3. *Einwellige gekoppelte Schwingungssysteme;* *von Alfred Kalähne.*

(Fortsetzung von Ann. d. Phys. 42. S. 1001. 1913.)

Durchgehends benutzte Bezeichnungen:

δ_1, δ_2 und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$: Dämpfungskonstanten und logar. Dekremente der freien (ungekoppelten) Teilsysteme;

n_1, n_2: Kreisfrequenzen der ungedämpften freien Systeme;

ν_1, ν_2: Kreisfrequenzen der gedämpften freien Systeme;

δ', δ'' und $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$: Dämpfungskonstanten und logar. Dekremente (der Hauptschwingungen) des gekoppelten Systems;

ν', ν'': Kreisfrequenzen der Hauptschwingungen des gedämpften Koppelungssystems;

ϱ_1, ϱ_2; σ_1, σ_2; ϑ_1, ϑ_2: Wiensche Koppelungskoeffizienten:

K_ϱ, K_σ, K_ϑ: Koppelungsparameter (magnetischer, galvanischer, elektrischer);

h: Verstimmung (Frequenzverhältnis) n_2/n_1;

s: Verhältnis der Dämpfungen δ_2/δ_1;

F: Vgl. Gl. (66) auf S. 447.

$\varkappa$: Koeffizient zur Unterscheidung der drei Fälle A, B und C;

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fall } A\ (\varkappa = 1)\text{: gleiche Frequenzen und Dämpfungen}\\ \text{Fall } B\ (\varkappa > 1)\text{: ungleiche Frequenzen, gleiche Dämpfung}\\ \text{Fall } C\ (\varkappa < 1)\text{: gleiche Frequenz, ungleiche Dämpfungen}\end{array}\right\}\ \text{der Hauptschwingungen des gekoppelten Systems.}$$

Einleitung. Meine unter gleichem Titel im Jahre 1913 in dieser Zeitschrift[1]) erschienene Abhandlung ist bisher unvollendet geblieben. Von den dort angekündigten drei Teilen ist nur der erste, mathematische vollständig erschienen, von dem zweiten, allgemeinphysikalischen Teil nur der erste Abschnitt der Systeme mit rein magnetischer bzw. Beschleunigungskoppelung behandelt. Der dritte speziell physikalische Teil, der Anwendung der abgeleiteten Sätze auf einzelne besondere Systeme bringen sollte, fehlt ganz.

Die hier vorliegende Arbeit soll nun die Fortsetzung und Ergänzung der füheren bilden. Jedoch wird der angekündigte dritte, spezielle physikalische Teil hier wegfallen und in anderer

---

1) A. Kalähne, Ann. d. Phys. 42. S. 1001. 1913 (im folgenden als A. K. I. bezeichnet.

Form erscheinen. Der Grund für diese Beschränkung ist darin zu suchen, daß bei den elektrischen Schwingungen, auf die die Ergebnisse ganz besonders anwendbar sind, gegenwärtig die freien, also gedämpften Eigenschwingungen, die hier behandelt werden, weniger im Vordergrund des Interesses stehen als die dauernd unterhaltenen ungedämpften.[1]) Es erübrigt sich daher, die Arbeit so ausführlich zu gestalten, wie ursprünglich beabsichtigt war.

Um die Übersicht zu erleichtern, ist die Numerierung der Abschnitte und Paragraphen, sowie der Gleichungen einfach weitergeführt, und es werden die gleichen Bezeichnungen benutzt, soweit nicht neue nötig werden (vgl. Verzeichnis am Eingang).

Leitender Grundgedanke der Arbeit, der noch einmal kurz angedeutet werden möge, ist folgender. Jedes aus mehreren Teilsystemen bestehende Schwingungssystem besitzt mehrere Eigenschwingungen (Koppelungsschwingungen), im allgemeinen mit verschiedenen Frequenzen. Und zwar sind so viel Frequenzen möglich, wie Freiheitsgrade vorhanden sind, bei einem aus zwei Teilsystemen aufgebauten Koppelungssystem also zwei. Die Frequenzen, sowie alle sonstigen Bestimmungsstücke der Schwingungen erhält man aus der *charakteristischen Gleichung* (auch Säkulargleichung genannt), die bei der Integration der simultanen Differentialgleichungen des Koppelungssystems auftritt; sie ist eine algebraische Gleichung vom Grade $2m$, wenn m die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist. In besonderen Fällen verringert sich die Anzahl der Koppelungsfrequenzen, indem einige oder schließlich alle einander gleich werden. Dasselbe gilt für die resultierenden Dämpfungen.

Bei einem aus zwei Teilsystemen von je einem Freiheitsgrad zusammengekoppelten System ist die charakteristische Gleichung vom 4. Grade, und die Zahl der verschiedenen Frequenzen beträgt im allgemeinen zwei. Ziel der Arbeit ist nun, die Bedingungen aufzusuchen, unter denen bei einem solchen aus zwei Teilsystemen bestehenden Schwingungssystem die beiden Frequenzen bzw. auch die beiden Dämpfungen der

1) Vgl. dazu z. B. F. Harms, Ann. d. Phys. **66.** S. 25. 1921.

Koppelungsschwingungen sich auf eine einzige reduzieren, so daß „*Einwelligkeit*“ vorhanden ist. Voraussetzung der Rechnung ist, daß die Teilsysteme ungekoppelt, jedes für sich, freie exponentiell gedämpfte Sinusschwingungen auszuführen vermögen, und daß die Koppelung durch lineare Glieder erfolgt. Diese Voraussetzungen sind streng bei quasistationären elektrischen Schwingungskreisen erfüllt, weswegen auch elektrische Systeme die besten Anwendungsbeispiele liefern.

§ 9. Die Rechnungsgrundlagen.

Die Differentialgleichung der Bewegung für ein derartiges Koppelungssystem sind die Gleichungen (24) von A K I, die hier als Grundlage der Rechnung mit einigen weiteren Gleichungen vorangestellt werden

$$(24)\begin{cases}\dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\delta_1 \dfrac{dx_1}{dt} + n_1{}^2 x_1 + \varrho_1 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\delta_1 \sigma_1 \dfrac{dx_2}{dt} + n_1{}^2 \vartheta_1 x_2 = 0, \\ \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\delta_2 \dfrac{dx_2}{dt} + n_2{}^2 x_2 + \varrho_2 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\delta_2 \sigma_2 \dfrac{dx_2}{dt} + n_2{}^2 \vartheta_2 x_1 = 0.\end{cases}$$

Die letzten drei Glieder jeder dieser Gleichungen sind die Koppelungsglieder, und zwar bewirkt das Glied mit ϱ die Beschleunigungskoppelung, das Glied mit σ die Geschwindigkeits- oder Reibungskoppelung, das Glied mit ϑ die Lage- oder Kraftkoppelung; bei elektrischen Systemen hat man in derselben Reihenfolge mit ϱ magnetische (induktive), mit σ galvanische (konduktive), mit ϑ elektrische (kapazitive) Koppelung.

Die drei ersten Glieder allein genommen ergeben die Gleichungen der freien gedämpften Eigenschwingungen beider Teilsysteme, deren Frequenzen sind

$$(26) \qquad \nu_1 = \sqrt{n_1{}^2 - \delta_1{}^2}, \qquad \nu_2 = \sqrt{n_2{}^2 - \delta_2{}^2}.$$

x_1 und x_2 sind die mit der Zeit t veränderlichen Schwingungsvariablen (Verschiebung eines Systempunktes, elektrische Stromstärke, Spannung u. dgl.).

