo dalla formola (15) ibid. che l'intero fascio a cui E appartiene è costituito di altrettanti sistemi $(\overline{E})$ con $\overline{\beta}_{ik} = \overline{\beta}_{ki}$. Se infatti nella (15) poniamo le $\overline{\gamma}_i$ al posto delle γ'_i, dovremo fare

$$A' = A, \quad \Theta'_i = m\gamma_i, \quad \Theta_i = m\overline{\gamma}_i, \quad \tau' = -(\tau + 2B),$$

e quindi risulterà

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2m}{\tau^2 + 2B\tau + A^2} \left\{ A(\gamma_i \overline{\gamma}_k + \gamma_k \overline{\gamma}_i) + \tau\gamma_i\gamma_k + \tau' \overline{\gamma}_i \overline{\gamma}_k \right\},$$

espressione simmetrica nei due indici i, k.

Dimostriamo ora che nel fascio coniugato ad (E) le rotazioni si distribuiscono come le (β'_{ik}), (β'_{ki}) in coppie di rotazioni associate. E infatti, indicando con a, b due costanti arbitrarie, le funzioni

$$\Gamma_i = a\gamma_i + b\overline{\gamma}_i, \qquad \overline{\Gamma}_i = b\gamma_i + a\overline{\gamma}_i \tag{32}$$

soddisfano manifestamente (a causa di $\beta_{ki} = \beta_{ik}$) alle equazioni (III) § 4, ma anche alla (III*)

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \sum_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda^2,$$

giacchè il primo ed il secondo membro eguagliano l'espressione

$$(a^2 + b^2)A + 2abB.$$

Ora queste funzioni trasformatrici (32) corrispondono appunto alle rotazioni del secondo fascio, che risultano per tal modo distribuite in coppie associate. Si osservi che queste rotazioni associate coincidono solo per $a = b$, e perciò nel fascio coniugato esiste un solo sistema $\overline{\overline{E}}$ corrispondente ad $a = b$, ossia alle trasformatrici

$$\Gamma_i = \overline{\Gamma}_i = \gamma_i + \overline{\gamma}_i.$$

Adunque nel caso attuale: *Dei due fasci coniugati del teorema di permutabilità uno è tutto composto di sistemi E, l'altro ne contiene uno solo $\overline{E}$, mentre gli altri dello stesso fascio si distribuiscono in coppie di sistemi di rotazioni associate.*

Osserviamo ancora che, per costruire questi particolari fasci coniugati, si può prendere ad arbitrio un sistema E del primo fascio ed un qualunque suo trasformato, per una T_m arbitraria, quale sistema $\overline{E}$ del fascio coniugato. E infatti, indicando con $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ le trasformatrici pel passaggio da E ad $\overline{E}$, avremo

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \Gamma_k, \quad \frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} = m \Gamma_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \Gamma_\lambda,$$

e basterà trovare $2n$ funzioni incognite $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$ che soddisfino alle (III), (III*) e di più alle altre

$$\gamma_i + \overline{\gamma}_i = \Gamma_i.$$

Eliminando dalle (III) le $\overline{\gamma}_i = \Gamma_i - \gamma_i$, ne risulta per le γ_i il sistema differenziale

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda = m (\Gamma_i - \gamma_i), \tag{33}$$

mentre la (III*) diventa

$$2 \sum_\lambda \Gamma_\lambda \gamma_\lambda = \sum_\lambda \Gamma_\lambda^2. \tag{34}$$

Ora si riscontra subito che il sistema ai differenziali totali (33) è completamente integrabile, e inoltre ammette l'integrale quadratico

$$2 \sum_\lambda \Gamma_\lambda \gamma_\lambda - \sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \text{cost.},$$

sicchè, per soddisfare anche alla (34), basta scegliere i valori iniziali delle γ_i in guisa da annullare in quest'ultima la costante del secondo membro.

§ 9.

I SISTEMI n^{pli} ORTOGONALI NELLO SPAZIO EUCLIDEO A ds^2 INDEFINITO.

Procediamo ora ad estendere, in un primo modo, la nozione di sistemi n^{pli} ortogonali a rotazioni associate prendendo a considerare, accanto all'ordinario spazio S_n euclideo, col ds^2 rappresentato dalla forma differenziale quadratica *definita positiva* nelle n variabili $x, y, \ldots, t$ ((M) § 1)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \cdots + dt^2,$$

anche le altre forme indefinite

$$ds^2 = \varepsilon_1 dx^2 + \varepsilon_2 dy^2 + \cdots + \varepsilon_n dt^2, \tag{35}$$

dove ciascuna ε_i rappresenta l'unità, positiva o negativa; diremo che la (35) è la forma (a curvatura nulla) di *segnatura* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Se esprimiamo le n variabili $x, y, \ldots, t$ per n nuove $u_1, u_2, \ldots, u_n$, in guisa che la (35) conservi la forma canonica (ortogonale), potremo scrivere, per la legge d'inerzia

$$ds^2 = \varepsilon_1 H_1^2 du_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 du_2^2 + \cdots + \varepsilon_n H_n^2 du_n^2, \tag{36}$$

dove le H_i sono funzioni reali delle $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e la segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ è rimasta la stessa.

Le formole per l'equivalenza delle due forme differenziali (35), (36) si deducono subito analiticamente dalle ordinarie in (M)', nelle quali basterà cangiare H_i in $H_i\sqrt{\varepsilon_i}$. Così adunque, introducendo anche qui le *rotazioni* $\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}$, il sistema differenziale per le β_{ik} sarà:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ &\varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{V}$$

e successivamente quello per le H_i conserverà la solita forma

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k. \tag{V*}$$

Le ***trasformazioni di Ribaucour*** per le rotazioni β_{ik} si otterranno, nel caso attuale, come segue (Cf. § 1).

Prendansi n funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ soddisfacenti al solito sistema differenziale

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k ,$$

e si consideri la quantità

$$A = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \gamma_\lambda^2 ; \tag{37}$$

che in seguito supporremo sempre ***diversa da zero***. Ponendo

$$\Theta_i = \varepsilon_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda ,$$

si troverà subito dalle (V)

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \Theta_k , \quad \frac{\partial A}{\partial u_i} = 2 \gamma_i \Theta_i . \tag{38}$$

Per le rotazioni β'_{ik} del sistema trasformato avremo la stessa formola (4) § 1

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2 \gamma_i \Theta_k}{A} , \tag{39}$$

compiendosi le verifiche nel medesimo modo. Se poi consideriamo un determinato ***sistema n^{plo} ortogonale*** nell'S_n indefinito corrispondente alla forma (36) del ds^2 colle rotazioni β_{ik}, avremo ∞^1 suoi trasformati di Ribaucour determinando, con una quadratura, una $(n+1)^{ma}$ funzione trasformatrice φ dalle equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i , \tag{40}$$

ed assumendo i coefficienti H'_i del sistema trasformato dalla formola

$$H'_i = H_i - \frac{2 \varphi}{A} \Theta_i . \tag{41}$$

§ 10.

I SISTEMI *H* GENERALIZZATI.

