

Sull'integrazione delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica.

[Di ANGELO TONOLO, a Casale sul Sile (Treviso).]

Scopo precipuo del presente lavoro, è quello di integrare il sistema delle equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ: più precisamente, di assegnare le espressioni delle forze elettromagnetiche nei punti interni di un dato campo S , nella ipotesi che siano dati per ogni istante di tempo i valori delle forze stesse al contorno σ del campo. E ciò, tanto nella ipotesi di un contorno fisso, quanto variabile col tempo. Per ottenere gli integrali dell'anzidetto sistema, mi sono servito, nel caso del contorno fisso, della formula di KIRCHHOFF relativa alla equazione canonica dei piccoli moti. Nel caso del contorno mobile, ho usato il metodo di integrazione sviluppato dal prof. TEDONE nella Nota: *Sulla dimostrazione della formula che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens* (*). Esso è in sostanza una estensione di un metodo d'integrazione dovuto al prof. VOLTERRA, esposto in ispecial modo nella Memoria: *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (**).

Ho trattato dapprima il caso della superficie fissa (Cap. II), e ho dimostrato innanzitutto che, dalla conoscenza per qualsiasi istante di tempo delle forze elettromagnetiche in σ , segue quella della rispettiva derivata normale (Cap. II, § 1). Sono riuscito poi, mediante opportune trasformazioni, a presentare l'espressione definitiva degli integrali sotto forma notevolmente semplice (Cap. II, § 1).

L'estensione al caso di un contorno variabile col tempo, si compie senza forti difficoltà, e dà luogo a delle espressioni per le forze elettromagnetiche, non molto diverse da quelle ottenute nel caso del contorno fisso (Cap. III, § 5).

Di questi miei risultati ho fatto la verifica, dimostrando che essi soddi-

(*) *Reale Accademia dei Lincei* (Vol. V, Serie 5.^a, pag. 357-360).

(**) *Acta mathematica* (Tom. XVIII).

sfano effettivamente le equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ (Cap. II, § 3; Cap. III, § 5).

Spero di poter mostrare prossimamente l'interesse delle dette formule, facendone applicazione a qualche quistione concreta. Qui mi sono limitato ad un unico esempio: quello dei campi elettromagnetici stazionari, per i quali le mie espressioni possono farsi rientrare in formole note (Cap. II, § 4).

Il problema che mi sono proposto, fu già risoluto, nel caso del contorno fisso, dal prof. LOVE nella Memoria: *The integrations of the equations of propagation of electric waves* (*), mediante introduzione di tre sistemi ausiliari di soluzioni delle equazioni indefinite dotate di singolarità caratteristiche. Però le formole finali di questo autore sono assai complicate: a me pare di avere raggiunto un perfezionamento, così concettuale, come formale. Spero quindi di non meritare biasimo, se sono tornato sopra un argomento, che già era stato svolto dal prof. LOVE, e illustrato con interpretazioni del più alto interesse.

CAPITOLO I.

Considerazioni preliminari.

Sia S_1 un mezzo non polarizzabile, indefinito, omogeneo, isotropo, in riposo, in cui avvengono fenomeni elettrodinamici. Rappresentino: $A = \frac{1}{C}$ la inversa della velocità della luce in tale mezzo; t il tempo; x, y, z , le coordinate Cartesiane ortogonali dei punti di S_1 ; \mathbf{E}, \mathbf{H} rispettivamente la forza elettrica e magnetica corrispondenti a ciascun punto del mezzo; e finalmente S una parte del campo S_1 , priva di sorgenti di elettricità, non percorsa da correnti elettriche, e limitata da una superficie chiusa σ , fissa, oppure variabile col tempo. A questo campo S si riferiranno costantemente le ricerche che mi accingo ad esporre.

Premetto innanzitutto il significato di alcuni simboli che, in seguito, verranno frequentemente adoperati, e richiamo alcune formole delle quali avrò bisogno di servirmi.

(*) *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (Vol. 197, 1901, pag. 1-45).

Siano: $F(x, y, z, t)$ una funzione regolare (*) di x, y, z, t , in un certo campo; x_1, y_1, z_1, t_1 , quattro valori rispettivamente fissati per detti argomenti; $z = z(x, y)$ una funzione regolare di x e di y . Si ponga:

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}; \quad t = t_1 - Ar.$$

Ciò posto, col simbolo $\frac{dF}{dn}(u = x, y)$ intendo la derivata di F rispetto ad u , quando si pensa che questa variabile compare esplicitamente, nonché in z e in t , (derivata totale). Col simbolo $\frac{DF}{Dn}(u = x, y, z)$ intendo la derivata di F rispetto ad u , quando si pensa che questa variabile compare esplicitamente, nonché in t (per tramite di r). Finalmente col simbolo $\frac{\partial F}{\partial n}(u = x, y, z, t)$ intendo la derivata nel senso ordinario (derivata parziale).

La formula di Kirchhoff. — Una superficie σ chiusa, fissa nello spazio, limiti un campo S . Denotino: n la direzione della normale che entra nello spazio S ; r la distanza di un punto qualunque del contorno, da un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ interno, prefissato, ma qualunque; $U = U(x, y, z, t)$ una funzione regolare negli argomenti, che soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - C^2 \Delta U = 0.$$

Sia t_1 un istante fissato, e si convenga che il simbolo $\left(\frac{dU}{dn}\right)_{t=t_1-Ar}$ rappresenti la funzione che si ottiene sostituendo, a derivazione normale eseguita, $t_1 - Ar$ a t . Allora il valore che detta funzione assume nel punto P_1 e nell'istante t_1 , è dato dalla seguente formula dovuta a KIRCHHOFF (**):

$$4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = - \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dU}{dn}\right)_{t=t_1-Ar} - U(x, y, z, t_1 - Ar) \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{A}{r} \frac{\partial U(x, y, z, t_1 - Ar)}{\partial t_1} \frac{dr}{dn} \right] d\sigma.$$

(*) Per funzioni regolari intendo funzioni monodrome, finite, continue, (o almeno atte alla integrazione), assieme alle derivate che ho bisogno di considerare.

(**) KIRCHHOFF, *Vorles über math. Physik* (Band II, pag. 22-30). — VOLTERRA, *Sul principio di Huyghens* « Nuovo Cimento » (Serie III, Tomo XXXI, Anno 1892). — TEDONE, *Reale Accademia dei Lincei* (Vol. V, Serie 5.^a, pag. 357-360). — BURGATTI, *Sulla formula di Kirchhoff e sue estensioni* « Nuovo Cimento » (Serie V, Tomo XIV, Anno 1907).