Die Frequenzen ν' und Dämpfungen δ' der Koppelungsschwingungen ergeben sich aus dem Ansatz für x_1 und x_2.

$$(27) \qquad x_1 = A_1 e^{\mu t}; \qquad x_2 = A_2 e^{\mu t}.$$

$$(28) \qquad \mu = -\delta' \pm i\nu'; \quad \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

Für μ gilt die biquadratische Gleichung

$$(31) \qquad \mu^4 + a_3 \mu^3 + a_2 \mu^2 + a_1 \mu + a_0 = 0$$

mit

$$
(32)\quad \begin{cases}
a_3 = \dfrac{2(\delta_1 - \varrho_2\,\delta_1\,\sigma_1 + \delta_2 - \varrho_1\,\delta_2\,\sigma_2)}{1 - \varrho_1\,\varrho_2}\,, \\[2ex]
a_2 = \dfrac{n_1^2 - \varrho_2\,n_1^2\,\vartheta_1 + 4\,\delta_1\,\delta_2 - 4\,\delta_1\,\delta_2\,\sigma_1\sigma_2 + n_2^2 - \varrho_1\,n_2^2\,\vartheta_2}{1 - \varrho_1\,\varrho_2}\,. \\[2ex]
a_1 = \dfrac{2(\delta_2\,n_1^2 - \delta_2\,\sigma_2\,n_1^2\,\vartheta_1 + \delta_1\,n_2^2 - \delta_1\,\sigma_1\,n_2^2\,\vartheta_2)}{1 - \varrho_1\,\varrho_2}\,, \\[2ex]
a_0 = \dfrac{n_1^2\,n_2^2(1 - \vartheta_1\,\vartheta_2)}{1 - \varrho_1\,\varrho_2}\,.
\end{cases}
$$

Im allgemeinen hat die Gleichung (31) *vier verschiedene* Wurzeln $\mu_{\mathrm{I}}, \mu_{\mathrm{II}}, \mu_{\mathrm{III}}, \mu_{\mathrm{IV}}$. Da für Schwingungen nur komplexe Wurzeln μ von der Form der Gleichung (28) in Betracht kommen, so ergibt sich also, daß im allgemeinen zwei verschiedene Frequenzen ν_1' und ν_2' und zwei verschiedene Dämpfungen δ_1' und δ_2' im Koppelungssystem vorhanden sind, wobei die Dämpfung δ_1' zur Frequenz ν_1' und δ_2' zu ν_2' gehört.

In besonderen Fällen können die vier Wurzeln in ihren reellen oder in den imaginären Teilen, oder in beiden einander gleich werden. Diese besonderen Fälle werden hier behandelt unter den Bezeichnungen

A, beide Wurzelpaare identisch, $\delta_1' = \delta_2'$, $\nu_1' = \nu_2'$,

B, reelle Teile identisch, $\delta_1' = \delta_2'$,

C, imaginäre Teile identisch, $\nu_1' = \nu_2'$.

Alle drei Fälle ergeben eine Ausartung der biquadratischen Gleichung (31), genauer ihrer reduzierten Form, in eine quadratische.

Die Bedingung für die Ausartung ist die Gleichung:

$$
(13)\qquad a_1 - \frac{a_3}{2}\left(a_2 - \frac{a_3^2}{4}\right) = 0.
$$

Die drei Fälle A (Frequenzen ν' und Dämpfungen δ' einander gleich), B (Frequenzen ungleich, Dämpfungen gleich), C (Frequenzen gleich, Dämpfungen ungleich) werden durch besondere Bedingungen unterschieden, die in Form von Gleichungen bzw. Ungleichungen auftreten, sich aber durch Einführung eines Koeffizienten $\varkappa$ in eine einzige Gleichung verwandeln lassen, nämlich

$$
(14\,\mathrm{b})\qquad 4\varkappa^2 a_0 = \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4}\right)^2 + a_3\left[a_1 - \frac{a_3}{2}\left(a_2 - \frac{a_3^2}{4}\right)\right],
$$

wobei gilt

$\varkappa = 1$, Fall A; $\varkappa > 1$, Fall B; $\varkappa < 1$, Fall C.

Mit Rücksicht auf die in allen drei Fällen gültige Bedingung (13) läßt sich (14b) auch umformen in

$$4\varkappa^2 a_0 = \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4}\right)^2 \tag{15}$$

oder schließlich

$$\varkappa^2 a_0 = \frac{a_1^2}{a_3^2}\,. \tag{16}$$

Statt (13) und (14b) kann man natürlich zur Festlegung eines der Fälle A, B, C auch diese beiden neuen Gleichungen (15) und (16) oder überhaupt irgendein Paar von den vier Gleichungen (13), (14b), (15), (16) benutzen. Diese so ausgewählten beiden Gleichungen ergeben durch Einsetzen der Werte a_0 bis a_3 aus (32) zwei Beziehungen zwischen den physikalischen Konstanten der Teilschwingungssysteme, die erfüllt sein müssen, damit die Wurzelpaare μ und damit die Frequenzen und Dämpfungen der Koppelungsschwingungen oder wenigstens die Frequenzen bzw. die Dämpfungen für sich allein einander gleich werden. Ich habe diese Erscheinungen hier unter dem Namen „*Einwelligkeit*" zusammengefaßt, der in engerer Bedeutung nur für Gleichheit der Frequenzen gilt.

Die erforderlichen Bedingungen, denen jene Konstanten (Dämpfungen, Eigenschwingungsfrequenzen und Koppelungskoeffizienten) der Teilsysteme genügen müssen, beschränken diese auf gewisse Gebiete, innerhalb deren sie liegen müssen, damit überhaupt Einwelligkeit [bei freien Eigenschwingungen solcher gekoppelter Systeme] erzielt werden kann. Diese Bedingungen sind in der ersten Veröffentlichung für den Fall I der reinen magnetischen oder Beschleunigungskoppelung ausführlich behandelt worden und sollen nun hier, jedoch kürzer, für andere Koppelungsarten behandelt werden, so daß sich folgende Einteilung ergibt:

I. nur magnetische oder Beschleunigungskoppelung,
II. nur elektrische oder Kraftkoppelung,
III. nur galvanische oder Reibungskoppelung,
IV. gleichzeitig magnetische und galvanische (Beschleunigungs- und Reibungskoppelung),

V. gleichzeitig magnetische und elektrische (Beschleunigungs- und Kraftkoppelung),

VI. gleichzeitig galvanische und elektrische (Reibungs- und Kraftkoppelung),

VII. gleichzeitig alle drei Koppelungen.

In dieser Reihenfolge werden mit Ausnahme des schon in A. K. I. behandelten Falles I die drei Koppelungsarten und ihre Kombinationen behandelt werden.

Um die Ergebnisse der Rechnung ohne weiteres auf den wichtigsten Fall, nämlich elektromagnetische Schwingungskreise anwenden zu können, seien hier noch die beiden Bewegungsgleichungen für ein elektromagnetisches Koppelungssystem mit allen drei Koppelungsarten angegeben

$$(57)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 J_1}{dt^2} + \dfrac{w_1}{L_1}\dfrac{dJ_1}{dt} + \dfrac{J_1}{L_1 C_1} + \dfrac{L_{12}}{L_1}\dfrac{d^2 J_2}{dt^2} + \dfrac{w_{12}}{L_1}\dfrac{dJ_2}{dt} + \dfrac{J_2}{L_1 C_{12}} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2 J_2}{dt^2} + \dfrac{w_2}{L_2}\dfrac{dJ_2}{dt} + \dfrac{J_2}{L_2 C_2} + \dfrac{L_{12}}{L_2}\dfrac{d^2 J_1}{dt^2} + \dfrac{w_{12}}{L_2}\dfrac{dJ_1}{dt} + \dfrac{J_1}{L_2 C_{12}} = 0. \end{cases}$$

Dabei sind J_1 und J_2 die Stromstärken in den beiden Kreisen, jeder in einem willkürlich wählbaren, dann aber festzuhaltenden Sinn (Pfeilrichtung in Fig. 7) als positiv gerechnet.

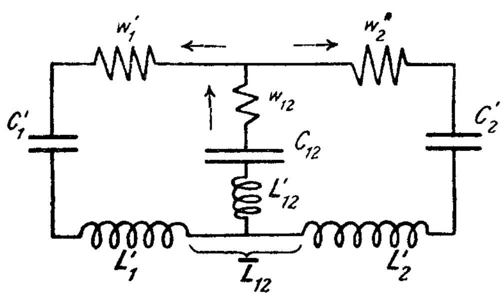

Fig. 7.