Ritorniamo ora ai sistemi n^{pli} ortogonali dell'ordinario spazio S_n e chiamiamo sistemi *H generalizzati* di segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ quei sistemi pei quali i coefficienti H_i^2 sono legati dalla relazione

$$\varepsilon_1 H_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 + \cdots + \varepsilon_n H_n^2 = \text{cost.} \tag{42}$$

Derivando questa rapporto ad u_i si ottiene

$$\varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} H_\lambda = 0 \tag{43}$$

e da questa derivata rapporto ad u_k segue

$$\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ki} H_k) + \varepsilon_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ik} H_k) + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ik} H_\lambda) = 0,$$

e sviluppando

$$H_k \left\{ \varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} \right\} +$$

$$+ \beta_{ik} \left\{ \varepsilon_k \frac{\partial H_k}{\partial u_k} + \varepsilon_i \beta_{ki} H_i + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{k\lambda} H_\lambda \right\} = 0.$$

Ma il secondo termine è nullo per la (43) stessa, onde segue: *Le rotazioni β_{ik} di ogni sistema H di segnatura* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ *soddisfano al sistema differenziale*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} &= \beta_{il} \beta_{lk} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} &= 0 \\ \varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{VI}$$

Come nel caso particolare $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = 1)$ del sistema (II) § 3, si dimostra che l'integrale generale (β_{ik}) del sistema (VI) dipende da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie. Ad ogni sua soluzione (β_{ik}) corrispondono ∞^n sistemi H di segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, che si ottengono determinando le H_i dal sistema *completo* ai differenziali totali

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} H_\lambda. \tag{44}$$

Ora si osservi che, se si pone $\overline{\beta}_{ki} = \beta_{ik}$, le equazioni della prima e terza linea in (VI) si cangiano per le $\overline{\beta}_{ki}$ precisamente nelle (V) § 9 che caratterizzano le rotazioni dei sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio S_n indefinito di segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Di più le (VI) della seconda linea dimostrano che si ha

$$\frac{\partial \overline{\beta}_{ki}}{\partial u_i} + \frac{\partial \overline{\beta}_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \overline{\beta}_{i\lambda} \overline{\beta}_{k\lambda} = 0,$$

onde segue che fra i sistemi n^{pli} ortogonali dell'S_n indefinito colle rotazioni β_{ik}:

$$ds^2 = \varepsilon_1 \overline{H}_1^2 du_1^2 + \varepsilon_2 \overline{H}_2^2 du_2^2 + \cdots + \varepsilon_n \overline{H}_n^2 du_n^2$$

ne esistono di quelli pei quali si ha

$$\overline{H}_1^2 + \overline{H}_2^2 + \cdots + \overline{H}_n^2 = \text{cost.} \tag{45}$$

E infatti le corrispondenti equazioni per le $\overline{H}_i$ si scrivono

$$\frac{\partial \overline{H}_i}{\partial u_k} = \overline{\beta}_{ki} \overline{H}_k, \quad \frac{\partial \overline{H}_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \overline{\beta}_{i\lambda} \overline{H}_\lambda,$$

e formano un sistema completamente integrabile.

Da tutto ciò si raccoglie che: *i sistemi H di segnatura* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, *nello spazio ordinario definito S_n, trovano i loro associati nello spazio indefinito di segnatura* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ *in quegli ordinari sistemi $\overline{H}$ che soddisfano alla relazione* (45) $\sum_{\lambda} \overline{H}_\lambda^2 = cost.$

§ 11.

LE TRASFORMAZIONI T_m DEI SISTEMI H GENERALIZZATI.

Possiamo ora riprendere le ricerche relative alle trasformazioni T_m degli ordinarii sistemi H (§§ 4 e segg.) ed estenderle ai nuovi sistemi H generalizzati.

Per questo, supposto di avere un sistema H di segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ nello spazio definito, ed un suo associato $\overline{H}$ nell'indefinito, ai quali appartengano le rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}), soddisfacenti alle (V), cerchiamo di applicare ad $(H, \overline{H})$ due trasformazioni di RIBAUCOUR, colle rispettive funzioni trasformatrici $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$, $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_n; \overline{\varphi})$, in guisa che la coppia $(H, \overline{H})$ venga cangiata in un'altra coppia $(H', \overline{H}')$ di sistemi associati. Procedendo come al § 4, si troveranno intanto per le γ_i, $\overline{\gamma}_i$ le equazioni di trasformazione

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = m\overline{\gamma}_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda \\ &\frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\overline{\gamma}_k, \quad \varepsilon_i \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} = m\gamma_i - \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda}\overline{\gamma}_\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{VII}$$

le quali formano, a causa delle (VI), un sistema completo. Di più, se poniamo

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2, \qquad \overline{A} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2, \tag{46}$$

si ha $\frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial u_i} = 2m\gamma_i\overline{\gamma}_i$, e perciò il sistema (VII) possiede l'integrale quadratico

$$A - \overline{A} = \text{cost.}$$

Noi scegliamo i valori iniziali delle γ_i, $\overline{\gamma}_i$ in modo da annullare la costante del secondo membro per cui avremo anche

$$A = \overline{A}. \tag{VII*}$$

Ed ora indicando con β'_{ik}, $\overline{\beta}'_{ki}$ le nuove rotazioni trasformate dalla (4) § 1 e dalla (3) § 9 dedurremo

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\, m\, \gamma_i\, \overline{\gamma}_k}{A}, \quad \overline{\beta}'_{ik} = \overline{\beta}'_{ik} - \frac{2\, m\, \overline{\gamma}_i\, \gamma_k}{A},$$

da cui, essendo $\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$, segue subito $\overline{\beta}'_{ik} = \beta'_{ki}$, il che significa che le nuove rotazioni $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ sono ancora associate. Ma ora di più, calcolando per quadrature le $(n+1)^{me}$ funzioni trasformatrici φ, $\overline{\varphi}$ dalle condizioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i\, \gamma_i, \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_i} = \overline{H}_i\, \overline{\gamma}_i, \tag{47}$$

pei coefficienti H'_λ, $\overline{H}'_\lambda$ dei sistemi trasformati avremo

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2\, m\, \varphi}{A}\, \overline{\gamma}_\lambda, \quad \overline{H}'_\lambda = \overline{H}_\lambda - \frac{2\, m\, \overline{\varphi}}{A}\, \gamma_\lambda,$$

e potremo determinare φ, $\overline{\varphi}$ in guisa da soddisfare alle (47) ed insieme alle altre

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda\, H'^2_\lambda = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda\, H^2_\lambda, \quad \sum_\lambda \overline{H}'^2_\lambda = \sum_\lambda \overline{H}^2_\lambda,$$

dopo di che lo scopo sarà manifestamente raggiunto. Per questo, siccome abbiamo

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda\, H'^2_\lambda - \sum_\lambda \varepsilon_\lambda\, H^2_\lambda = \frac{4\, m\, \varphi}{A}\left(m\, \varphi - \sum_\lambda \varepsilon_\lambda\, H_\lambda\, \overline{\gamma}_\lambda\right)$$

$$\sum_\lambda \overline{H}'^2_\lambda - \sum_\lambda \overline{H}^2_\lambda = \frac{4\, m\, \overline{\varphi}}{A}\left(m\, \overline{\varphi} - \sum_\lambda \overline{H}_\lambda\, \gamma_\lambda\right),$$

basterà prendere φ, $\overline{\varphi}$ dalle formole seguenti:

$$\varphi = \frac{1}{m} \sum_\lambda \varepsilon_\lambda\, H_\lambda\, \overline{\gamma}_\lambda, \quad \overline{\varphi} = \frac{1}{m} \sum_\lambda \overline{H}_\lambda\, \gamma_\lambda, \tag{48}$$

valori coi quali, come subito si verifica, le (47) sono in effetto soddisfatte.

In fine osserviamo che il teorema *speciale* di permutabilità per le T_m dei sistemi H generalizzati continua a sussistere come nel caso ordinario, valendo considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte alla fine del § 7.

§ 20.

I SISTEMI n^{pli} ORTOGONALI DELLO SPAZIO S_n A CURVATURA COSTANTE.