Le equazioni di Maxwell-Hertz. — In ogni punto di S , le componenti delle forze elettromagnetiche sono legate dalle seguenti equazioni di MAXWELL-HERTZ (*):

$$\begin{aligned} A \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{E}, & A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\text{rot } \mathbf{H}, \\ \text{Div } \mathbf{H} &= 0, & \text{Div } \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Da queste, come è noto, si possono con facilità far discendere le altre (**):

$$\begin{aligned} (E_u) \quad \square E_u &= 0, \\ (H_u) \quad \square H_u &= 0; \end{aligned}$$

nelle quali E_u , H_u , denotano rispettivamente la componente della forza elettrica e magnetica secondo l'asse delle u (indicando con questa lettera uno qualunque degli assi coordinati).

Ciò premesso, mi avvio alla risoluzione del problema che mi occupa, nella ipotesi della superficie fissa.

CAPITOLO II.

Superficie fissa.

§ 1. ENUNCIATO DEL PROBLEMA, E SUA RISOLUZIONE.

Indichi σ il contorno chiuso, fisso, che limita il campo elettromagnetico S . Siano date le componenti della forza elettrica e magnetica, per qualsiasi istante di tempo, e su ogni punto di σ , in modo da soddisfare quelle relazioni (in numero di due) che sono necessaria conseguenza delle equazioni

(*) Le notazioni vettoriali che qui si trovano, sono quelle proposte dai sigg. BURALI-FORTI e MARCOLONGO. (Cfr. *Rend. del Circolo Matematico di Palermo*. Tom. XXIII e XXIV.)

(**) Il simbolo \square definisce l'operazione $A^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \dots \Delta$, ove Δ è l'operatore di LAPLACE.

di MAXWELL-HERTZ (*). Mi propongo il problema della determinazione univoca di dette componenti in qualunque istante nei punti interni a σ .

*Espressione della derivata normale di E_x (**).* — Innanzitutto dimostro che, nelle ipotesi ora enunciate, il valore della derivata normale delle componenti delle forze elettromagnetiche risulta di conseguenza. A tale scopo sia:

$$f(x, y, z) = 0$$

l'equazione di σ : ne prendo un pezzo per il quale valga la rappresentazione:

$$z = z(x, y);$$

e pongo con MONGE:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Osservo che, su questo pezzo di σ , $E_x(x, y, z, t, -Ar)$ diviene la funzione $E_x(x, y, z(x, y), t, -Ar)$, la quale, per le ipotesi ammesse, è conosciuta. Considero perciò il sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_x}{dx} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} p, & (1) \\ \frac{dE_x}{dy} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial z} q, & (2) \\ \frac{dE_y}{dx} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial z} p, & (3) \\ \frac{dE_y}{dy} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} q, & (4) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

(*) Che questa ipotesi sia necessaria risulta dalle considerazioni seguenti: Sia P un punto di σ : si assuma l'asse delle z nella direzione della normale in P a σ , con che la direzione degli altri due assi risulta ovviamente fissata. Fra le otto equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ, soltanto le due:

$$A \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}; \quad A \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x},$$

involgono derivate tangenziali: e perciò esse devono essere identicamente soddisfatte dai dati in superficie.

(**) In ciò che segue mi riferisco costantemente alla forza elettrica; facilmente si vedrà come le considerazioni che svolgerò, siano senz'altro applicabili alla forza magnetica.

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d E_z}{d x} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} p, & (5) \\
 \frac{d E_z}{d y} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} q, & (6) \\
 A \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, & (7) \\
 A \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, & (8) \\
 A \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. & (9)
 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

In esso, le prime sei equazioni discendono dalla regola di derivazione delle funzioni composte: le rimanenti sono tre delle otto ricordate equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ. Sottraendo la (2) dalla (3), tenendo presente la (9) ho:

$$\frac{d E_y}{d x} - \frac{d E_x}{d y} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} - A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} - A \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} p - \frac{\partial E_x}{\partial z} q. \quad (10)$$

Sommando la (1) con la (4) ricordando che:

$$\text{Div } \mathbf{E} = 0,$$

si trae:

$$\frac{d E_x}{d x} + \frac{d E_y}{d y} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} = - \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial z} p + \frac{\partial E_y}{\partial z} q. \quad (11)$$

Poichè dalle (5) e (8) scende l'equazione:

$$A \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{d E_z}{d x} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial z} p,$$

si ha, in virtù della (11), che:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d E_x}{d x} + \frac{d E_y}{d y} \right) p + A p \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \frac{\partial H_y}{\partial t} = \\
 = \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial z} p^2 + \frac{\partial E_y}{\partial z} p q;
 \end{aligned}$$

d'onde per la (10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{1}{1+p^2+q^2} & \left[\left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) p + \right. \\ & + \left(\frac{dE_x}{dy} - \frac{dE_y}{dx} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} - A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) q + \\ & \left. + \left(\frac{dE_z}{dx} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + q \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Quindi per le (1) e (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{dE_x}{dy} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{q}{1+p^2+q^2} & \left[\left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) p + \right. \\ & + \left(\frac{dE_x}{dy} - \frac{dE_y}{dx} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} - A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) q + \\ & \left. + \left(\frac{dE_z}{dx} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + q \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE_x}{dx} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{p}{1+p^2+q^2} & \left[\left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) p + \right. \\ & + \left(\frac{dE_x}{dy} - \frac{dE_y}{dx} + A \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} - A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) q + \\ & \left. + \left(\frac{dE_z}{dx} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + A \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} + q \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Se ora si indicano con α , β , γ , i coseni direttori della normale, volta verso l'interno dello spazio S , e si eseguiscano alcune semplici trasformazioni, si trova (*):

$$\begin{aligned} \frac{dE_x}{dn} = & \left. \begin{aligned} & \beta \left(\frac{dE_y}{dx} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) - \alpha \left(\frac{dE_y}{dy} + A \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \\ & + \gamma \left(\frac{dE_z}{dx} + A \frac{\partial E_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + A \left(\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

(*) Si assume $\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; $\beta = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; $\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$.

Questa espressione per $\frac{d E_x}{d n}$, assieme alle altre due per $\frac{d E_u}{d n}$ ($u = y, z$) dimostra quanto ho asserito in principio di questo paragrafo. Si badi però, (ciò che del resto è evidente), che nelle derivate parziali che compariscono in essa espressione si deve porre, $t = t_1 - A r$.