L_1 und L_2 sind die Selbstinduktionskoeffizienten der beiden Kreise einschließlich der den beiden Kreisen gemeinsamen Spulen oder Spulenteile, L_{12} Koeffizient der gesamten wechselseitigen Induktion, wiederum einschließlich der den beiden Kreisen gemeinsamen Spulen.

C_1 und C_2 die Gesamtkapazität der getrennten Schwingungskreise, C_{12} die Kapazität des gemeinsamen Kondensators; w_1

und w_2 die Gesamtwiderstände jedes Kreises, auch wieder zusammengesetzt aus den gesonderten und dem gemeinsamen Widerstand auf einem Stück des Leitungsweges. Im einzelnen also der Figur entsprechend

$$(58)\qquad \begin{cases} L_1 = L_1' + L_{12}'; & L_2 = L_2' + L_{12}', \\ L_{12} = \bar{L}_{12} + L_{12}', & \\ w_1 = w_1' + w_{12}; & w_2 = w_2' + w_{12}, \\ \dfrac{1}{C_1} = \dfrac{1}{C_1'} + \dfrac{1}{C_{12}}; & \dfrac{1}{C_2} = \dfrac{1}{C_2'} + \dfrac{1}{C_{12}}. \end{cases}$$

Vergleichung der Gleichung (57) mit (24) läßt sofort die Bedeutung der in (24) und am Kopf der Arbeit eingeführten Größen δ, n, ϑ, ϱ, σ erkennen, nämlich:

$$(59)\qquad \begin{cases} \dfrac{w_1}{L_1} = 2\delta_1; & \dfrac{w_2}{L_2} = 2\delta_2, \\ \dfrac{1}{L_1 C_1} = n_1^2; & \dfrac{1}{L_2 C_2} = n_2^2, \\ \dfrac{L_{12}}{L_1} = \varrho_1; & \dfrac{L_{12}}{L_2} = \varrho_2, \\ \dfrac{w_{12}}{w_1} = \sigma_1; & \dfrac{w_{12}}{w_2} = \sigma_2, \\ \dfrac{C_1}{C_{12}} = \vartheta_1; & \dfrac{C_2}{C_{12}} = \vartheta_2. \end{cases}$$

Hiernach behandeln wir nun die Fälle I bis VII einzeln.

I. *Nur magnetische oder Beschleunigungskoppelung* (dieser Fall ist in der ersten Veröffentlichung behandelt).

II. *Nur elektrische oder Kraftkoppelung.*

§ 10. Die Bedingungsgleichungen bei Kraftkoppelung.

Die Koppelungskoeffizienten sind

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \sigma_1 = \sigma_2 = 0; \qquad \vartheta_1 \neq 0, \quad \vartheta_2 \neq 0.$$

Die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 der biquadratischen Gleichung werden

$$(60)\qquad \begin{cases} a_3 = 2(\delta_1 + \delta_2) & = 2\dfrac{\delta_1}{n_1}(1+\varepsilon)n_1, \\ a_2 = n_1^2 + 4\delta_1\delta_2 + n_2^2 & = \left(1 + 4\dfrac{\delta_1^2 \varepsilon}{n_1^2} + h^2\right) n_1^2, \\ a_1 = 2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2) & = 2\dfrac{\delta_1}{n_1}(h^2+\varepsilon)\, n_1^3, \\ a_0 = n_1^2 n_2^2 (1 - \vartheta_1\vartheta_2) & = n_1^2 n_2^2 (1 - K_\vartheta^2) = h^2 (1 - K_\vartheta^2)\, n_1^4. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) werden

$$(61)\qquad 2x\, n_1 n_2 \sqrt{1 - K_\vartheta^2} = n_1^2 + n_2^2 - (\delta_1 - \delta_2)^2.$$

$$2\varkappa(\delta_1 + \delta_2) n_1 n_2 \sqrt{1 - K_\vartheta^2} = 2(\delta_2 n_1^2 + \delta_1 n_2^2), \tag{62}$$

oder nach Einführung der Hilfsgrößen $\varepsilon = \delta_2/\delta_1$, $h = n_2/n_1$

$$2\varkappa h n_1^2 \sqrt{1 - K_\vartheta^2} = n_1^2(1 + h^2) - \delta_1^2(1 - \varepsilon)^2, \tag{61a}$$

$$2\varkappa h n_1^2 \sqrt{1 - K_\vartheta^2} = \frac{2 n_1^2 (h^2 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon}. \tag{62a}$$

Hieraus ergibt sich Koppelungskoeffizient K_ϑ und Dämpfung des ersten Teilsystems δ_1 (im Verhältnis zur ungedämpften Frequenz n_1):

$$K_\vartheta = \sqrt{1 - \frac{(h^2 + \varepsilon)^2}{\varkappa^2 h^2 (1 + \varepsilon)^2}} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{\varkappa^2}}. \tag{63}$$

$$\frac{\delta_1}{n_1} = \sqrt{\frac{1 - h^2}{1 - \varepsilon^2}}. \tag{64}$$

K_ϑ ergibt sich also für die drei Fälle A, B, C ($\varkappa = 1$, $\varkappa > 1$, $\varkappa < 1$) verschieden, dagegen ist δ_1 für alle drei Fälle gleich groß, unabhängig von $\varkappa$.

Weiter ergeben sich für alle drei Fälle A, B, C ($\varkappa \lesseqgtr 1$) aus (26) die gedämpften Frequenzen der ungekoppelten Teilsysteme

$$\frac{\nu_1}{n_1} = \frac{\nu_2}{n_1} = \sqrt{\frac{h^2 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}}, \tag{65}$$

und damit das bemerkenswerte einfache Resultat:

Die gedämpften Frequenzen der ungekoppelten Teilsysteme müssen in allen drei Fällen einander gleich sein.

Das ist eine einfachere Bedingung als die bei magnetischer Koppelung zu erfüllende. Legt man nicht die gedämpften, sondern die ungedämpften Frequenzen n_1 und n_2 zugrunde, so ist die Beziehung zwischen ihnen, nämlich der Wert des Verhältnisses h willkürlich. Zwischen h und dem Verhältnis ε der Dämpfungen muß jedoch eine aus (64) folgende Bedingung eingehalten werden, nämlich:

Für $\varepsilon < 1$, also $\delta_2 < \delta_1$, muß auch $h < 1$, also $n_2 < n_1$ sein;

für $\varepsilon > 1$, also $\delta_2 > \delta_1$, muß auch $h > 1$, also $n_2 > n_1$ sein, d. h.

das schwächer gedämpfte System muß die kleinere (ungedämpfte) Frequenz haben.

Im Fall I, bei magnetischer Koppelung galt im allgemeinen das Umgekehrte. Damit ist die Richtung der erforderlichen Verstimmung beider Systeme gegeneinander festgelegt.

Die Wurzeln μ und damit die Dämpfung δ' und die Frequenz ν' der Koppelungsschwingungen haben für die drei Fälle im allgemeinen ganz verschiedene Werte, die nicht bloß durch Hinzufügung des Koeffizienten $\varkappa$ als Faktor aus einander hervorgehen; sie müssen daher getrennt behandelt werden.

§ 11. Die Grenzwerte der Verstimmung und Dämpfung.

Aus (63) folgt, daß in allen drei Fällen

$$F = \frac{h^2 + \varepsilon}{h(1 + \varepsilon)} \gtreqless \varkappa \tag{66}$$

sein muß, da sonst K_ϑ imaginär wird. Daraus ergeben sich für h gewisse Grenzwerte als Funktionen von ε, oder umgekehrt Grenzwerte von ε als Funktionen von h, indem man $F = \varkappa$ setzt. Diese mit h' bzw. ε' bezeichneten Werte sind

$$h' = \frac{\varkappa(1 + \varepsilon')}{2} \pm \sqrt{\frac{\varkappa^2(1 + \varepsilon')^2}{4} - \varepsilon'} \,. \tag{67}$$

Im Fall II A ($\varkappa = 1$) werden diese Grenzen

$$h_1' = 1 \quad \text{und} \quad h_2' = \varepsilon. \tag{67}$$

$$\text{Für } h_1' \text{ wird } K_\vartheta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta_1}{n_1} = 0,$$

$$\text{für } h_2' \text{ wird } K_\vartheta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta_1}{n_1} = 1.$$

Nur innerhalb dieser Grenzwerte kann und braucht die zahlenmäßige Berechnung zu erfolgen. Praktisch kommt übrigens meist nur die Grenze $h_1 = 1$ in Betracht, außer wenn ε annähernd gleich 1 ist, denn sonst liegt die Grenze $h_2' = \varepsilon$ zu weit von der Resonanzstelle entfernt.