Consideriamo lo spazio S_n a curvatura costante K e scriviamo $K = \frac{\varepsilon}{R^2}$, dove sarà $\varepsilon = +1$ se K è positiva (spazio ellittico), e invece $\varepsilon = -1$ per K negativa (spazio iperbolico).

Prendiamo in S_n a coordinate le $n+1$ coordinate di WEIERSTRASS (*), che qui (per non moltiplicare le notazioni degli indici) denoteremo con

$$x, y, z, \ldots, t.$$

Queste sono legate fra loro dalla identità quadratica:

$$\varepsilon (x^2 + y^2 + z^2 + \cdots) + t^2 = 1, \tag{49}$$

e il $d\,s^2$ è dato da

$$d\,s^2 = R^2 (d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2 + \cdots + \varepsilon\, d\,t^2). \tag{50}$$

Abbiasi ora nello spazio S_n un sistema n^{plo} $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di ipersuperficie ortogonali, a cui riferito lo spazio risulti

$$d\,s^2 = H_1^2\, d\,u_1^2 + H_2^2\, d\,u_2^2 + \cdots + H_n^2\, d\,u_n^2. \tag{51}$$

Le condizioni *necessarie e sufficienti* a cui debbono soddisfare H_1, $H_2, \ldots, H_n$ affinchè la forma differenziale (51) sia di curvatura Riemanniana costante $K = \frac{\varepsilon}{R^2}$ si scrivono, introducendo anche qui le rotazioni β_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \frac{\varepsilon}{R^2} H_i H_k = 0, \end{aligned}\right\} \tag{VIII}$$

(*) Vedi le mie *Lezioni di Geometria differenziale*, Vol. I, §§ 193, 194 che in seguito citeremo colla sola indicazione del Volume.

le quali si riducono naturalmente a quelle dello spazio euclideo ponendovi $\frac{1}{R^2}=0$. Introduciamo anche qui, in ogni punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dello spazio, l'n^{edro} principale relativo al sistema Σ, formato dalle direzioni (principali) delle linee di curvatura coordinate $(u_1), (u_2), \ldots, (u_n)$. Denotando con

$$X_i,\ Y_i, \ldots,\ T_i$$

i coseni di direzione della i^{ma} direzione principale (u_i), dal confronto delle (50), (51) abbiamo

$$\frac{\partial x}{\partial u_i}=\frac{H_i}{R}X_i,\quad \frac{\partial y}{\partial u_i}=\frac{H_i}{R}Y_i,\ldots,\quad \frac{\partial t}{\partial u_i}=\frac{H_i}{R}T_i, \tag{52}$$

indi per le relazioni d'ortogonalità

$$\left.\begin{aligned} & x X_i + y Y_i + \cdots + \varepsilon t T_i = 0 \\ & X_i X_k + Y_i Y_k + \cdots + \varepsilon T_i T_k = \varepsilon_{ik} \quad (\varepsilon_{ik}=0 \text{ per } i \neq k,\ \varepsilon_{ii}=1). \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Le $n+1$ coordinate di Weierstrass $x, y, \ldots, t$ sono altrettante soluzioni del sistema differenziale di Weingarten (Vol. I, § 195):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_i \partial u_k}=\sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\ k \\ \lambda \end{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial u_\lambda}-\frac{\varepsilon a_{ik}}{R^2}\theta,$$

e nel caso nostro, avendosi $a_{ii}=H_i^2$, $a_{ik}=0$ (per $i \neq h$), dànno le equazioni fondamentali pei coseni $X_i, Y_i, \ldots$, che si scrivono

$$\frac{\partial X_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}X_k,\quad \frac{\partial X_i}{\partial u_i}=-\sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}X_\lambda-\frac{\varepsilon H_i}{R}x, \tag{54}$$

e valgono analogamente per le altre coppie $(Y, y) \ldots (T, t)$.

§ 13.

Trasformazioni di Ribaucour e teorema di permutabilità.

Diamo ora le formole per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio S_n a curvatura costante (Cfr. prefazione). Senza ripetere qui le deduzioni analoghe a quelle svolte nei §§ 4, 5 (M) pel caso euclideo, ci basterà presentare le formole definitive, collocandoci dapprima dal punto di vista intrinseco. Prendiamo $n+1$ funzioni trasformatrici γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$; φ assoggettate a soddisfare al sistema completamente integrabile

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{H_i \gamma_i}{R}. \tag{55}$$

Se poniamo

$$\Theta_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda + \frac{\varepsilon H_i \varphi}{R}, \quad (56) \qquad A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 + \varepsilon\varphi^2, \quad (57)$$

derivando troviamo

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\Theta_k \; (i \neq k), \quad (58) \qquad \frac{\partial A}{\partial u_i} = 2\gamma_i \Theta_i. \quad (59)$$

Ciò premesso, dalle funzioni trasformatrici (γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$; φ) risulterà definito un nuovo sistema n^{plo} ortogonale Σ', trasformato di Ribaucour del sistema iniziale Σ, i cui elementi (indicati con accenti) si calcolano dalle formole

$$H'_i = H_i - \frac{2R\varphi}{A}\Theta_i \tag{60}$$

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma_i \Theta_k}{A}. \tag{61}$$

È facile verificare, servendoci delle equazioni precedenti, che questi valori H'_i, β'_{ik} soddisfano alle equazioni differenziali (VIII) e definiscono per ciò *intrinsecamente* un nuovo sistema n^{plo} ortogonale Σ'. Ma se vogliamo costruire effettivamente Σ', come trasformato di Ribaucour di Σ, nella sua posizione nello spazio, dovremo ricorrere alle formule seguenti. Posto

$$\Omega_x = \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + \varepsilon\varphi x, \quad \Omega_y = \sum_\lambda \gamma_\lambda \varphi_\lambda + \varepsilon\varphi y, \ldots, \quad \Omega_t = \sum_\lambda \gamma_\lambda T_\lambda + \varepsilon\varphi t,$$

e denotando con accenti gli elementi relativi a Σ', avremo per le formole richieste

$$x' = x - \frac{2\varphi}{A}\Omega_x, \quad y' = y - \frac{2\varphi}{A}\Omega_y, \ldots, \quad t' = t - \frac{2\varphi}{A}\Omega_t \tag{62}$$

$$X'_i = X_i - \frac{2\gamma_i\Omega_x}{A}, \quad Y'_i = X_i - \frac{2\gamma_i\Omega_q}{A}, \ldots, \quad T'_i = T_i - \frac{2\gamma_i\Omega_t}{A}. \tag{62*}$$

In fine osserveremo che i raggi $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ delle n ipersfere tangenti a Σ, Σ' si calcolano, nel caso ellittico, dalle formole

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\rho_i}{R}\right) = -\frac{\varphi}{\gamma_i}, \tag{63}$$

e nel caso iperbolico dalle altre

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\rho_i}{R}\right) = -\frac{\varphi}{\gamma_i}, \tag{63*}$$

nel quale ultimo caso la i^{ma} ipersfera avrà centro reale solo quando il valore assoluto del secondo membro risulta < 1.

Anche le formole pel teorema di permutabilità si scrivono in perfetta analogia con quelle dèl caso euclideo (§ 2). Supposti dedotti dal sistema Σ due nuovi sistemi Σ', Σ'' colle rispettive trasformazioni di Ribaucour

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n;\ \varphi), \qquad (\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n;\ \varphi'),$$

si determini, con una quadratura, la funzione τ dalle formole

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2\gamma'_i \Theta_i, \tag{64}$$

e ponendo

$$\Gamma_i = \frac{\tau \gamma_i}{A} + \gamma'_i, \quad \overline{\Phi} = \frac{\tau \varphi}{A} + \varphi', \tag{65}$$

si avranno le $n+1$ funzioni trasformatrici $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n;\ \Phi)$ pel passaggio dal sistema Σ' al quarto sistema $\overline{\Sigma}$ del teorema di permutabilità (Cf. § 2).