Per ragioni che scaturiranno in seguito, è opportuno trasformare l'espressione (II) ora ottenuta per la $\frac{d E_x}{d n}$. In virtù delle equazioni (3), (4), (5) del sistema (I), la (II) può anche scriversi così:

$$\begin{aligned} \frac{d E_x}{d n} = & \beta \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial z} p \right) - \alpha \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} q \right) + \gamma \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} p \right) + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t} (H_y \gamma - H_z \beta) = \left(\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial E_y}{\partial z} (\beta p - \alpha q) + \\ & + \gamma \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} p \right) + A \frac{\partial}{\partial t} (H_y \gamma - H_z \beta). \end{aligned}$$

Ovvero per la nota della pagina precedente:

$$\frac{d E_x}{d n} = \left(\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + A \frac{\partial}{\partial t} (H_y \gamma - H_z \beta). \quad (\text{III})$$

Ora si osservi che l'espressione (II) di $\frac{d E_x}{d n}$ è stata ricavata in base alla ipotesi che si tratti di un pezzo di superficie σ , per il quale valga la rappresentazione:

$$z = z(x, y).$$

Importa stabilire che l'espressione sussiste in ogni caso. All'uopo si osservi che sarà lecito risolvere rispetto a z la:

$$f(x, y, z) = 0,$$

ogni qualvolta:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0,$$

ogni qualvolta cioè le normali ai punti del pezzo di contorno considerato, non siano parallele al piano xy . Può darsi però, che per qualche pezzo di σ , questo fatto non si verifichi; allora non è più lecito porre la sua equazione

sotto l'aspetto anzidetto. In tale contingenza però la :

$$f(x, y, z) = 0,$$

sarà certamente risolubile rispetto ad una delle altre due variabili: x ed y . Se questa è la y , siccome le equazioni cui soddisfa E_x , hanno comportamento perfettamente simmetrico rispetto ad y e rispetto a z , basta evidentemente un materiale scambio di notazione per ritrovare la (II). Se questa è la x , basterà invece osservare che l'espressione di $\frac{dE_x}{dn}$, deve far riscontro alla (III), che era valida nella ipotesi della risolubilità rapporto a z . Per far vedere ciò, basta considerare un sistema di equazioni, analogo al sistema (I), dedotto dalla ipotesi che sia :

$$x = x(y, z),$$

ed eseguire un procedimento di calcolo simile a quello precedentemente usato.

Espressione di E_x , e delle altre componenti delle forze elettromagnetiche. — Applicando la formula di KIRCHHOFF alla equazione (E_x) del Cap. I ove si faccia $u = x$, tenendo conto della espressione (III) per $\frac{dE_x}{dn}$, si trae :

$$4\pi E_x(x_1, y_1, z_1, t_1) = - \\ - \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \right] \left(\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + A \frac{\partial}{\partial t_1} (H_y \gamma - H_z \beta) \left[- \right. \\ \left. - E_x \frac{d}{dn} + \frac{A}{r} \frac{\partial E_x}{\partial t_1} \frac{dr}{dn} \right] d\sigma.$$

Si osservi che, nelle derivate parziali rispetto a x, y, z , che compariscono sotto il segno \int , si deve pensare posto, $t = t_1 - Ar$. Inoltre si è scritto E_x invece di $E_x(x, y, z, t_1 - Ar)$: le derivate parziali rispetto a t_1 , hanno poi ovvio significato.

Ora trasformerò la espressione di $E_x(x_1, y_1, z_1, t_1)$ in modo che in essa figurino le componenti di \mathbf{E} secondo determinate direzioni.

A tale scopo pongo :

$$I = - \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left\{ \left(\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right\} d\sigma.$$

$$I_1 = - \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left\{ \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} d\sigma.$$

$$I_2 = - \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left\{ \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\} d\sigma.$$

Denoto con S' lo spazio contenuto in S , limitato da σ e dalla superficie sferica σ_0 , avente il centro nel punto di coordinate x_1, y_1, z_1 e un raggio conveniente, che indico ancora con r . L'integrale I_1 si può allora scrivere così :

$$I_1 = - \int_{\sigma + \sigma_0} \frac{1}{r} \left\{ \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} d\sigma + \int_{\sigma_0} \frac{1}{r} \left\{ \beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right\} d\sigma_0.$$

Si ha poi, ricordando il significato dei simboli spiegato nel Cap. I :

$$\frac{D \frac{E_y}{r}}{Dx} = \frac{\partial \frac{E_y}{r}}{\partial x} - A \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \frac{E_y}{r}}{\partial t_1};$$

d'onde moltiplicando per β , e integrando a tutto il contorno $\sigma + \sigma_0$:

$$\int_{\sigma + \sigma_0} \beta \frac{D \frac{E_y}{r}}{Dx} d\sigma = \int_{\sigma + \sigma_0} \beta \frac{\partial \frac{E_y}{r}}{\partial x} d\sigma - A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma + \sigma_0} \frac{E_y}{r} \beta \frac{\partial r}{\partial x} d\sigma.$$

Analogamente :

$$\int_{\sigma + \sigma_0} \alpha \frac{D \frac{E_y}{r}}{Dy} d\sigma = \int_{\sigma + \sigma_0} \alpha \frac{\partial \frac{E_y}{r}}{\partial y} d\sigma - A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma + \sigma_0} \frac{E_y}{r} \alpha \frac{\partial r}{\partial y} d\sigma.$$

Ma per il lemma di GREEN :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma + \sigma_0} \beta \frac{D \frac{E_y}{r}}{Dx} d\sigma &= - \int_{S'} \frac{\partial}{\partial y} \frac{D \frac{E_y}{r}}{Dx} dS'; \\ \int_{\sigma + \sigma_0} \alpha \frac{D \frac{E_y}{r}}{Dy} d\sigma &= - \int_{S'} \frac{\partial}{\partial x} \frac{D \frac{E_y}{r}}{Dy} dS'; \end{aligned}$$

dalle quali si trae :

$$\int_{\sigma+\sigma_0} \beta \frac{D E_y}{D x} \frac{r}{D} d\sigma - \int_{\sigma+\sigma_0} \alpha \frac{D E_y}{D y} \frac{r}{D} d\sigma = 0.$$

Quindi :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma+\sigma_0} \frac{1}{r} \left[\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right] d\sigma &= \int_{\sigma+\sigma_0} E_y \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \right) d\sigma - \\ &- A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma+\sigma_0} E_y \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{r}{r^2} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{r}{r^2} \right) \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned}$$

Risulta perciò :

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_{\sigma} E_y \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \right) d\sigma + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} E_y \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{r}{r^2} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{r}{r^2} \right) \frac{d\sigma}{r} - \\ &- \int_{\sigma_0} E_y \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \right) d\sigma_0 + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma_0} E_y \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{r}{r^2} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{r}{r^2} \right) \frac{d\sigma_0}{r} + \\ &+ \int_{\sigma_0} \frac{1}{r} \left[\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right] d\sigma_0. \end{aligned}$$

Si osservi che :

$$\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \left(\beta \frac{\partial r}{\partial x} - \alpha \frac{\partial r}{\partial y} \right),$$

la quale espressione è identicamente nulla sulla superficie sferica σ_0 . Ne consegue :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_0} E_y \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \right) d\sigma_0 &= 0 \\ A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma_0} E_y \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{r}{r^2} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{r}{r^2} \right) \frac{d\sigma_0}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Dacchè in coordinate sferiche r, ϑ, φ , si ha :

$$d\sigma_0 = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

è chiaro che :

$$\int_{\sigma_0} \left(\frac{1}{r} \right) \left(\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) d\sigma_0$$

converge a zero assieme ad r . Risulta quindi, col tendere di r a zero :

$$I_1 = - \int_{\sigma} E_y \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\sigma + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} E_y \left(\alpha \frac{\partial r}{\partial y} - \beta \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{d\sigma}{r}.$$