Der äußere Grenzwert $h_2' = \varepsilon$ ist jedoch noch zu weit gesteckt, wie (74) zeigt, da für $h = \varepsilon$ die resultierende Frequenz ν' bereits imaginär wird. Die eigentlichen Grenzwerte erhält man also aus (74), indem man darin $\nu' = 0$ setzt. Es ergibt sich eine quadratische Gleichung für h mit der Lösung

$$h_\varepsilon = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)^2 - 4\varepsilon(1 - \varepsilon)}{4 + (1 - \varepsilon)^2}} \,. \tag{68}$$

Daraus erhält man für $\varepsilon = 0$, 0,5, 1, 2, ∞ die zugehörigen Grenzwerte 0,4472, 0,545, 1, 1,840, 2,236, also Werte, die weit außerhalb der praktisch allein in Betracht kommenden in der Nähe der Resonanz $h = 1$ gelegenen Werte liegen. Die Bedingungen der Einwelligkeit sind also grundsätzlich immer erfüllbar.

Für die Berechnung können wieder zur Ersparung einer Hälfte der Rechnung die Reziprozitätsformeln benutzt werden.

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned}
F(\bar h, \bar\varepsilon) &= F(h, \varepsilon)\,,\\
K_\vartheta(\bar h, \bar\varepsilon) &= K_\vartheta(h, \varepsilon)\,,\\
\delta_1(\bar h, \bar\varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{h}\cdot\delta_1(h, \varepsilon) = \frac{1}{h}\cdot\delta_2(h, \varepsilon)\,,\\
\delta_2(\bar h, \bar\varepsilon) &= \bar\varepsilon\cdot\delta_1(\bar h, \bar\varepsilon) = \frac{1}{h}\cdot\delta_1(h, \varepsilon)\,,\\
\nu_1(\bar h, \bar\varepsilon) &= \frac{1}{h}\nu_2(h, \varepsilon)\,,\\
\nu_2(\bar h, \bar\varepsilon) &= \frac{1}{h}\nu_1(h, \varepsilon)\,,\\
\delta'(\bar h, \bar\varepsilon) &= \frac{1}{h}\delta'(h, \varepsilon)\,,\\
\nu'(\bar h, \bar\varepsilon) &= \frac{1}{h}\nu'(h, \varepsilon)\,,\\
\mathfrak{d}_1(\bar h, \bar\varepsilon) &= \varepsilon\cdot\mathfrak{d}_1(h, \varepsilon) = \mathfrak{d}_2(h, \varepsilon)\,,\\
\mathfrak{d}_2(\bar h, \bar\varepsilon) &= \mathfrak{d}_1(h, \varepsilon)\,,\\
\mathfrak{d}'(\bar h, \bar\varepsilon) &= \mathfrak{d}'(h, \varepsilon)\,,
\end{aligned}\right.$$

wobei

$$(70)\qquad \bar h = \frac{1}{h}\,,\quad \bar\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$$

gesetzt ist.

Praktisch kommt übrigens nur die Berechnung in der Nähe der Grenze $h' = 1$ in Betracht, außer wenn ε annähernd $= 1$ ist; denn die andre Grenze h_ε liegt im allgemeinen so weit von der Resonanzstelle entfernt, daß dort wegen zu starker Verstimmung überhaupt keine merkliche gegenseitige Beeinflussung der beiden Teilsysteme mehr möglich ist.

§ 12. Der Unterfall II A. ($\varkappa = 1$).

Indem man $\varkappa = 1$ setzt, erhält man aus (63)

$$(71)\qquad K_{\vartheta A} = \sqrt{1 - F^2} = \sqrt{1 - \frac{(h^2 + \varepsilon)^2}{h^2(1 + \varepsilon)^2}}\,.$$

Dämpfung δ_1 des Teilsystems 1 und gedämpfte Kreisfrequenzen der umgekoppelten Systeme ν_1 und ν_2 sind durch die unveränderten Gleichungen (64) und (65) gegeben. Mit diesen Werten von $K_{\vartheta A}$ und δ_1/n_1 ergibt sich aus (60):

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} a_3 &= 2\sqrt{\frac{(1-h^2)(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}}\, n_1\,, \\ a_2 &= \left(1 + h^2 + \frac{4\,\varepsilon(1-h^2)}{1-\varepsilon^2}\right) n_1^{\,2}\,, \\ a_1 &= 2\,(h^2+\varepsilon)\sqrt{\frac{1-h^2}{1-\varepsilon^2}}\, n_1^{\,3}\,, \\ a_0 &= \frac{(h^2+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2}\, n_1^{\,4}. \end{aligned}\right.$$

Durch Einsetzen dieser Größen in Gl. (44), die die Wurzeln μ für Fall A ($\varkappa = 1$) allgemein darstellt,

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_{\mathrm{I}} = \mu_{\mathrm{II}} &= -\frac{a_3}{4} + i\sqrt{\sqrt{a_0} - \frac{a_3^{\,2}}{16}} = -\delta_A' + i\,\nu_A'\,, \\ \mu_{\mathrm{III}} = \mu_{\mathrm{IV}} &= -\frac{a_3}{4} - i\sqrt{\sqrt{a_0} - \frac{a_3^{\,2}}{16}} = -\delta_A' - i\,\nu_A' \end{aligned}\right.$$

erhält man Dämpfung δ' und Kreisfrequenz ν' der hier einwelligen Koppelungsschwingung:

$$(73)\quad \frac{\delta'_A}{n_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-h^2)(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}} = \frac{\delta_1}{n_1}\cdot\frac{1+\varepsilon}{2}\,,$$

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\nu'}{n_1} &= \sqrt{\frac{h^2+\varepsilon}{(1+\varepsilon)} - \frac{(1-h^2)(1+\varepsilon)}{4\,(1-\varepsilon)}} \\ &= \sqrt{h\sqrt{1-K_\vartheta^{\,2}} - \frac{\delta_1^{\,2}(1+\varepsilon)^2}{4\,n_1^{\,2}}}\,. \end{aligned}\right.$$

Mittels der hier angegebenen Gleichungen und der bekannten Definition für das logarithmische Dekrement der Dämpfung

$$(75)\qquad \mathfrak{d}_1 = \frac{2\pi\,\delta_1}{\nu_1}\,, \qquad \mathfrak{d}_2 = \frac{2\pi\,\delta_2}{\nu_2}\,, \qquad \mathfrak{d}' = \frac{2\pi\,\delta'}{\nu'}\,,$$

sind die Zahlenwerte der Tab. III berechnet worden, deren Anlage vollständig der Tab. I der ersten Veröffentlichung entspricht. Gegeben sind die Werte

$$h = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1}\,.$$

Als Funktionen derselben findet man die Werte $K_{\vartheta A}$, δ_1/n_1, δ_2/n_1, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, ν_1/n_1, ν_2/n_1, δ'/n_1, $\mathfrak{d}'$, ν'/n_1. Die Werte dieser

Größen für einen und denselben konstanten Wert ε sind jeweils in einer von zwei Horizontallinien eingerahmten Gruppe zusammengefaßt Sieben solcher Gruppen sind berechnet, von gleich großer Dämpfung beider Teilsysteme $\varepsilon = 1$ angefangen, bis zu sehr verschieden starker Dämpfung $\varepsilon = 0$ bzw. $\varepsilon = \infty$. Die Werte h reichen in jeder Gruppe von $h = 1$ (Einklang, Resonanz der ungedämpften ungekoppelten Schwingungen) bis $h = 0{,}98$ bzw. $h = 1{,}02$, d. h. bis zu einer Verstimmung von zwei Hundertsteln.