§ 14.

Trasformazioni T_m dei sistemi E negli spazii a curvatura costante.

Come nello spazio euclideo ((M) § 14), chiamiamo anche qui *sistemi E* quei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio curvo pei quali, con una scelta conveniente dei parametri u_i, si ha simmetria nelle rotazioni: $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. La ricerca di questi sistemi dipende dal sistema differenziale che si ottiene da (VIII) ponendovi $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, al quale si può dare la forma

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} H_k, \quad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\beta_{ik} = \beta_{ki}) \\ \sum\limits_{\lambda} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_\lambda} + \dfrac{\varepsilon}{R^2} H_i H_k = 0. \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{IX})$$

Nello stesso modo come in (M) § 14 si dimostra che questi sistemi dipendono da $\frac{n(n+1)}{2}$ funzioni arbitrarie; la loro ricerca equivale al problema di ridurre il ds^2 dello spazio a curvatura costante alla forma caratteristica:

$$ds^2 = \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} du_1^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial u_2} du_2^2 + \cdots + \frac{\partial \Theta}{\partial u_n} du_n^2,$$

dove Θ è una conveniente funzione delle u_i. Se ci proponiamo anche qui il problema di trovare trasformazioni di Ribaucour che cangino ogni sistema E in altri sistemi E', un'analisi perfettamente simile a quella usata in (M) § 15 dimostra che le condizioni necessarie e sufficienti consistono nel dover soddisfare le funzioni trasformatrici al seguente sistema *completo* di equazioni ai differenziali totali

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum\limits_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda + \dfrac{\varepsilon H_i \varphi}{R} = m\gamma_i \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \dfrac{H_i \gamma_i}{R}, \end{array}\right\} \qquad (66)$$

dove m indica una costante arbitraria. Le corrispondenti trasformazioni si indicheranno ancora con T_m.

Per queste T_m sussiste, come nello spazio euclideo ((M) § 16), il teorema speciale di permutabilità, le cui formole stabiliamo nel modo seguente. Si consideri una seconda trasformazione $T_{m'}$, con $m'^2 \neq m^2$, le cui funzioni trasformatrici siano $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n; \varphi'$ e nelle formole (65) del teorema di permutabilità: $\Gamma_i = \frac{\tau\gamma_i}{A} + \gamma'_i$, $\Phi = \frac{\tau\varphi}{A} + \varphi'$ si cerchi di determinare τ in guisa che le Γ_i soddisfino alle equazioni di trasformazione che caratterizzano una trasformazione $T_{m'}$

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{\lambda i}\Gamma_\lambda + \frac{\varepsilon H'_i \Phi}{R} = m'\Gamma_i.$$

Il calcolo effettivo per τ porge il valore seguente

$$\tau = -\frac{2\,m}{m+m'}\left\{\sum_{\lambda}\gamma_\lambda\gamma'_\lambda + \varepsilon\,\varphi\,\varphi'\right\}, \tag{67}$$

e poichè questo valore di τ soddisfa in effetto alle relative equazioni (64), ne risulta dimostrato il teorema speciale di permutabilità per le T_m.

Si osservi che questi risultati generali possono applicarsi in particolare all'ordinaria geometria sferica (ponendo $n=2$, $K=1$), ove si tratta di ridurre l'elemento lineare sferico alla forma di Ribaucour

$$d\,s^2 = \frac{\partial\,\Theta}{\partial\,u}\,d\,u^2 + \frac{\partial\,\Theta}{\partial\,v}\,d\,v^2.$$

(Cf. Darboux, *Systèmes orthogonaux*, 2ème Édition, Livre III, Chap. I).

§ 15.

Sistemi n^{pli} ortogonali associati negli spazii a curvatura costante.

La nozione di sistemi n^{pli} ortogonali associati (§§ 3 e 10) può ora ricevere la seguente nuova estensione. Consideriamo due spazii S_n, $\overline{S}_n$ colle rispettive curvature costanti

$$K = \frac{\varepsilon}{R^2}, \qquad \overline{K} = \frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{R}^2},$$

e supponiamo di avere in S_n un sistema n^{plo} ortogonale Σ e in $\overline{S}_n$ un altro $\overline{\Sigma}$ tali che fra le loro rotazioni β_{ik}, $\overline{\beta}_{ki}$ abbiano luogo le relazioni $\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$; diremo allora che $(\Sigma, \overline{\Sigma})$ formano una coppia di sistemi associati. Si riconosce l'effettiva esistenza di infinite coppie di sistemi associati aggregando alle equazioni fondamentali (VIII) per Σ le analoghe per $\overline{\Sigma}$, nell'ipotesi $\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$. Così, indicando con un soprassegno le quantità relative a $\overline{\Sigma}$, si forma nelle $n(n+1)$ funzioni incognite H_i, $\overline{H}_i$, β_{ik} il sistema differenziale seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H_i}{\partial u_k}=\beta_{ki}H_k\,,\quad \frac{\partial \overline{H}_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\overline{H}_k\\
&\qquad\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l}=\beta_{il}\beta_{lk}\\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}+\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}+\sum_\lambda^{(i,k)}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}+\frac{\varepsilon}{R^2}H_iH_k=0\\
&\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i}+\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k}+\sum_\lambda^{(i,k)}\beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda}+\frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{R}^2}\overline{H}_i\overline{H}_k=0.
\end{aligned}\right\}\tag{X}$$

Coi soliti procedimenti si dimostra che le condizioni d'integrabilità del sistema (X) sono identicamente soddisfatte e la sua soluzione generale (H_i, $\overline{H}_i$, β_{ik}) dipende quindi da $n(n+1)$ funzioni arbitrarie.

Ora, come al § 4 pel caso euclideo, possiamo stabilire l'esistenza di trasformazioni T_m di Ribaucour che cangiano una coppia (Σ, $\overline{\Sigma}$) di sist ni associati in S_n, $\overline{S}_n$ in altre coppie associate (Σ', $\overline{\Sigma}'$) dei medesimi spazii. Applicando il procedimento stesso del caso particolare al § 4, si vede che queste T_m dipendono dalla ricerca di $2n+2$ funzioni trasformatrici

$$(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n;\,\varphi),\quad(\overline{\gamma}_1,\overline{\gamma}_2,\ldots,\overline{\gamma}_n;\,\overline{\varphi}),$$

assoggettate a soddisfare al seguente sistema differenziale:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\gamma_k\,,\quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda+\frac{\varepsilon H_i\varphi}{R}=m\overline{\gamma}_i\,,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}=\frac{H_i\gamma_i}{R}\\
&\frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k}=\beta_{ki}\overline{\gamma}_k\,,\quad \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\beta_{i\lambda}\overline{\gamma}_\lambda+\frac{\overline{\varepsilon}\,\overline{H}_i\overline{\varphi}}{\overline{R}}=m\gamma_i\,,\quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_i}=\frac{\overline{H}_i\overline{\gamma}_i}{\overline{R}}\,,
\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

e di più alla condizione ai limiti

$$A=\overline{A},\tag{68*}$$

dove è posto:

$$A=\sum_\lambda\gamma_\lambda^2+\varepsilon\varphi^2,\quad \overline{A}=\sum_\lambda\overline{\gamma}_\lambda^2+\overline{\varepsilon}\,\overline{\varphi}^2.$$