In modo del tutto analogo si trae :

$$I_2 = - \int_{\sigma} E_z \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\sigma + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} E_z \left(\alpha \frac{\partial r}{\partial z} - \gamma \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{d\sigma}{r}.$$

Si ha perciò, in virtù degli integrali I_1 e I_2 ora ottenuti :

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\sigma} \left[E_y \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) + E_z \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) \right] d\sigma + \\ &+ A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} \left[E_y \left(\alpha \frac{\partial r}{\partial y} - \beta \frac{\partial r}{\partial x} \right) + E_z \left(\alpha \frac{\partial r}{\partial z} - \gamma \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right] \frac{d\sigma}{r} = \\ &= \int_{\sigma} \left[\left(E_x \alpha + E_y \beta + E_z \gamma \right) \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right\} - \left(E_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + E_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + E_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) \alpha \right] d\sigma + \\ &+ A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} \left[\left(E_x \frac{\partial r}{\partial x} + E_y \frac{\partial r}{\partial y} + E_z \frac{\partial r}{\partial z} \right) \alpha - \left(E_x \alpha + E_y \beta + E_z \gamma \right) \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \right\} \right] \frac{d\sigma}{r}, \end{aligned}$$

la quale espressione, denotando con E_r e con E_n rispettivamente la componente di \mathbf{E} secondo il raggio r e secondo la normale n al contorno σ volta verso l'interno di S , si trasforma nell'altra :

$$I = \int_{\sigma} (E_r \cos nx - E_n \cos rx) \frac{d\sigma}{r^2} + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r \cos nx - E_n \cos rx) \frac{d\sigma}{r}.$$

La espressione per $E_x(x_1, y_1, z_1, t_1)$ trovata precedentemente, può perciò essere scritta così:

$$\begin{aligned} 4\pi E_x(x_1, y_1, z_1, t_1) = & \int_{\sigma} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{d\sigma}{r^2} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{d\sigma}{r} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_z \cos ny - H_y \cos nz) \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned}$$

Per le altre due componenti di \mathbf{E} si avranno le espressioni:

$$\begin{aligned} 4\pi E_y(x_1, y_1, z_1, t_1) = & \int_{\sigma} (E_r \cos ny - E_n \cos ry - E_y \cos rn) \frac{d\sigma}{r^2} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r \cos ny - E_n \cos ry - E_y \cos rn) \frac{d\sigma}{r} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_x \cos nz - H_z \cos nx) \frac{d\sigma}{r}. \\ 4\pi E_z(x_1, y_1, z_1, t_1) = & \int_{\sigma} (E_r \cos nz - E_n \cos rz - E_z \cos rn) \frac{d\sigma}{r^2} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r \cos nz - E_n \cos rz - E_z \cos rn) \frac{d\sigma}{r} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_y \cos nx - H_x \cos ny) \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned}$$

Per trovare le formule che dànno le componenti di \mathbf{H} basta osservare che il sistema di equazioni (I) è identico, nella forma, a quello che si dovrebbe considerare per determinare le componenti della forza magnetica, a meno del cambiamento di segno di A in $-A$, nelle ultime tre equazioni. Si avrà perciò:

$$\begin{aligned} 4\pi H_x(x_1, y_1, z_1, t_1) = & \int_{\sigma} (H_r \cos nx - H_n \cos rx - H_x \cos rn) \frac{d\sigma}{r^2} + \\ & + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_r \cos nx - H_n \cos rx - H_x \cos rn) \frac{d\sigma}{r} - \\ & - A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_z \cos ny - E_y \cos nz) \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi H_y(x_1, y_1, z_1, t_1) &= \int_{\sigma} (H_x \cos ny - H_n \cos ry - H_y \cos rn) \frac{d\sigma}{r^2} + \\
&+ A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_x \cos ny - H_n \cos ry - H_y \cos rn) \frac{d\sigma}{r} - \\
&- A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_x \cos nz - E_z \cos nx) \frac{d\sigma}{r}. \\
4\pi H_z(x_1, y_1, z_1, t_1) &= \int_{\sigma} (H_r \cos nz - H_n \cos rz - H_z \cos rn) \frac{d\sigma}{r^2} + \\
&+ A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_r \cos nz - H_n \cos rz - H_z \cos rn) \frac{d\sigma}{r} - \\
&- A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_y \cos nx - E_x \cos ny) \frac{d\sigma}{r}.
\end{aligned}$$

È quasi superfluo avvertire che si è scritto E_u , H_u , in luogo di $E_u(x, y, z, t_1 - Ar)$, $H_u(x, y, z, t_1 - Ar)$. ($u = x, y, z, r, n$).

§ 2. OSSERVAZIONI SULL'INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE $\square E_u = 0$.

Se E_u soddisfa in S l'equazione differenziale:

$$\square E_u = 0, \quad (1)$$

e se sono conosciuti sul contorno σ che limita S , per qualsiasi istante di tempo i suoi valori, e quelli della sua derivata normale, la formula di KIRCHHOFF applicata alla (1) dà il valore della funzione E_u in un punto interno P_1 , generico, ma prefissato, in qualunque istante di tempo. E tale valore, col tendere del punto P_1 ad un punto generico P del contorno, tende al valore che in detto punto viene assunto da E_u . Ciò accade pure per la sua derivata di direzione.

Si supponga ora che siano dati arbitrariamente, per qualsiasi istante di tempo, sul contorno σ i valori di E_u , e della sua derivata normale. In tale contingenza sorgono le domande:

a) L'espressione data dalla applicazione della formula di KIRCHHOFF alla (1), rappresenta una funzione che in S soddisfa detta equazione?

b) Quando il punto P_1 tende a P , i valori di E_n e della sua derivata di direzione, tendono rispettivamente ai valori che per E_n e per $\frac{dE_n}{dn}$, vennero assegnati in P ?

La prima domanda ammette risposta affermativa, come è facile vedere eseguendo delle ovvie derivazioni sulla espressione di cui è parola.

Per renderci conto della domanda (b), si consideri ciò che avviene nel caso statico, cioè quando le forze non variano col tempo. In tale circostanza la componente E_n soddisfa in S l'equazione di LAPLACE:

$$\Delta E_n = 0.$$

Ora è noto che, se si danno arbitrariamente sul contorno σ i valori di E_n , oppure quelli della $\frac{dE_n}{dn}$, si può determinare in S rispettivamente in modo univoco, o a meno di una costante arbitraria, una funzione armonica che ottempera alle condizioni al contorno. Ne consegue, che le due successioni di valori in superficie non possono assegnarsi ad arbitrio, ma che anzi una è necessaria conseguenza dell'altra. Ciò lascia presumere che, nel caso delle forze variabili col tempo, la domanda (b) non ammetta, in generale, risposta affermativa.