Die Zahlen der Tabelle lehren, daß bezüglich der Herstellbarkeit einwelliger Systeme ganz ähnliche, sehr einschränkende Bedingungen gelten wie bei magnetischer (Beschleunigungs-) Koppelung:

1. *Nur Teilsysteme, deren Dämpfungen* δ_1 *und* δ_2 *sehr verschieden sind* (ε *sehr groß oder sehr klein*), *geben gekoppelte Systeme, die einen einigermaßen ausreichenden Koppelungsgrad mit genügend kleiner Dämpfung* δ' *vereinigen.*

Am deutlichsten wird dies durch Betrachtung der logarithmischen Dekremente $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}'$.

2. *Wird wieder ein Dekrement* $\mathfrak{d}' = 0{,}2$ *als oberste Grenze zugelassen, so ist bei sehr verschiedenen Dämpfungen* ($\varepsilon = 0$ *oder* $\varepsilon = \infty$) *ein Koppelungsgrad von etwa 0,06, d. h. etwa 6 Hundertstel des Höchstwertes 1 erreichbar. Die erforderliche Verstimmung der Teilsysteme gegeneinander (d. h. der ungedämpften Frequenzen*[1]) *muß dabei etwa 2 Tausendstel betragen.*

3. *Ein Dämpfungsunterschied der Teilsysteme im Verhältnis 1 : 10* ($\varepsilon = 0{,}1$ *oder* $\varepsilon = 10$) *ist dabei nach der Tabelle bereits als sehr groß anzusehen. Mit Annäherung des Verhältnisses* ε *an den Wert 1 wird das Bild aber schnell ungünstig. Schon bei einem Verhältnis der Dämpfungen von 1 : 2* (*also* $\varepsilon = 0{,}5$ *oder* $\varepsilon = 2$) *ist der erreichbare Koppelungsgrad nur etwa 2 Hundertstel, wenn* $\mathfrak{d}' \lesseqgtr 0{,}2$ *bleiben soll.*

Bei vollkommener Gleichheit beider Dämpfungen ($\varepsilon = 1$) versagt das gekoppelte System ganz und gar, indem die zulässige Koppelung Null wird (für Resonanz $h = 1$), dagegen imaginär für alle anderen Werte der Verstimmung h, wie sich aus (63) leicht ergibt.

1) Die gedämpften müssen nach § 10 einander gleich sein.

Tabelle III.

Elektrische oder Kraftkoppeluug.

	$h = \frac{n_2}{n_1}$	K_ϑ	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_2$	$\frac{\nu_1}{n_1} = \frac{\nu_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	$\mathfrak{d}'$	$\frac{\nu'}{n_1}$
$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0$	0,98	0,1990	0,1990	0	1,2758	0	0,98	0,0995	0,6412	0,975
	0,99	0,1411	0,1411	0	0,8953	0	0,99	0,0705	0,4487	0,9875
	0,998	0,0632	0,0632	0	0,3980	0	0,998	0,0316	0,1991	0,9975
	0,999	0,0447	0,0447	0	0,2812	0	0,999	0,0224	0,1406	0,99875
	0,9998	0,0200	0,0200	0	0,1257	0	0,9998	0,0100	0,0628	0,99975
	0,9999	0,0141	0,0141	0	0,0889	0	0,9999	0,00707	0,0444	0,99988
	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0,1$	0,98	0,1800	0,2	0,02	1,2826	0,1283	0,97980	0,11	0,7083	0,97566
	0,99	0,1276	0,1418	0,01418	0,8999	0,0900	0,98990	0,0780	0,4960	0,98784
	0,998	0,0572	0,0635	0,00635	0,4000	0,0400	0,99798	0,0349	0,2201	0,99757
	0,999	0,0404	0,0449	0,00449	0,2826	0,0283	0,99899	0,0247	0,1554	0,99879
	0,9998	0,0181	0,0201	0,00201	0,1263	0,0126	0,99980	0,0111	0,0695	0,99976
	0,9999	0,0128	0,0142	0,00142	0,0893	0,00893	0,99990	0,00782	0,0491	0,99988
	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0,5$	0,98	0,1141	0,2298	0,1149	1,4835	0,7418	0,97324	0,1723	1,1146	0,97154
	0,99	0,0812	0,1629	0,0814	1,0373	0,5187	0,98664	0,1222	0,7787	0,98580
	0,998	0,0383	0,0730	0,0365	0,4599	0,2299	0,99733	0,0547	0,3451	0,99716
	0,999	0,0258	0,0516	0,0258	0,3248	0,1624	0,99867	0,0387	0,2436	0,99858
	0,9998	0,0116	0,0231	0,0115	0,1451	0,0726	0,99973	0,0173	0,1089	0,99972
	0,9999	0,00817	0,0163	0,00817	0,1026	0,0513	0,99987	0,0122	0,0770	0,99986
	1		0	0	0	0	1	0	0	1

Tabelle III. (Fortsetzung).

	$h = \frac{n_2}{n_1}$	K_ϑ	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_2$	$\frac{\nu_1}{n_1} = \frac{\nu_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	$\mathfrak{d}'$	$\frac{\nu'}{n_1}$
$\varepsilon = 1$	< 1	imaginär	∞	∞						
	1	0								
	> 1	imaginär	∞	∞						
$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 2$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	1,0001	0,00817	0,00817	0,0163	0,0513	0,1026	0,99997	0,0122	0,0770	0,99996
	1,0002	0,0116	0,0115	0,0231	0,0726	0,1451	0,99993	0,0173	0,1089	0,99992
	1,001	0,0258	0,0258	9,0517	0,1624	0,3248	0,99967	0,0388	0,2436	0,99958
	1,002	0,0383	0,0366	0,0731	0,2299	0,4599	0,99933	0,0549	0,3451	0,99915
	1,0101	0,0812	0,0823	0,1645	0,5186	1,0373	0,99661	0,1234	0,7787	0,99576
	1,0204	0,1141	0,1172	0,2344	0,7417	1,4835	0,99309	0,1759	1,1146	0,99136
$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 10$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	1,0001	0,0128	0,00142	0,0142	0,00893	0,0893	1,00000	0,00782	0,0491	0,99998
	1,0002	0,0181	0,00201	0,0201	0,0126	0,1263	1,00000	0,0111	0,0695	0,99996
	1,001	0,0404	0,00450	0,0450	0,0283	0,2826	0,99999	0,0247	0,1554	0,99979
	1,002	0,0572	0,00637	0,0637	0,0400	0,4000	0,99998	0,0350	0,2201	0,99956
	1,0101	0,1276	0,01432	0,1432	0,0900	0,8999	0,99995	0,0788	0,4960	0,99782
	1,0204	0,1800	0,02041	0,2041	0,1283	1,2826	0,99959	0,1122	0,7083	0,99556
$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = \infty$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	1,0001	0.0141	0	0,0141	0	0,0889	1	0,00707	0,0444	0,99998
	1,0002	0,0200	0	0,0200	0	0,1257	1	0,0100	0,0628	0,99995
	1,001	0,0447	0	0,0448	0	0,2812	1	0,0224	0,1406	0,99975
	1,002	0,0632	0	0,0633	0	0,3980	1	0,0317	0,1991	0,99950
	1,0101	0,1411	0	0,1425	0	0,8953	1	0,0713	0,4487	0,99748
	1,0204	0,1990	0	0,2031	0	1,2758	1	0,1015	0,6412	0,99489

§ 13. Die Unterfälle II B ($\varkappa > 1$) und II C ($\varkappa < 1$).

In beiden Fällen hat nach (64) die Dämpfung δ_1 des freien ersten Teilsystems denselben Wert wie im Falle II A. Nur die Koppelung K_ϑ wird eine andere. Es ist also zu untersuchen, ob sie größer oder kleiner als im Falle II A zu nehmen ist.