Ma in effetto il sistema lineare (68) è completamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$A-\overline{A}=\text{cost.},$$

onde valgono le solite considerazioni. Scelte le $2n+2$ funzioni trasformatrici $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i, \varphi, \overline{\varphi})$ conforme alle condizioni superiori, pei rispettivi sistemi trasformati Σ', $\overline{\Sigma}'$ si hanno le formole

$$\left.\begin{aligned} H'_i &= H_i - \frac{2mR\varphi}{A}\overline{\gamma}_i, \quad \overline{H}'_i = \overline{H}_i - \frac{2m\overline{R}\,\overline{\varphi}}{A}\gamma_i \\ \beta'_{ik} &= \beta_{ik} - \frac{2m\gamma_i\overline{\gamma}_k}{A}, \quad \overline{\beta}'_{ik} = \overline{\beta}_{ik} - \frac{2m\overline{\gamma}_i\gamma_k}{A}, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

e siccome $\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$ ne risulta anche $\overline{\beta}'_{ik} = \beta'_{ki}$, cioè i due sistemi Σ', $\overline{\Sigma}'$ sono nuovamente associati, come si voleva.

§ 16.

Il teorema di permutabilità per le nuove T_m.

Per le trasformazioni T_m dei nuovi sistemi associati sussiste il teorema speciale di permutabilità del caso euclideo (§§ 5, 6), ciò che dimostriamo come segue. Dalla coppia iniziale $(\Sigma, \overline{\Sigma})$ siano dedotte mediante due trasformazioni T_m, $T_{m'}$ (con $m'^2 \neq m^2$) le due nuove coppie $(\Sigma', \overline{\Sigma}')$, $(\Sigma'', \overline{\Sigma}'')$. Per le funzioni trasformatrici $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i, \varphi, \overline{\varphi})$ della T_m valgono le (68), (68*) e medesimamente per le trasformatrici $(\gamma'_i, \overline{\gamma}'_i, \varphi', \overline{\varphi}')$ delle $T_{m'}$ le analoghe

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\gamma'_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma'_k, \quad \frac{\partial\gamma'_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}\gamma'_\lambda + \frac{\varepsilon H_i\varphi'}{R} = m'\overline{\gamma}'_i, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial u_i} = \frac{H_i\gamma'_i}{R} \\ &\frac{\partial\overline{\gamma}'_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\overline{\gamma}'_k, \quad \frac{\partial\overline{\gamma}'_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)}\beta_{i\lambda}\overline{\gamma}'_\lambda + \frac{\overline{\varepsilon}\,\overline{H}_i\overline{\varphi}'}{\overline{R}} = m'\gamma'_i, \quad \frac{\partial\overline{\varphi}'}{\partial u_i} = \frac{\overline{H}_i\overline{\gamma}_i}{\overline{R}}, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

$$A' = \overline{A}', \tag{70*}$$

dove:

$$A' = \sum_\lambda \gamma'^2_\lambda + \varepsilon\varphi'^2, \qquad \overline{A}' = \sum_\lambda \overline{\gamma}'^2_\lambda + \overline{\varepsilon}\,\overline{\varphi}'^2.$$

Ora, colle formole del teorema generale di permutabilità al § 13, poniamo

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_i &= \frac{\tau\,\gamma_i}{A} + \gamma'_i, \quad \Phi = \frac{\tau\,\varphi}{A} + \varphi' \\ \overline{\Gamma}_i &= \frac{\overline{\tau}\,\overline{\gamma}_i}{A} + \overline{\gamma}'_i, \quad \overline{\Phi} = \frac{\overline{\tau}\,\overline{\varphi}}{A} + \overline{\varphi}', \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

le funzioni τ, $\overline{\tau}$ essendo determinate per quadrature dalle rispettive formole

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2m\,\gamma'_i\,\overline{\gamma}_i, \quad \frac{\partial \overline{\tau}}{\partial u_i} = -2m\,\gamma_i\,\overline{\gamma}'_i, \tag{72}$$

e cerchiamo le ulteriori condizioni affinchè le $2n+2$ funzioni

$$\Gamma_i,\ \overline{\Gamma}_i,\ \Phi,\ \overline{\Phi}$$

siano le trasformatrici di una $T_{m'}$ applicata alla coppia $(\Sigma', \overline{\Sigma}')$. Per questo dovranno essere soddisfatte le relative equazioni:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_k} = \beta'_{ik}\,\Gamma_k, \quad \frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{\lambda i}\,\Gamma_\lambda + \frac{\varepsilon\,H'_i\,\Phi}{R} = m'\,\overline{\Gamma}_i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \frac{H'_i\,\Gamma_i}{R} \\ \frac{\partial \overline{\Gamma}_i}{\partial u_k} = \beta'_{ki}\,\overline{\Gamma}_k, \quad \frac{\partial \overline{\Gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{i\lambda}\,\overline{\Gamma}_\lambda + \frac{\overline{\varepsilon}\,\overline{H}'_i\,\overline{\Phi}}{\overline{R}} = m'\,\Gamma_i, \quad \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial u_i} = \frac{\overline{H}'_i\,\overline{\Gamma}_i}{\overline{R}}, \\ \sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 + \varepsilon\,\Phi^2 = \sum_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda^2 + \overline{\varepsilon}\,\overline{\Phi}^2, \end{gathered}$$

dove le H'_i, $\overline{H}'_i$, β'_{ik} hanno i valori (69). Calcolando queste condizioni mediante le formole superiori, si trova che esse si riducono alle due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} m\,\tau + m'\,\overline{\tau} &= -2m\,B \\ m'\,\tau + m\,\overline{\tau} &= -2m\,\overline{B}, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

dove si è posto

$$B = \sum_\lambda \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda + \varepsilon\,\varphi\,\varphi', \quad \overline{B} = \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda\,\overline{\gamma}'_\lambda + \overline{\varepsilon}\,\overline{\varphi}\,\overline{\varphi}'. \tag{73*}$$

Le (73) coincidono formalmente colle (24), (24*) § 5, e risolute dànno ancora

$$\left.\begin{aligned}\tau &= \frac{2\,m}{m'^2 - m^2}(m\,B - m'\,\overline{B}) \\ \overline{\tau} &= \frac{2\,m}{m'^2 - m^2}(m\,\overline{B} - m'\,B).\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Ma ora, derivando le espressioni (73*) di B, $\overline{B}$, si trova:

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = m\,\gamma'_i\,\overline{\gamma}_i + m'\,\gamma_i\,\overline{\gamma}'_i\,, \quad \frac{\partial \overline{B}}{\partial u_i} = m\,\gamma_i\,\overline{\gamma}'_i + m'\,\gamma'_i\,\overline{\gamma}_i\,,$$

e ne risulta che i valori (74) di τ, $\overline{\tau}$ soddisfano in effetto alle (72). Così è provato che, mediante questa trasformazione $T_{m'} \equiv (\Gamma_i, \overline{\Gamma}_i, \Phi, \overline{\Phi})$, la coppia associata $(\Sigma', \overline{\Sigma}')$ si cangia in una quarta $(\Omega, \overline{\Omega})$. Che poi quest'ultima si deduca a sua volta dalla terza $(\Sigma'', \overline{\Sigma}'')$ mediante una T_m si proverebbe come al § 6. Osserviamo in fine anche qui che nel caso singolare $m'^2 = m^2$, introducendo la nozione di sistemi in involuzione, si trovano le stesse proprietà come nel caso euclideo al § 6.