Si deve però osservare, che ciò accade quando si vuole l'integrale della (1) regolare in tutto S . Il fatto (b) si verifica (il fatto (a) si verifica pure) invece, quando si esige la soluzione della (1) in una regione assai ristretta dello spazio, (*soluzione locale*, secondo HADAMARD) la quale però non ha importanza per il problema fisico di cui mi occupo.

Dimostrò infatti il sig. HADAMARD che, se si considera la funzione data dalla applicazione della formula di KIRCHHOFF alla equazione (1) in una piccola striscia di spazio avente per sezione mediana (mi si permetta la parola) la superficie stessa, in essa regione la funzione ottempera anche alla condizione (b).

Del resto, se i dati in superficie sono olomorfi, il teorema di CAUCHY-KOWALESKA, assicura in detta striscia l'esistenza, l'unicità, e la analiticità di una soluzione della equazione (1), che soddisfa le condizioni al contorno.

Queste soluzioni locali esistono sempre, quando la varietà che porta i dati è una superficie fissa. Invero le considerazioni del sig. HADAMARD, e il

teorema di CAUCHY-KOWALESKA, perdono la loro validità soltanto quando i dati del problema sono sopra una « varietà caratteristica. » Ora, seguendo la definizione di BEUDON e HADAMARD (*), si trova subito che, nel nostro caso, le varietà caratteristiche :

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

sono integrali della equazione :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \left(A \frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 = 0.$$

Se ne deduce, in particolare, che nessuna superficie fissa può essere caratteristica.

§ 3. GLI OTTENUTI INTEGRALI SODDISFANO IL SISTEMA DI EQUAZIONI DI MAXWELL-HERTZ.

Nelle ipotesi che E_u e H_u soddisfino le equazioni (E_u) ed (H_u) del Capitolo I, e che siano dati al contorno σ che limita S per qualsiasi istante di tempo i loro valori, in modo, che siano rispettate le condizioni imposte dall'enunciato del problema che mi sono proposto di risolvere, le espressioni che ho trovato per queste funzioni nel § 1, fanno conoscere i valori che dette funzioni assumono nei punti di S , in qualsiasi istante di tempo. Ma non si può dire che esse espressioni soddisfino le equazioni di MAXWELL-HERTZ, perchè se le equazioni (E_u) ed (H_u) ne sono necessaria conseguenza, non sussiste però la reciproca.

Dimostrerò ora che, nelle ipotesi ammesse nell'enunciato del problema, gli integrali E_u e H_u prima ottenuti, soddisfano pure il sistema di MAXWELL-HERTZ.

A tale uopo si consideri, ad esempio, la funzione :

$$f = A \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

(*) BEUDON, *Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles* (Bulletin de la Société mathématique de France. Tom. 25, 1908. — HADAMARD, *Léçons sur la propagation des ondes, etc.* (Hermann, Paris, 1903, p. 263-271).

la quale è identicamente nulla per qualsiasi istante di tempo, quando il punto x, y, z , è situato sul contorno. Ora io dimostrerò che la derivata normale di f è pure zero. Con ciò l'annullarsi di f anche nei punti appartenenti ad S , discenderà dalla formula di KIRCHHOFF, che è effettivamente applicabile, perchè anche f soddisfa la equazione canonica dei piccoli moti. Per semplificare i calcoli, procedo nel modo seguente.

Fissato un punto generico P di σ , si assuma l'asse delle z nella direzione della normale n in P a σ ; con chè la direzione degli altri due assi risulta ovviamente fissata. Dalla precedente espressione di f si trae allora :

$$\frac{df}{dn} = A \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z}.$$

Poichè per qualsiasi punto di S :

$$\square E_r = 0,$$

e in qualsiasi punto di σ :

$$\text{Div } \mathbf{E} = 0;$$

sarà ancora :

$$\frac{df}{dn} = A \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) - A^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial y^2}.$$

Ma, essendo per qualsiasi istante di tempo, sopra σ :

$$A \frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

si avrà :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dn} &= A \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \equiv 0. \quad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

§ 4. CASO DEI CAMPI ELETTROMAGNETICI STAZIONARI.

Un corollario del lemma di Stokes. — Conservando le notazioni precedenti, sia V una generica funzione regolare dei punti del contorno chiuso σ . Applicando il lemma di STOKES alle funzioni:

$$0; \quad V \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r}; \quad -V \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r};$$

si trae:

$$\int_{\sigma} \left[- \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(V \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(V \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right) \right\} \alpha + \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} \right) \beta + \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right) \gamma \right] d\sigma = 0.$$

Esplicitando le derivate ed osservando che:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y} \frac{1}{r} = - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \frac{1}{r}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_1} \frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y} \frac{1}{r}, \quad \text{ecc.}$$

si ricava:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \left[V \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \frac{1}{r} \right\} \alpha - \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right\} \alpha + \left\{ V \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y} \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} \right\} \beta + \right. \\ \left. + \left\{ V \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z} \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right\} \gamma \right] d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Poichè nel nostro caso:

$$\Delta \frac{1}{r} = 0;$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \left[V \left\{ - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{r} \alpha + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y} \frac{1}{r} \beta + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z} \frac{1}{r} \gamma \right\} + \frac{\partial V}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \alpha + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} \beta + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \gamma \right\} - \right. \\ \left. - \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right\} \alpha \right] d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Se poi si osserva che :

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} \frac{1}{r} = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} \frac{1}{r} (u = x, y, z); \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial n} \frac{1}{r} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{r} \alpha + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y} \frac{1}{r} \beta + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z} \frac{1}{r} \gamma,$$

si trae la formula che contiene il corollario del lemma anzidetto :

$$\int_{\sigma} V \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial n} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\sigma} \left(\frac{dV}{dr} \cos n x - \frac{\partial V}{\partial x} \cos r n \right) \frac{d\sigma}{r^2}.$$

Analogamente si trae :

$$\int_{\sigma} V \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial n} \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\sigma} \left(\frac{dV}{dr} \cos n u_1 - \frac{\partial V}{\partial u_1} \cos r n \right) \frac{d\sigma}{r^2} \quad (u_1 = y_1, z_1).$$

Ciò premesso, si osservi che le espressioni di E_u e di H_u trovate nel § 1, nel caso dei campi elettromagnetici stazionari, si riducono alle seguenti :

$$4\pi E_u(x_1, y_1, z_1) = \int_{\sigma} \left[E_r \cos n u - E_n \cos r u - E_u \cos r n \right] \frac{d\sigma}{r^2}. \quad (1)$$

($u = x, y, z$)

$$4\pi H_u(x_1, y_1, z_1) = \int_{\sigma} \left[H_r \cos n u - H_n \cos r u - H_u \cos r n \right] \frac{d\sigma}{r^2}. \quad (2)$$

In virtù delle equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ, le forze \mathbf{E} ed \mathbf{H} derivano da potenziali armonici. Dimostrerò ora, considerando, per esempio, la forza elettrica, che le formule (1) sono sostanzialmente identiche a quelle che si otterrebbero, derivando la classica formula di GREEN :

$$4\pi V(x_1, y_1, z_1) = - \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{dV}{dn} - V \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right] d\sigma,$$

relativa al potenziale V di detta forza.