Die Antwort erhält man wie früher aus der Betrachtung des Differentialquotienten von K_ϑ nach $\varkappa$. Es wird

$$\frac{d K_\vartheta}{d \varkappa} = \frac{F^2}{\varkappa^3 \cdot K_\vartheta} = \frac{(h^2 + \varepsilon)^2}{\varkappa^3 K_\vartheta h^2 (1 + \varepsilon)^2}\,. \tag{76}$$

Da dieser Quotient immer positiv ist, so erfolgt der Übergang von Fall B zu C durch A hindurch in der Weise, daß mit wachsendem $\varkappa$ auch K_ϑ wächst. Also im Gegensatz zur magnetischen Koppelung (Fall I) gilt hier:

Zur Verwirklichung des Falles II B (gleiche Dämpfungen ungleiche Frequenzen) muß die Koppelung fester sein als im Fall II A, zur Verwirklichung von Fall C (ungleiche Dämpfungen, gleiche Frequenzen) muß sie loser sein.

Dieses Ergebnis läßt sich übrigens auch unmittelbar aus (63) ablesen, wenn man berücksichtigt, daß nach (64) δ_1 und damit auch δ_2, ν_1, ν_2 beim Übergang von A nach B oder C unverändert bleiben, wenn h und ε konstant gehalten werden.

Die durch (64) geforderte Unabhängigkeit der Dämpfung δ_1 von $\varkappa$ engt den Bereich, aus dem die charakteristischen Systemwerte entnommen werden können, mehr ein als im Fall I bei magnetischer Koppelung, erleichtert aber andererseits die Übersicht und die Berechnung derselben. Denn mittels (64) ist von den vier Größen δ_1, δ_2, n_1, n_2 immer die vierte durch drei von ihnen für alle Unterfälle II A, B, C einheitlich bestimmt. Willkürlich wählbar bleibt noch der Koppelungskoeffizient K_ϑ. Durch ihn wird dann festgelegt, in welchem der drei Gebiete A, B, C man sich befindet. Zu jedem Wertepaar h, ε gehört ein einziger Wert $K_{\vartheta A}$ (vgl. Tab. III) für den Fall A ($\varkappa = 1$), dagegen beliebig viele Werte K_ϑ für die beiden anderen Fälle B und C ($\varkappa \gtreqless 1$).

Koppelungsfrequenz ν' und Dämpfung δ' sind mittels der Gleichungen (20b) und (20c) des ersten Teiles zu berechnen, wobei zu dem reellen Teil, der δ' ergibt, hinzuzufügen ist:

$$-\frac{a_3}{4} = -2\delta_1 (1 + \varepsilon) = -2 n_1 (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{1 - h^2}{1 - \varepsilon^2}}\,.$$

Somit hat im Fall B ($\varkappa > 1$; gleiche Dämpfungen, aber ungleiche Frequenzen der Koppelungsschwingungen) diese resultierende Dämpfung δ' denselben Wert wie im Falle A (bei gleichem h und ε); im Falle C ($\varkappa < 1$; gleiche Frequenzen aber verschiedene Dämpfungen der Koppelungsschwingungen) unterscheiden sich diese von der Dämpfung δ' des Falles A um ein und denselben Betrag nach oben und unten. Das Auseinandergehen der Frequenzen im Falle B ($\varkappa > 1$) erfolgt zunächst auch linear und gleichmäßig nach beiden Seiten hin, solange $\sqrt{\varkappa^2 - 1}$ klein ist gegen 1; bei größerer Entfernung vom Falle A wird die Abweichung der Frequenzen vom Werte ν_A' verschieden groß.

III. Nur galvanische oder Widerstands- (Reibungs-) Koppelung.

§ 14. Die Bedingungsgleichungen. Die Koppelungskoeffizienten sind:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0; \quad \sigma \neq 0, \quad \sigma \neq 0.$$

Die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung sind:

$$(77)\quad \begin{cases} a_3 = 2(\delta_1 + \delta_2) = \dfrac{2\delta_1}{n_1}(1 + \varepsilon) n_1, \\ a_2 = n_1^2 + 4\delta_1 \delta_2 (1 - \sigma_1 \sigma_2) + n_2^2 \\ \qquad = \left[1 + h^2 + \dfrac{4\delta_1^2 \varepsilon}{n_1^2} 1 - K_\sigma^2)\right] n_1^2, \\ a_1 = 2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2) = 2\dfrac{\delta_1}{n_1}(h^2 + \varepsilon) n_1^3, \\ a_0 = n_1^2 n_2^2 = h^2 n_1^4. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) werden:

$$(78)\qquad 2\varkappa n_1 n_2 = n_1^2 + 4\delta_1 \delta_2 (1 - K_\sigma^2) + n_2^2 - (\delta_1 + \delta_2)^2,$$

$$(79)\qquad 2\varkappa(\delta_1 + \delta_2) n_1 n_2 = 2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2),$$

oder durch Einsetzen der Hilfsgrößen ε und h und einfachste Umformung:

$$(78\text{a})\qquad 2\varkappa h n_1^2 = n_1^2(1 + h^2) - 4\delta_1^2 \varepsilon K_\sigma^2 - \delta_1^2(1 - \varepsilon)^2,$$

$$(79\text{a})\qquad 2\varkappa h n_1^2 \delta_1 (1 + \varepsilon) = 2\delta_1 n_1^2 (h^2 + \varepsilon).$$

Hier ergibt sich die eigentümliche Tatsache, daß die Größen h und ε, d. h. das Verhältnis der Dämpfungen der Teilsysteme und ihre gegenseitige Verstimmung nicht von-einander unabhängig sind, sondern durch die Hilfsgröße $\varkappa$ miteinander eng verbunden sind. Denn aus (79a) folgt durch Wegheben der gleichen Faktoren beiderseits:

$$\varkappa h(1 + \varepsilon) = h^2 + \varepsilon \,. \tag{79b}$$

Man kann also, wenn $\varkappa$ gegeben ist, nur eine der beiden Größen h oder ε willkürlich wählen, die andere ist durch (79b) bestimmt. Außerdem sind noch zwei von den drei Größen n_1, δ_1, K_σ frei verfügbar. Die dritte ist dann mittels (78a) vollkommen bestimmt.

§ 15. Der Unterfall III A ($\varkappa = 1$). Für den Fall gleicher Frequenzen und gleicher Dämpfungen der beiden Koppelungsschwingungen wird (79b), indem man $\varkappa = 1$ setzt, zu

$$\varepsilon(1 - h) = h(1 - h) \,. \tag{80}$$

Also muß sein

(a) entweder: $\underline{\varepsilon = h}$

(b) oder: $h = 1$ und ε beliebig.

Die Lösung b) scheidet aber aus, weil sich mit ihr aus (78a) ein negativer Wert für das Quadrat des Koppelungskoeffizienten K_σ^2 ergeben würde, nämlich $K_\sigma^2 = -\frac{(1-\varepsilon)^2}{4\varepsilon}$. Nur für $\varepsilon = 1$, würde hier K_σ zwar reell, aber zugleich Null werden, und dies fällt wieder unter a).

Mit Benutzung der allein brauchbaren Lösung a) ergibt sich aus (78a):

$$K_\sigma = \sqrt{\frac{\left(\frac{n_1^2}{\delta_1^2} - 1\right)(1-\varepsilon)^2}{4\varepsilon}} \,. \tag{81}$$

Für $\varepsilon = h = 1$ wird $K_\sigma = 0$. Also muß $\varepsilon = h$ von 1 verschieden gewählt werden. Damit aber K_σ immer < 1 bleibt, wie es die Natur dieses Koeffizienten erfordert, darf ε und damit auch h offenbar von 1 nicht sehr verschieden sein, oder man muß sehr große Dämpfungen in Kauf nehmen. Die Zahlen der Tab. IV geben dafür die nötige Erläuterung. Diese ist etwas abweichend von der Tabelle für Fall I und II, so eingerichtet, daß immer Gruppen von konstanter Dämpfung δ_1 des einen der freien Teilsysteme, also auch von konstantem Dekrement $\mathfrak{d}_1$ zusammengefaßt sind. Es sind Teildämpfungen von $\delta = 0{,}01$ und $0{,}001$, d. h. von mittlerer und sehr geringer

Dämpfung vorgesehen. Von dieser Dämpfung der Teilsysteme — δ_2 ist mittels ε durch δ_1 festgelegt — ist die resultierende Dämpfung des Koppelungssystems δ' abhängig. Wie man sieht, ist sie etwas mehr als halb so groß wie δ_1.