§ 17.

Le trasformazioni T_m dei sistemi H negli spazii a curvatura costante.

Chiamiamo, anche negli spazii a curvatura costante, sistemi H (o sistemi di Guichard-Darboux) quei sistemi n^{pli} ortogonali pei quali (con una conveniente scelta dei parametri u_i) sussiste la relazione:

$$\sum_\lambda H_\lambda^2 = H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = a^2 \qquad (a \text{ costante}).$$

Il calcolo stesso eseguito in (M) § 23 dimostra che, nel caso attuale dello spazio S_n di curvatura $K = \frac{\varepsilon}{R^2}$, i coefficienti H_i e le rotazioni β_{ik} di un sistema H debbono soddisfare al sistema differenziale seguente:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial H_i}{\partial u_k}=\beta_{ki}H_k,\quad \dfrac{\partial H_i}{\partial u_i}=-\sum_\lambda^{(i)}\beta_{i\lambda}H_\lambda \\
\qquad\qquad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l}=\beta_{il}\beta_{lk} \\
\dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}+\dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}+\sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}+\dfrac{\varepsilon}{R^2}H_iH_k=0 \\
\dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i}+\dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k}+\sum_\lambda^{(i)}\beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda}=0.
\end{array}\right\}\quad \text{(XI)}$$

Coi soliti procedimenti (Cf. (M) § 23) si riconosce che questo sistema (XI) ammette una soluzione generale con $n(n-1)$ funzioni arbitrarie, e per ciò i sistemi H dello spazio a curvatura costante esistono nello stesso grado di generalità come nello spazio euclideo.

Ora è manifesto che se si pone $\bar\beta_{ik}=\beta_{ki}$, queste $\bar\beta_{ik}$, a causa delle equazioni della seconda e quarta linea in (XI), soddisfano alle equazioni caratteristiche (I) § 1 per le rotazioni dei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio euclideo. Colla nozione di sistemi associati, introdotta al paragrafo precedente, possiamo dire che: *Ogni sistema H dello spazio a curvatura costante ammette infiniti sistemi associati nello spazio euclideo (tutti trasformati di Combescure l'uno dell'altro).*

Ed ora andiamo a dimostrare che pei sistemi H degli spazii a curvatura costante esistono trasformazioni T_m di Ribaucour come nel caso euclideo (§ 7). Le formole per queste T_m si dedurranno da quelle sviluppate nei due paragrafi precedenti ponendovi

$$\frac{1}{\bar R}=0,\quad \bar H_i=0,\quad \bar\varphi=0.$$

Valendo pel sistema trasformato Σ' le formole (69)

$$H'_\lambda=H_\lambda-\frac{2\,m\,R\,\varphi}{A}\bar\gamma_\lambda,$$

otterremo che questo sistema Σ' sia di nuovo un sistema H' di Guichard-Darboux, determinando φ in guisa che risulti: $\sum_\lambda H'^2_\lambda=\sum_\lambda H^2_\lambda$. Ora si ha per la precedente

$$\sum_\lambda(H'^2_\lambda-H^2_\lambda)=\frac{4\,m\,R\,\varphi}{A}\sum_\lambda\bar\gamma_\lambda\left(\frac{m\,R\,\varphi}{A}\bar\gamma_\lambda-H_\lambda\right)=\frac{4\,m\,R\,\varphi}{A}(m\,R\,\bar\varphi-\sum_\lambda H_\lambda\bar\gamma_\lambda),$$

e la nostra condizione dà per φ il valore

$$\varphi = \frac{1}{mR} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda . \tag{75}$$

D'altra parte si verifica subito che questo valore di φ soddisfa alle equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{H_i \gamma_i}{R} ,$$

onde risulta stabilito, anche pei sistemi H dello spazio a curvatura costante, l'esistenza di trasfórmazioni T_m di RIBAUCOUR, contenenti, oltre m, $2n-2$ costanti arbitrarie.

Da ultimo estendiamo anche a questo caso il teorema speciale di permutabilità al § 7, osservando che se nelle due trasformazioni T_m, $T_{m'}$ pel passaggio dal sistema H ai rispettivi sistemi H', H'' le funzioni trasformatrici sono

$$\text{per la } T_m) \qquad \gamma_i,\ \overline{\gamma}_i,\ \varphi = \frac{1}{mR} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}_\lambda$$

$$\text{per la } T_{m'}) \qquad \gamma'_i,\ \overline{\gamma}'_i,\ \varphi' = \frac{1}{m'R} \sum_\lambda H_\lambda \overline{\gamma}'_\lambda ,$$

dalle formole generali (71) al paragrafo precedente

$$\Phi = \frac{\tau \varphi}{A} + \varphi'$$

risulta facilmente

$$\Phi = \frac{1}{m'R} \sum_\lambda H'_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda ,$$

ossia

$$m' R \left(\frac{\tau \varphi}{A} + \varphi'\right) = \sum_\lambda \left(H_\lambda - \frac{2mR\varphi}{A} \overline{\gamma}_\lambda\right) \left(\frac{\overline{\tau}\,\overline{\gamma}_\lambda}{A} + \overline{\gamma}'_\lambda\right) .$$

Ora questa, sviluppata, si scrive

$$m' \tau + m \overline{\tau} = -2m \overline{B}$$

e coincide colla seconda delle (73) la quale trovasi verificata.

§ 18.

I SISTEMI H GENERALIZZATI DELLO SPAZIO A CURVATURA COSTANTE.

Come si è fatto al § 10 per lo spazio euclideo, così anche nello spazio S_n a curvatura costante chiamiamo sistema H *generalizzato* di segnatura $(\varepsilon_2, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ ogni sistema n^{plo} ortogonale le cui H_i soddisfino la relazione: $\varepsilon_1 H_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 + \cdots + \varepsilon_n H_n^2 = \text{cost.}$ Il calcolo stesso eseguito al § 10 prova che le H_i soddisferanno alle equazioni differenziali

$$\varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} H_\lambda = 0,$$

e le rotazioni β_{ik} alle ulteriori

$$\varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0,$$

e colle solite considerazioni (cf. §§ 10 e 17) si stabilisce l'esistenza di questi sistemi H generalizzati. Ora andiamo a costruire anche qui le trasformazioni T_m di RIBAUCOUR, le cui formole otteremo nel modo seguente. Indichino $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_n; \varphi)$ $2n+1$ funzioni trasformatrici assoggettate a soddisfare al sistema lineare ai differenziali totali

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda + \frac{\varepsilon H_i \varphi}{R} = m \bar{\gamma}_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{H_i \gamma_i}{R} \\ &\frac{\partial \bar{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \bar{\gamma}_k, \quad \varepsilon_i \frac{\partial \bar{\gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} \bar{\gamma}_\lambda = m \gamma_i. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Questo è un sistema completo e possiede l'integrale quadratico

$$A - \bar{A} = \text{cost.},$$

avendo posto

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 + \varepsilon \varphi^2, \quad \bar{A} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2,$$

poichè ne risulta $\frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial u_i} = 2m \gamma_i \bar{\gamma}_i$. Al solito si assumeranno i valori ini ziali delle $(\gamma_i, \bar{\gamma}_i, \varphi)$ in modo da soddisfare anche l'equazione ai limiti

$$A = \bar{A}. \tag{76*}$$

Dopo ciò, applichiamo al sistema H la trasformazione di Ribaucour $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$ (Cf. § 13), e pel sistema trasformato avremo per la (60) § 13

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2\, m\, R\, \varphi}{A} \bar{\gamma}_\lambda,$$

e questo sarà un nuovo sistema H' generalizzato colla stessa segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ se φ è determinata in guisa che si abbia $\sum_\lambda \varepsilon_\lambda (H'^2_\lambda - H^2_\lambda) = 0$. Ora si ha dalla precedente

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda (H'^2_\lambda - H^2_\lambda) = \frac{4\, m\, R\, \varphi}{A} (m\, R\, \varphi - \sum_\lambda H_\lambda \bar{\gamma}_\lambda)$$

e ne risulta quindi per φ il valore

$$\varphi = \frac{1}{m\, R} \sum_\lambda \varepsilon_\lambda H_\lambda \bar{\gamma}_\lambda \tag{77}$$

compatibile colle (70) perchè, derivando la (77) rapporto ad una qualunque u_i si ottiene per le (76) un'identità.