Si ha infatti, derivando rispetto ad u_1 : ($u_1 = x_1, y_1, z_1$)

$$4\pi \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial u_1} = - \int_{\sigma} \left[E_n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial u_1} - V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial u_1 \partial n} \right] d\sigma;$$

ovvero, per il lemma ora trovato:

$$4\pi \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial u_1} = \int_{\sigma} \left[E_r \cos nu - E_n \cos ru - E_n \cos rn \right] \frac{d\sigma}{r^2},$$

d'onde:

$$4\pi \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial u_1} = E_n. \quad \text{c. d. d.}$$

CAPITOLO III.

Superficie mobile.

§ 6. ESPRESSIONI DELLE FORZE ELETTROMAGNETICHE FORNITE DAL PROCEDIMENTO GREEN-VOLTERRA.

S'interpretino x, y, z, t , come coordinate Cartesiane ortogonali dei punti di uno spazio S_4 a quattro dimensioni, e indichino: Σ_1 una varietà a tre dimensioni e $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ un punto di S_4 . Questi elementi siano tali che la varietà conica C (*conoide caratteristico*):

$$c(t_1 - t) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

stacchi sulla varietà Σ_1 una porzione finita Σ tale, che le parallele condotte all'asse delle t , dai punti di un piccolo intorno di P_1 , la intersechino in un solo punto. Denotino ancora: S'_4 quella parte di S_4 che è limitata dalla varietà conica C , dalla varietà cilindrica Γ di raggio ε (piccolo a piacere):

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = \varepsilon^2$$

e dalla varietà Σ' staccata su Σ_1 dalle dette varietà; n la direzione della nor-

male al contorno di S'_4 che entra in tale spazio, e si ponga $\cos nx = \alpha$, $\cos ny = \beta$, $\cos nz = \gamma$, $\cos nt = \delta$. Si supponga che in S'_4 si abbia $t_1 > t$. Siano date per qualsiasi istante di tempo sopra Σ le componenti delle forze elettromagnetiche, in modo da soddisfare le condizioni (che si è visto essere in numero di due) che sono necessaria conseguenza delle equazioni di MAXWELL-HERTZ. Mi propongo il problema della determinazione univoca di dette componenti nel punto P_1 .

Indichino U ed E_x (si conservano i simboli precedentemente usati) due funzioni regolari dei punti dello spazio limitato da C e da Σ , che ivi soddisfino l'equazione:

$$\square = 0.$$

Si avrà:

$$\int_{S'_4} (U \square E_x - E_x \square U) dS'_4 = 0;$$

ovvero, integrando per parti:

$$\left. \begin{aligned} & - \int_{C+\Gamma+\Sigma'} U \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta - c^2 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \alpha + \frac{\partial E_x}{\partial y} \beta + \frac{\partial E_x}{\partial z} \gamma \right) \right\} d\Sigma + \\ & + \int_{C+\Gamma+\Sigma'} E_x \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \delta - c^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma \right) \right\} d\Sigma = 0. \end{aligned} \right\} \quad (M)$$

La funzione:

$$c \frac{t_1 - t}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}} - 1,$$

è regolare in S_4 e soddisfa in esso, come è facile provare, l'equazione $\square = 0$; inoltre essa si annulla sulla varietà conica C . La si assuma quale funzione U . Si ponga:

$$M_1 = \int_{C+\Gamma+\Sigma'} U \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta - c^2 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \alpha + \frac{\partial E_x}{\partial y} \beta + \frac{\partial E_x}{\partial z} \gamma \right) \right\} d\Sigma.$$

Se si risguardano come conosciute le componenti delle forze elettromagnetiche anche su C e su Γ , sarà lecito considerare un sistema di equazioni, identico a quello (I) considerato nel caso del contorno fisso, con la sola differenza che, nelle equazioni di esso, la variabile t deve essere considerata come indipendente, e mai dovrà essere sostituita da $t_1 - Ar$. Applicando a

detto sistema il procedimento che ho usato per calcolare la $\frac{dE_x}{dn}$ nel caso del contorno fisso, si trae:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} \alpha + \frac{\partial E_x}{\partial y} \beta + \frac{\partial E_x}{\partial z} \gamma = & \left(\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \\ & + A \left(\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

In virtù di tale formula, la M_1 può anche scriversi così:

$$\begin{aligned} M_1 = \int_{C+\Gamma+\Sigma'} U \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta - c^2 \left[\left(\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + A \left(\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \right] \right\} d\Sigma. \end{aligned}$$

Poichè U e δ sono nulli rispettivamente su C e su Γ , sarà:

$$\int_{C+\Gamma+\Sigma'} U \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta d\Sigma = \int_{\Sigma'} U \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta d\Sigma.$$

Per la trasformazione esposta nel § 1, tenendo presente che t è qui variabile indipendente, si trae:

$$\begin{aligned} \int_{C+\Gamma+\Sigma'} U \left[\left(\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right] d\Sigma = \\ = \int_{\Sigma'} \left[E_y \left(\alpha \frac{\partial U}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial x} \right) + E_z \left(\alpha \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] d\Sigma. \end{aligned}$$

Ma è facile constatare che sulle varietà conica e cilindrica sussistono le identità:

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad \alpha \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Si avrà perciò:

$$\begin{aligned} \int_{C+\Gamma+\Sigma'} U \left[\left(\beta \frac{\partial E_y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) + \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right] d\Sigma = \\ = \int_{\Sigma'} \left[E_y \left(\alpha \frac{\partial U}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial x} \right) + E_z \left(\alpha \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] d\Sigma. \end{aligned}$$

Finalmente per l'annullarsi di U su C :

$$\int_{c+I+\Sigma'} U \left[\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right] d\Sigma = \int_{I+\Sigma'} U \left[\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right] d\Sigma.$$

Sarà quindi, per le trasformazioni ora eseguite:

$$\begin{aligned} M_1 = & \int_{\Sigma'} U \frac{\partial E_x}{\partial t} \delta d\Sigma - c^2 \int_{\Sigma'} \left[E_y \left(\alpha \frac{\partial U}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial x} \right) + E_z \left(\alpha \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] d\Sigma - \\ & - c \int_{I+\Sigma'} U \left[\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right] d\Sigma. \end{aligned}$$

Se si osservano i calcoli fatti nel § 1, ricordando che (*):

$$u = c \frac{t_1 - t}{r} - 1,$$

e ponendo:

$$E_n = E_x \cos nx + E_y \cos ny + E_z \cos nz$$

$$E_r = E_x \cos rx + E_y \cos ry + E_z \cos rz,$$

facilmente si trae:

$$\begin{aligned} M_1 = & \int_{\Sigma'} \left(c \frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \cos nt + c \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - c \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) d\Sigma + \\ & + c^2 \int_{\Sigma'} \left(E_r \cos nx - E_n \cos rx \right) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma - c \int_{I'} \left(c \frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \left(\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) d\Sigma. \end{aligned}$$