§ 19.

I sistemi Q degli spazii a curvatura costante.

Dei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio euclideo studiati nei §§ 17-20 in (M) e indicati come *sistemi Q* diamo ora una doppia generalizzazione. In primo luogo trasportiamo la nozione allo spazio S_n a curvatura costante K, e in secondo luogo supponiamo che nella formola (68) § 17 (M) i coefficienti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, invece che costanti, siano funzioni di una sola delle u, precisamente la c_i una funzione U_i della sola u_i. Chiamiamo adunque *sistema Q* nello spazio S_n a curvatura costante un sistema n^{plo} ortogonale che ammetta trasformazioni di Ribaucour le cui funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi$

soddisfino alle equazioni di trasformazione

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i \, (^*) \tag{78}$$

e siano legate fra loro dalla relazione quadratica

$$U_1 \gamma_1^2 + U_2 \gamma_2^2 + \cdots + U_n \gamma_n^2 + a \varphi^2 = 0, \tag{79}$$

dove U_i indica una funzione della sola u_i (ovvero una costante) ed a una costante arbitraria. È immediato che il sistema trasformato Q' appartiene alla medesima classe, poichè le funzioni trasformatrici inverse da Q' a Q verificano la medesima (79).

Per esaminare la questione dell'esistenza e del grado di arbitrarietà dei sistemi Q, cominciamo dal formare le conseguenze differenziali della (79). Derivando rapporto ad u_i, abbiamo

$$U_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} U_\lambda \gamma_\lambda + a H_i \varphi + \frac{1}{2} U'_i \gamma_i = 0 \quad \left(U'_i = \frac{d U_i}{d u_i}\right). \tag{80}$$

Derivando nuovamente rapporto ad u_k $(h \neq i)$, si ottiene

$$U_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ik} \gamma_k) + U_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ki} \gamma_k) + \beta_{ki} U'_k \gamma_k + \beta_{ki} \sum_{\lambda}^{(i,h)} \beta_{\lambda k} U_\lambda \gamma_\lambda + \gamma_k \sum_{\lambda}^{(i,h)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} U_\lambda +$$
$$+ a \beta_{ki} H_k \varphi + a H_i H_k \gamma_k + \frac{1}{2} U'_i \beta_{ik} \gamma_k = 0,$$

ed eseguendo col raccogliere i termini

$$\gamma_k \left\{ U_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + U_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,h)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} U_\lambda + \beta_{ki} U'_k + \frac{1}{2} \beta_{ik} U'_i + a H_i H_k \right\} +$$
$$+ \beta_{ki} \left\{ \beta_{ik} U_i \gamma_i + U_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,h)} \beta_{\lambda k} U_\lambda \gamma_\lambda + a H_k \varphi \right\} = 0.$$

Ma, per la (80) stessa, la quantità entro la seconda parentesi eguaglia $-\frac{1}{2} U'_k \gamma_k$, per cui la precedente resta:

$$U_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + U_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,h)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} U_\lambda + \frac{1}{2} (U'_i \beta_{ik} + U'_k \beta_{ki}) + a H_i H_k = 0, \tag{81}$$

(*) Si avverta che la φ qui introdotta differisce pel fattore costante R dalla φ delle formole precedenti.

equazione simmetrica nei due indici i, k. Se combiniamo questa colla equazione generale (VIII) § 12

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + K H_i H_k = 0$$

possiamo risolvere rispetto alle derivate $\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}$, $\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}$ (*) e ne risulta:

La determinazione dei sistemi Q, nello spazio a curvatura costante K, dipende dal seguente sistema differenziale nelle n^2 funzioni incognite (H_i, β_{ik}):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{U_k - U_\lambda}{U_i - U_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \frac{K U_k - a}{U_i - U_k} H_i H_k - \frac{U'_i \beta_{ik} + U'_k \beta_{ki}}{2(U_i - U_k)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XII)}$$

In modo analogo come in (M) § 18, si dimostra che questo sistema (di Bourlet-Darboux) è completamente integrabile e la sua soluzione generale dipende quindi da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie essenziali.

Inversamente, soddisfatte che siano le (XII), se alle equazioni (78) di trasformazione aggreghiamo le (80), ne risulta (supposte tutte le U_i diverse da zero) un sistema *completo* ai differenziali totali coll'integrale quadratico

$$\sum_{\lambda} U_\lambda \gamma_\lambda^2 + a \varphi^2 = \text{cost.},$$

e poichè possiamo annullare la costante del secondo membro, il sistema n^{plo} ortogonale è in effetto un sistema Q.

Un secondo aspetto dei sistemi Q si ha dal considerare che il ds'^2

(*) Qui si esclude il caso $U_i = U_k$ che si verifica soltanto se U_i, U_k si riducono alla medesima costante c. Se questa è diversa da zero (ciò che accade necessariamente per la (8_1) quando $a = 0$), ne segue fra le H_i e le β_{ik} la relazione in termini finiti

$$\sum_{\lambda}^{(i,k)} (U_\lambda - c) \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + (a - Kc) H_i H_k = 0.$$

In particolare se $n = 3$ e supponiamo $U_1 = U_2$, abbiamo

$$\frac{\beta_{31} \beta_{32}}{H_1 H_2} = \frac{Kc - a}{U_3 - c}$$

e siccome il primo membro dà la curvatura (relativa) delle superficie $u_3 = \text{cost.}$ vediamo che queste sono superficie a curvatura costante.

dato da

$$d s'^2 = \frac{H_1^2}{U_1} d u_1^2 + \frac{H_2^2}{U_2} d u_2^2 + \cdots + \frac{H_n^2}{U_n} d u_n^2 \tag{82}$$

viene ad appartenere allo spazio di curvatura costante $K' = a$. E infatti se si pone $H'_i = \frac{H_i}{\sqrt{U_i}}$ ne risulta $\beta'_{ik} = \sqrt{\frac{U_i}{U_k}} \cdot \beta_{ik}$, onde, in forza delle (81), sono soddisfatte le condizioni caratteristiche che assegnano alla forma differenziale (82) la curvatura Riemanniana costante a. La ricerca dei sistemi Q equivale quindi a quella di particolari rappresentazioni di uno spazio a curvatura costante sopra un altro (rappresentazioni normali uniformi se le U_i sono altrettante costanti) (*).

§ 20.

Le trasformazioni R_m dei sistemi Q.

I sistemi Q, per la loro definizione stessa, ammettono una notevole classe di trasformazioni di Ribaucour che vogliamo ora esaminare più da vicino.

Indicando con m una costante arbitraria (diversa però da zero), poniamo

$$V_i = \frac{1 - U_i}{m}, \quad b = \frac{K - a}{m},$$

onde sarà V_i una funzione della sola u_i, e b una nuova costante. Le equazioni differenziali (XII), caratteristiche pei sistemi Q, prendono la seguente forma, *affatto indipendente dalla costante* m:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_\lambda^{(i,h)} \frac{V_k - V_\lambda}{V_i - V_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \frac{K V_k - b}{V_i - V_k} H_i H_k - \frac{V'_i \beta_{ik} + V'_k \beta_{ki}}{2(V_i - V_k)}, \end{aligned}\right\} \tag{XIII}$$

mentre invece la relazione quadratica (79) si scrive

$$\sum_\lambda (1 - m V_\lambda) \gamma_\lambda^2 + (K - m b) \varphi^2 = 0 \tag{83}$$

(*) Cf. la mia Nota pubblicata nel Vol. XXV dei *Rendiconti dei Lincei* (febbraio 1916).

ed implica la costante m. Ed il sistema *completo* ai differenziali totali che, insieme alla (83), determina la trasformazione, assume per la (80) la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\gamma_k,\quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\frac{1-m\,V_\lambda}{1-m\,V_i}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda+\frac{K-m\,b}{1-m\,V_i}H_i\,\varphi=\frac{m\,V'_i\gamma_i}{2(1-m\,V_i)}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}=H_i\gamma_i.\end{aligned}\right\}\quad\text{(XIV)}$$

Come nel caso particolare considerato in (M), questa si dirà una *trasformazione* R_m del sistema Q in un altro Q', ed è immediato che la trasformazione inversa da Q' a Q è ancora una R_m.

Supponiamo ora di considerare una seconda trasformazione $R_{m'}$ $(m' \neq m)$, che cangi il sistema Q in un terzo Q'' e siano γ'_i, φ' le relative funzioni trasformatrici legate dalla relazione quadratica

$$\sum_\lambda (1-m'\,V_\lambda)\,\gamma'^2_\lambda+(K-m'\,b)\,\varphi'^2=0 \tag{83*}$$

e dalle equazioni differenziali (XIV)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\gamma'_k,\quad \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\frac{1-m'\,V_\lambda}{1-m'\,V_i}\beta_{\lambda i}\gamma'_\lambda+\frac{K-m'\,b}{1-m'\,V_i}H_i\,\varphi'=\frac{m'\,V'_i\gamma'_i}{2(1-m'\,V_i)}\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial u_i}=H_i\gamma'_i.\end{aligned}\right\}\quad(84)$$

Dimostriamo che sussiste anche qui il teorema speciale di permutabilità ((M) § 20):

Esiste un quarto sistema $\overline{Q}$ legato a Q' da una $R_{m'}$, e invece a Q'' da una R_m.

Indicando con Γ_i, Φ le funzioni trasformatrici nel passaggio da Q' a $\overline{Q}$, avremo (§ 13)

$$\Gamma_i=\frac{\tau\,\gamma_i}{A}+\gamma'_i,\quad \Phi=\frac{\tau\,\varphi}{A}+\varphi', \tag{85}$$

dove τ verificherà le equazioni

$$\frac{\partial\tau}{\partial u_i}=-2\,\gamma'_i\left\{\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda+K\,H_i\,\varphi\right\}. \tag{86}$$

Ora proviamo che si può soddisfare a queste condizioni e insieme alla relativa (83)

$$\sum_{\lambda}(1-m' V_\lambda)\,\Gamma_\lambda^2+(K-m' b)\,\Phi^2=0, \tag{87}$$

dopo di che la trasformazione da Q' a $\overline{Q}$ sarà appunto una $R_{m'}$. Ma, sostituendo i valori (85) nella (87), ne deduciamo

$$\frac{\tau^2}{A^2}\left\{\sum_{\lambda}(1-m' V_\lambda)\,\gamma_\lambda^2+(K-m' b)\,\varphi^2\right\}+$$
$$+\frac{2\tau}{A}\left\{\sum_{\lambda}(1-m' V_\lambda)\,\gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda+(K-m' b)\,\varphi\,\varphi'\right\}=0,$$

e siccome per la (83)

$$\sum_{\lambda}(1-m' V_\lambda)\,\gamma_\lambda^2+(K-m' b)\,\varphi^2=(m-m)'\left\{\sum_{\lambda}V_\lambda\,\gamma_\lambda^2+b\,\varphi^2\right\}=$$
$$=\frac{m-m'}{m}\left\{\sum_{\lambda}\gamma_\lambda^2+K\,\varphi^2\right\}=\frac{(m-m')\,A}{m},$$

vediamo che ponendo

$$S=\sum_{\lambda}(1-m' V_\lambda)\,\gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda+(K-m' b)\,\varphi\,\varphi', \tag{88}$$

ne risulta per τ il valore unico e determinato

$$\tau=\frac{2\,m\,S}{m'-m}. \tag{88*}$$

Dobbiamo ora provare che questo valore di τ soddisfa alle (86), cioè S alle altre

$$m\,\frac{\partial S}{\partial u_i}+(m'-m)\,\gamma'_i\left\{\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i}+\sum_{\lambda}^{(i)}\beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda+K\,H_i\,\varphi\right\}=0. \tag{89}$$

Ora, derivando la (88) rispetto ad u_i, risulta

$$\frac{\partial S}{\partial u_i}=\gamma_i\left\{\sum_{\lambda}^{(i)}(1-m' V_\lambda)\,\beta_{\lambda i}\,\gamma'_\lambda+(1-m' V_i)\,\frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i}+(K-m' b)\,H_i\,\varphi'-\frac{m' V'_i\,\gamma'_i}{2}\right\}+$$
$$+\gamma'_i\left\{\sum_{\lambda}^{(i)}(1-m' V_\lambda)\,\beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda+(1-m' V_i)\,\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i}+(K-m' b)\,H_i\,\varphi-\frac{m' V'_i\,\gamma_i}{2}\right\},$$

ed in questa l'espressione che moltiplica γ_i è nulla, a causa delle equazioni differenziali (84), dopo di che sostituendo nella (89) e sopprimendo il fattore

γ'_i, resta da verificare l'equazione

$$m\left\{\sum_\lambda^{(i)}(1-m'V_\lambda)\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda+(1-m'V_i)\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_i}+(K-m'b)H_i\varphi-\frac{m'_iV'_i\gamma_i}{2}\right\}+$$
$$+(m'-m)\left\{\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda+KH_i\varphi\right\}=0.$$

Ma questa, riducendo, diventa

$$m'\left\{(1-mV_i)\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_i}+\sum_\lambda^{(i)}(1-mV_\lambda)\beta_{\lambda i}\beta_\lambda+(K-mb)H_i\varphi-\frac{mV'_i\gamma_i}{2}\right\}=0,$$

ed è identicamente verificata, a causa delle equazioni differenziali (XIV). Si conclude quindi che assumendo per τ nelle (85) il valore

$$\tau=\frac{2m}{m'-m}\left\{\sum_\lambda(1-m'V_\lambda)\gamma_\lambda\gamma'_\lambda+(K-m'b)\varphi\varphi'\right\}, \tag{90}$$

si ottiene in effetto una trasformazione $R_{m'}\equiv(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n; \Phi)$ del sistema Q' in un quarto sistema $\overline{Q}$.

Che in fine questo sistema $\overline{Q}$ provenga a sua volta da Q'' con una R_m vediamo calcolando la quantità analoga

$$\tau'=-(\tau+2B),$$

poichè ne segue

$$\tau'=\frac{2m'}{m-m'}\left\{\sum_\lambda(1-mV_\lambda)\gamma_\lambda\gamma'_\lambda+(K-mb)\varphi\varphi'\right\},$$

e questa è la formola (90) stessa ove si scambi Q' con Q'', indi m con m'.