Si ponga ancora:

$$M_2 = \int_{c+I+\Sigma'} E_x \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \delta - c^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma \right) \right\} d\Sigma.$$

Si osservi che sulla varietà conica sussiste l'identità:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \delta - c^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma \right) = 0;$$

(*) Si è posto $r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$.

e sulla varietà cilindrica si ha :

$$\delta = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma = -c \frac{t_1 - t}{r^2} = -c \frac{t_1 - t}{\varepsilon^2};$$

cosicchè :

$$M_2 = c^3 \int_{\Sigma'} E_x \frac{t_1 - t}{\varepsilon^2} d\Sigma + \int_{\Sigma'} E_x \left[c^3 \frac{t_1 - t}{r^2} \cos n r - \frac{c}{r} \cos n t \right] d\Sigma.$$

Indicando con $d\omega$ l'elemento di superficie sferica di raggio unitario, sarà :

$$\varepsilon^3 d\omega dt$$

l'elemento della varietà cilindrica. Perciò denotando con t_0 la coordinata t del punto ove la retta $x = x_1, y = y_1, z = z_1$, incontra la varietà Σ , e ω la superficie della sfera ora considerata, risulta :

$$M_2 = c^3 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) dt \int_{\omega} E_x d\omega + \int_{\Sigma'} E_x \left[c^3 \frac{t_1 - t}{r^2} \cos n r - \frac{c}{r} \cos n t \right] d\Sigma.$$

Per queste trasformazioni e, ove si ricordi che, per un noto teorema :

$$4\pi E_x(x_1, y_1, z_1, t) = \int_{\omega} E_x d\omega,$$

l'identità (M) può anche scriversi così :

$$\begin{aligned} 4\pi c^3 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) E_x(x_1, y_1, z_1, t) dt + c \int_{\Sigma'} \left(c \frac{t_1 - t}{\varepsilon} - 1 \right) \left(\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) d\Sigma = \\ = c^3 \int_{\Sigma'} (E_r \cos n x - E_n \cos r x - E_x \cos r n) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma + \\ + \int_{\Sigma'} \left(c \frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \cos n t + c \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos n y - c \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos n z \right) d\Sigma + \\ + c \int_{\Sigma'} E_x \cos n t \frac{d\Sigma}{r}. \end{aligned}$$

E questa, facendo tendere ε allo zero, si trasforma nell'altra :

$$\begin{aligned}
 4\pi c^3 \int_{t_0}^{t_1} E_x(x_1, y_1, z_1, t) (t_1 - t) dt = \\
 = c^3 \int_{\Sigma} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma + \\
 + \int_{\Sigma} \left(c \frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \cos nt + c \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) d\Sigma + \\
 + c \int_{\Sigma} E_x \cos nt \frac{d\Sigma}{r}.
 \end{aligned}$$

Derivando due volte rispetto a t_1 , ricordando che sulla intersezione di C con Σ sussiste l'identità :

$$c \frac{t_1 - t}{r} - 1 = 0,$$

ciò che permette di derivare come se la porzione Σ , fosse indipendente da t_1 , e dividendo per c^3 , si ottiene finalmente la formula :

$$\begin{aligned}
 4\pi E_x(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma + \\
 + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma} \left(A \frac{\partial E_x}{\partial t} \cos nt + \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) \frac{d\Sigma}{r} + \\
 + A^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} E_x \cos nt \frac{d\Sigma}{r}.
 \end{aligned}$$

In modo analogo si trova :

$$\begin{aligned}
 4\pi E_y(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} (E_r \cos ny - E_n \cos ry - E_y \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma + \\
 + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma} \left(A \frac{\partial E_y}{\partial t} \cos nt + \frac{\partial H_x}{\partial t} \cos nz - \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos nx \right) \frac{d\Sigma}{r} + \\
 + A^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} E_y \cos nt \frac{d\Sigma}{r}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 \pi E_z(x_1, y_1, z_1, t_1) = & \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} (\bar{E}_r \cos n z - E_n \cos r z - E_z \cos r n) \frac{t_1 - t}{r^3} d\Sigma + \\
& + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma} \left(A \frac{\partial E_z}{\partial t} \cos n t + \frac{\partial H_n}{\partial t} \cos n x - \frac{\partial H_x}{\partial t} \cos n y \right) \frac{d\Sigma}{r} + \\
& + A^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} E_z \cos n t \frac{d\Sigma}{r}.
\end{aligned}$$

Le componenti della forza magnetica \mathbf{H} , mercè l'osservazione fatta nel caso del contorno fisso, risultano ovviamente dalle precedenti componenti della forza \mathbf{E} .

Le trovate espressioni per le forze elettromagnetiche soddisfano, nelle ipotesi ammesse nell'enunciato del problema, il sistema di equazioni di MAXWELL-HERTZ. A questa conclusione si arriva come segue. Si consideri la funzione f del § 3: in virtù del calcolo ivi esposto è:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \gamma = 0.$$

Se ora si applica a detta funzione il procedimento GREEN-VOLTERRA, per la identità ora scritta, si trova che f si annulla anche nel punto P_1 .

§ 6. DISCUSSIONE DELLE FORMULE TROVATE.

Se si dà alla coordinata t del paragrafo precedente il suo significato ordinario (tempo), il problema ora trattato si può enunciare così:

Sia σ una superficie chiusa, mobile, dello spazio fisico sulla quale, per ogni istante di tempo, siano date le componenti della forza elettrica e magnetica in modo da soddisfare le condizioni (che si è visto, nel Cap. II, essere in numero di due) che sono necessaria conseguenza delle equazioni indefinite di MAXWELL-HERTZ. Mi propongo il problema della determinazione univoca di dette componenti, in qualsiasi istante di tempo, nei punti interni a σ .

Una superficie variabile col tempo dello spazio ordinario, si può riguardare come una varietà fissa dello spazio S_4 a quattro dimensioni. Ma non è

lecito dare « *a priori* » per espressioni delle forze elettromagnetiche quelle trovate nel paragrafo precedente, per il fatto che la varietà che porta i dati in detto paragrafo, deve soddisfare certe condizioni restrittive. Le quali, tradotte in linguaggio ordinario, impongono delle restrizioni alla mobilità del contorno. Perciò, per potere assumere per espressioni delle forze elettromagnetiche quelle del § 5, occorrerà esaminare, in base alle speciali ipotesi cinematiche che caratterizzano la variabilità del contorno, se sono soddisfatte le condizioni restrittive ammesse per la varietà Σ_1 . Quando questo sia constatato, gioverà liberare le trovate espressioni dalla forma iperspaziale, mettendo in evidenza lo spazio fisico e il tempo.

§ 7. CASI PARTICOLARI NOTEVOLI.

Si consideri una superficie fissa e chiusa dello spazio fisico. Essa, nello spazio S_4 , si può considerare come una varietà cilindrica con le generatrici parallele all'asse delle t . Limito « inferiormente » detta varietà con uno spazio piano Ω di equazioni $t = t_0$, indico con Λ quel semicilindro nel quale $t > t_0$ (*), e considero la varietà $\Lambda + \Omega$. Essa soddisfa le condizioni ammesse per la Σ_1 del § 5.

Dimostrerò ora che le espressioni per le forze elettromagnetiche di detto paragrafo si riducono, nelle ipotesi ora ammesse, a quelle trovate nel caso del contorno fisso. È evidente, del resto, che ciò debba avvenire. A tale uopo si indichi con σ l'intersezione di Λ con Ω , e si supponga ulteriormente che la intersezione della varietà $\Lambda + \Omega$ con la varietà conica C , appartenga a Λ .

Ora si osservi che sulla varietà Λ :

$$\cos n t = 0, \quad (1)$$

e sullo spazio Ω :

$$t = t_0 = \text{Costante}; \quad \cos n x = \cos n y = \cos n z = \cos r n = 0; \quad \cos n t = 1. \quad (2)$$

Ciò posto (prendendo in ispeciale considerazione la espressione del § 5

(*) « Inferiormente » sta a significare che si ha su Λ $t > t_0$.

ottenuta per E_x), si ponga :

$$N = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Sigma.$$

La varietà Σ è composta ora dalle due varietà Λ e Ω ; per cui:

$$N = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Lambda} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Lambda + \\ + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Omega} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Omega.$$

Ma per le relazioni (2):

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Omega} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Omega = 0;$$

cosicchè resta :

$$N = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Lambda} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} d\Lambda.$$

Se si osserva che sull'intersezione di C con Λ :

$$c \frac{t_1 - t}{r^2} - 1 = 0,$$

ossia :

$$t = t_1 - Ar;$$

e che la varietà semicilindrica Λ può pensarsi decomposta in striscie di ampiezza $d\tau$ comprese fra due generatrici vicinissime, si vede che :

$$N = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1 - Ar} (E_r \cos nx - E_n \cos rx - E_x \cos rn) \frac{t_1 - t}{r^2} dt.$$

La funzione sotto il segno d'integrale semplice, racchiusa tra parentesi,

è indipendente da t_1 ; cosicchè, esplicitando la derivata seconda, si trae:

$$N = \int_{\sigma} (E_r^{(*)} \cos nx - E_n^{(*)} \cos rx - E_z^{(*)} \cos rn) \frac{d\sigma}{r^3} + \\ + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r^{(*)} \cos nx - E_n^{(*)} \cos rx - E_z^{(*)} \cos rn) \frac{d\sigma}{r}.$$

In questi integrali si sono segnate con asterisco quelle funzioni nelle quali al posto di t deve esser posto $t_1 - Ar$: questa notazione sarà mantenuta in seguito.

Si ponga ancora:

$$N_1 = A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma} \left(A \frac{\partial E_r}{\partial t} \cos nt + \frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) \frac{d\Sigma}{r},$$

e si noti che il contributo relativo a Ω è nullo, perchè l'integrale risulta indipendente da t_1 ; mentre sopra Λ , $\cos nt = 0$. Rimane così:

$$N_1 = A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Lambda} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) \frac{d\Lambda}{r} = \\ = A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1 - Ar} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) \frac{dt}{r} = \\ = A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} \left(H_z^{(*)} \cos ny - H_y^{(*)} \cos nz \right) \frac{d\sigma}{r}.$$

Finalmente per le (1) e (2):

$$A^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma} E_r \cos nt \frac{d\Sigma}{r} = 0.$$

In virtù di queste trasformazioni di N e N_1 , risulta:

$$4\pi E_r(x_1, y_1, z_1, t_1) = \int_{\sigma} (E_r^{(*)} \cos nx - E_n^{(*)} \cos rx - E_z^{(*)} \cos rn) \frac{d\sigma}{r^3} + \\ + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (E_r^{(*)} \cos nx - E_n^{(*)} \cos rx - E_z^{(*)} \cos rn) \frac{d\sigma}{r} + \\ + A \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} (H_r^{(*)} \cos ny - H_y^{(*)} \cos nz) \frac{d\sigma}{r}:$$

espressione che è identica a quella ottenuta per $E_x(x_1, y_1, z_1, t_1)$ nel caso del contorno fisso.

Si supponga finalmente che una superficie chiusa dello spazio ordinario si muova rigidamente di moto traslatorio uniforme. Essa genera allora, nello spazio S_4 , una varietà cilindrica. Limito « inferiormente » detta varietà con uno spazio piano Ω , e indico con Λ il semicilindro nel quale $t > t_0$. La varietà $\Lambda + \Omega$ ottempera alle condizioni ammesse per la Σ_1 , e perciò le espressioni delle forze elettromagnetiche sono quelle trovate nel § 5, a patto che le generatrici del conoide caratteristico incontrino a distanza finita quelle della varietà cilindrica. Il che avviene certamente, ogni qualvolta non siano eguali gli angoli che dette rette formano rispettivamente con l'asse delle t . Questa condizione impone una restrizione alla mobilità della superficie: dico che essa è certamente soddisfatta, quando la velocità v del moto del contorno è diversa da quella c della luce.

Invero, se (x_0, y_0, z_0) è la posizione occupata da un punto generico della superficie mobile nell'istante $t = 0$, e v_x, v_y, v_z , sono le componenti della velocità v secondo gli assi x, y, z , le equazioni del moto di detto punto saranno:

$$x = x_0 + v_x t, \quad y = y_0 + v_y t, \quad z = z_0 + v_z t.$$

Sono queste le equazioni, che assieme alla identità:

$$t = t,$$

danno quelle della generatrice che passa per il punto $(x_0, y_0, z_0, 0)$ della varietà cilindrica, considerata nello spazio S_4 . Indicando con λ un fattore di proporzionalità, i coseni direttori di detta generatrice g , saranno:

$$\cos g x = \lambda v_x, \quad \cos g y = \lambda v_y, \quad \cos g z = \lambda v_z, \quad \cos g t = \lambda.$$

D'onde per essere:

$$\overline{\cos g x}^2 + \overline{\cos g y}^2 + \overline{\cos g z}^2 + \overline{\cos g t}^2 = 1;$$

sarà:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}:$$

quindi :

$$\cos g t = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}. \quad (3)$$

D'altra parte, se si dice g_1 una generica generatrice della varietà conica C , si ha (*):

$$\operatorname{tg} g_1 t = c;$$

d'onde :

$$\cos g_1 t = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}. \quad (4)$$

Per poter determinare il valore di E_u e di H_u nel punto P_1 , si deve avere :

$$(g t)^{-1} \cdot (g_1 t),$$

ovvero, per le (3) e (4):

$$v = \frac{1}{c}. \quad \text{c. d. d.}$$

Casale sul Sile (Treviso).

(*) Ciò si deduce dalla equazione di C .