Die zulässige Verstimmung ist hier durch den Wert des Koppelungskoeffizienten bedingt, der sich aus (81) ergibt; er darf keinesfalls größer als 1 werden, und daraus folgt, daß bei kleiner Dämpfung des einen Teilsystems (z. B. δ_1) der Verstimmungsbereich auch sehr klein ist. Die Tabelle IV ist im übrigen sehr einförmig. Es wird sich kaum lohnen, sie noch genauer anzulegen, da der Fall der einfachen galvanischen (Widerstands-) Koppelung ohne Hinzutritt einer anderen Koppelungsart sich schwerlich verwirklicht finden

Tabelle IV.

Galvanische oder Widerstandskoppelung.

$h = \frac{n_2}{n_1} = \varepsilon$	K_σ	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2$	$\frac{\nu_1}{n_1}$	$\frac{\nu_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	$\mathfrak{d}'$	$\frac{\nu'}{n_1}$
0,99	0,50249	0,01	0,0099	0,06284	0,99995	0,98995	0,00995	0,062836	0,99494
0,999	0,05002	0,01	0,00999	0,06284	0,99995	0,99895	0,01000	0,062835	0,99945
0,9999	0,00500	0,01	0,009999	0,06284	0,99995	0,99985	0,01000	0,062835	0,99990
1	0	0,01	0,01	0,06284	0,99995	0,99995	0,01	0,062835	0,99995
1,0001	0,00500	0,01	0,010001	0,06284	0,99995	1,00005	0,01000	0,062835	1,00000
1,001	0,04997	0,01	0,01001	0,06284	0,99995	1,00095	0,01000	0,062835	1,00045
1,01	0,4975	0,01	0,0101	0,06284	0,99995	1,00995	0,01005	0,062836	1,00494
0,99	> 1	0,001	0,00099	0,006283	0,9999995	—	0,000995	—	—
0,999	0,50025	0,001	0,000999	0,006283	0,9999995	0,99900	0,0009995	0,006283	0,9994994
0,9999	0,05000	0,001	0,0009999	0,006283	0,9999995	0,99990	0,00099995	0,006283	0,9999496
1	0	0,001	0,001	0,006283	0,9999995	1,00000	0,001	0,006283	0,9999995
1,0001	0,05000	0,001	0,0010001	0,006283	0,9999995	1,00010	0,00100005	0,006283	1,0000495
1,001	0,49974	0,001	0,001001	0,006283	0,9999995	1,00100	0,0010005	0,006283	1,0005000
1,01	> 1	0,001	0,00101	0,006283	0,9999995	—	0,001005	—	—

wird, jedenfalls nicht bei elektrischen Schwingungskreisen. Charakteristisch ist das außerordentlich schnelle Ansteigen des erforderlichen Koppelungsgrades mit wachsender Verstimmung schon bei sehr geringer Verstimmung beider Systeme, wenn die Dämpfungen klein sind. Zum Beispiel ist nach der Tabelle bei einer Dämpfung der Teilsysteme $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}001$ (Dekrement $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2 = 0{,}00628$), wozu eine resultierende Dämpfung δ' gehört, die ebenfalls annähernd 0,001 ist (Dekrement $\mathfrak{d}' =$ rund 0,00628), der erforderliche Koppelungsgrad 5 Hundertstel des Höchstwertes, wenn die Verstimmung 1 Zehntausendstel beträgt, dagegen schon 50 Hundertstel, wenn die Verstimmung 1 Tausendstel beträgt; für die Verstimmung 1 Hundertstel müßte der Koppelungsgrad schon mehr als 100 Hundertstel sein, also über dem möglichen Höchstwert liegen.

§ 16. Die Unterfälle III B ($\varkappa > 1$) und III C ($\varkappa < 1$).

Gleichung (78a) ergibt hier:

$$K_\sigma = \sqrt{\frac{\frac{n_1^2}{\delta_1^2}(1 - \varkappa h)(1 - \varepsilon) - (1 - \varepsilon)^2}{4\varepsilon}}, \tag{82}$$

wobei aber zwischen h, ε und $\varkappa$ die Beziehung (79b) gilt. Durch Einsetzen des Wertes ε aus (79b) wird (82) zu:

$$K_\sigma = \sqrt{\frac{\frac{n_1^2}{\delta_1^2}(1 + h^2 - 2\varkappa h)(1 - \varkappa h)^2 - (1 + h^2 - 2\varkappa h)^2}{4h(\varkappa - h)(1 - \varkappa h)}}. \tag{83}$$

Die Differentiation dieses Ausdrucks nach $\varkappa$ ergibt die notwendige Veränderung von K_σ mit wachsendem $\varkappa$,

$$\frac{dK_\sigma}{d\varkappa} = \frac{1}{2K_\sigma}\,\frac{dK_\sigma^2}{d\varkappa}.$$

Uns interessiert hauptsächlich der Wert dieses Ausdrucks für $\varkappa = 1$, das heißt für den Übergang vom Fall A ($\varkappa = 1$) zum Fall B ($\varkappa > 1$) bzw. zum Fall C ($\varkappa < 1$). Hierfür ergibt sich durch Einsetzen von $\varkappa = 1$:

$$\left(\frac{dK_\sigma}{d\varkappa}\right)_{\varkappa = 1} = \frac{(1 + h)^2 - \frac{n_1^2}{\delta_1^2}[2 - (1 - h)^2]}{8hK_\sigma}. \tag{84}$$

Da h annähernd 1, also $(1 - h)^2 \ll 2$, so wird das zweite Glied des Zählers negativ, und da dieses wegen $\frac{n_1^2}{\delta_1^2} \gg (1 + h)^2$ das erste überwiegt, so ist die ganze rechte Seite negativ. Also folgt: *Beim Übergang vom Fall IIIC* ($\varkappa < 1$) *zu IIIB* ($\varkappa > 1$) *durch Fall A* ($\varkappa = 1$) *hindurch muß der Koppelungskoeffizient* K_σ *abnehmen. Dieser Abfall von* K_σ *ist sehr steil, denn der absolute Wert des Differentialquotienten ist groß gegen 1.* Das Gebiet $\varkappa = 1$, d. h. das Gebiet, in dem der Fall IIIA verwirklicht ist (gleiche Dämpfungen und gleiche Frequenzen beider Koppelungsschwingungen) ist offenbar ein Gebiet wenig stabiler Zustände.

IV. Gleichzeitig magnetische und galvanische (Beschleunigungs- und Widerstands-) Koppelung.

§ 17. Die Bedingungsgleichungen.

Die Koppelungskoeffizienten ϱ_1, ϱ_2, σ_1, σ_2 sind von Null verschieden; $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$.

Die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung:

$$(85)\quad \left\{\begin{aligned} a_3 &= \frac{2(\delta_1 + \delta_2 - \varrho_1 \delta_2 \sigma_2 - \varrho_2 \delta_1 \sigma_1)}{1 - \varrho_1 \varrho_2} \\ &= \frac{\delta_1}{n_1} \frac{2(1 + \varepsilon - \varrho_2 \sigma_1 - \varrho_1 \sigma_2 \varepsilon)}{1 - K_\varrho^2} n_1 ; \\ a_2 &= \frac{n_1^2 + n_2^2 + 4\delta_1 \delta_2 - 4\delta_1 \delta_2 \sigma_1 \sigma_2}{1 - \varrho_1 \varrho_2} \\ &= \frac{1 + h^2 + 4\varepsilon \frac{\delta_1^2}{n_1^2}(1 - K_\sigma^2)}{1 - K_\varrho^2} n_1^2 , \\ a_1 &= \frac{2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2)}{1 - \varrho_1 \varrho_2} = \frac{2\delta_1}{n_1} \frac{h^2 + \varepsilon}{1 - K_\varrho^2} n_1^3 , \\ a_0 &= \frac{n_1^2 n_2^2}{1 - \varrho_1 \varrho_2} = \frac{h^2}{1 - K_\varrho^2} n_1^4 . \end{aligned}\right.$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) werden:

$$(86)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2\varkappa n_1 n_2}{\sqrt{1 - \varrho_1 \varrho_2}} &= \frac{n_1^2 + n_2^2 + 4\delta_1 \delta_2 (1 - \sigma_1 \sigma_2)}{1 - \varrho_1 \varrho_2} \\ &\quad - \frac{(\delta_1 + \delta_2 - \varrho_1 \delta_2 \sigma_2 - \varrho_2 \delta_1 \sigma_1)^2}{(1 - \varrho_1 \varrho_2)^2} . \end{aligned}\right.$$

$$(87)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2\varkappa(\delta_1 + \delta_2 - \varrho_1 \delta_2 \sigma_2 - \varrho_2 \delta_1 \sigma_1)}{1 - \varrho_1 \varrho_2} \cdot \frac{n_1 n_2}{\sqrt{1 - \varrho_1 \varrho_2}} \\ &\qquad = \frac{2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2)}{1 - \varrho_1 \varrho_2} , \end{aligned}\right.$$

oder nach Einführung der Hilfsgrößen ε und h

$$(86\,\mathrm{a})\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\varkappa h n_1^2}{\sqrt{1-K_\varrho^2}} &= \frac{n_1^2(1+h^2)+4\varepsilon\delta_1^2(1-K_\sigma^2)}{1-K_\varrho^2} \\ &\quad - \frac{\delta_1^2(1+\varepsilon-\varrho_2\sigma_1-\varrho_1\sigma_2\varepsilon)^2}{(1-K_\varrho^2)^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(87\,\mathrm{a})\quad \frac{\varkappa h(1+\varepsilon-\varrho_2\sigma_1-\varrho_1\sigma_2\varepsilon)}{\sqrt{1-K_\varrho^2}} = h^2+\varepsilon.$$

Hierin sind außer ε, h, K_ϱ und K_σ noch die Produkte $\varrho_1\sigma_2$ und $\varrho_2\sigma_1$ vorhanden. Diese lassen sich aber auf K_ϱ und K_σ zurückführen, wenn man die Werte von ϱ_1, ϱ_2, σ_1, σ_2 genauer ansieht. Für elektromagnetische Schwingungen gelten z. B. die Werte (59). Mit ihrer Hilfe läßt sich leicht ableiten:

$$(88)\quad \varrho_1\sigma_2\varepsilon = \varrho_2\sigma_1 = \sqrt{\varrho_1\varrho_2\sigma_1\sigma_2\varepsilon} = K_\varrho K_\sigma\sqrt{\varepsilon}\,.$$

Mit Benutzung dieser Beziehung, die übrigens auch für mechanische Systeme gilt, werden die Gleichungen (86) und (87)

$$(86\,\mathrm{b})\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\varkappa h n_1^2}{\sqrt{1-K_\varrho^2}} &= \frac{n_1^2(1+h^2)+4\varepsilon\delta_1^2(1-K_\sigma^2)}{1-K_\varrho^2} \\ &\quad - \frac{\delta_1^2(1+\varepsilon-2K_\varrho K_\sigma\sqrt{\varepsilon})}{(1-K_\varrho^2)^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(87\,\mathrm{b})\quad \varkappa h\left(1+\varepsilon-2K_\varrho K_\sigma\sqrt{\varepsilon}\right) = \left(h^2+\varepsilon\right)\sqrt{1-K_\varrho^2}.$$

Hier sind also zwei Gleichungen zwischen den 5 Größen h, ε, δ_1/n_1, K_ϱ, K_σ vorhanden. Daher sind drei von diesen willkürlich wählbar, z. B. h, ε, K_ϱ; die beiden anderen, δ_1/n_1 und K_σ, sind durch deren Werte festgelegt, nämlich

$$(89)\quad \left\{ \begin{aligned} K_\sigma &= \frac{1}{2K_\varrho\sqrt{\varepsilon}}\left(1+\varepsilon-\frac{h^2+\varepsilon}{\varkappa h}\sqrt{1-K_\varrho^2}\right), \\ \frac{\delta_1}{n_1} &= \sqrt{\frac{h^2+1-2\varkappa h\sqrt{1-K_\varrho^2}}{\frac{(h^2+\varepsilon)^2}{h^2\varkappa^2}-4\varepsilon(1-K_\sigma^2)}}\,. \end{aligned} \right.$$

§ 18. Der Unterfall IV A. ($\varkappa = 1$).

Die Werte von K_σ und δ_1/n_1 für den Fall der vollkommenen Einwelligkeit erhält man aus der Gleichung (89), indem man darin $\varkappa = 1$ setzt. Es ist unnötig, diese von (89) nur durch Fehlen des Faktors $\varkappa$ unterschiedenen Gleichungen noch besonders hinzuschreiben.

Aus ihnen folgt weiter für Dämpfung und Frequenz der Koppelungsschwingung, da allgemein $\delta' = a_3/4$ ist,

$$(90)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta'}{n_1} = \dfrac{\delta_1}{n_1}\,\dfrac{1+\varepsilon-\varrho_2\sigma_1-\varrho_1\sigma_2\varepsilon}{2(1-K_\varrho^2)} = \dfrac{\delta_1}{n_1}\,\dfrac{h^2+\varepsilon}{2h\sqrt{1-K_\varrho^2}}\,, \\ \dfrac{\nu'}{n_1} = \dfrac{1}{n_1}\sqrt{\sqrt{a_0}-\dfrac{a_3^2}{16}} = \sqrt{\dfrac{h}{\sqrt{1-K_\varrho^2}}-\dfrac{\delta_1^2}{n_1^2}\,\dfrac{(h^2+\varepsilon)^2}{4h^2}}\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten nur für Fall IV A, nicht auch für Fall IV B und C.

Um die Wirkung des Hinzutritts der zweiten Koppelung sicher zu erkennen, berechnet man am besten eine Reihe von Werten dieser Größen für verschiedene h und ε unter Zugrundelegung gewisser Werte von K_ϱ; als solche nimmt man zweckmäßigerweise Werte, die bei einfacher Koppelung (in der Tabelle I) vorkommen.

Das Verfahren ist jedoch umständlich, weil sehr viele Einzelwerte berechnet werden müssen. Es soll an dieser Stelle davon abgesehen werden und versucht werden, durch Berechnung der Werte K_σ nur für gewisse ausgezeichnete Werte von h, ε und K_ϱ einen Überblick über das allgemeine Verhalten der in Rede stehenden Größen unter der Wirkung der Mischkoppelung zu erlangen.

1. *Dämpfungen der Teilsysteme sehr verschieden.*

a) $\varepsilon = 0$ (erster Grenzfall).

Gleichung (87 b) ergibt für diesen Fall, daß sein muß

$$K_\varrho = \frac{1}{h}\sqrt{h^2-1}\,.$$

Damit wird weiter

$$(91)\quad \begin{cases} K_\sigma = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{\varepsilon=0} \dfrac{1+\varepsilon-\dfrac{h^2+\varepsilon}{h}\sqrt{1-K_\varrho^2}}{2K_\varrho\,\varepsilon} \\ \qquad = \lim \dfrac{1-\dfrac{1}{h}\sqrt{1-K_\varrho^2}}{\dfrac{2K_\varrho}{\sqrt{\varepsilon}}} = 0\,. \end{cases}$$

Das bedeutet: für $\varepsilon = 0$ fällt die galvanische Koppelung weg, man hat also den schon behandelten Fall der reinen magnetischen Koppelung mit den Werten der Tabelle I.

b) $\varepsilon = \infty$ (zweiter Grenzfall).

Eine ähnliche Untersuchung mit Grenzübergang zeigt, daß auch für diesen Fall die galvanische Koppelung $K_\sigma = 0$ weg-fällt, also auch wieder nur rein magnetische Koppelung zulässig ist mit den Werten von Tabelle I.

Geht man nun von diesen Grenzfällen extrem verschiedener Dämpfung zu solchen Fällen verschiedener Dämpfung über, wo das Verhältnis ε endliche kleine oder große Werte hat (z. B. 0,1 oder 10), so wird die erforderliche zusätzliche galvanische Koppelung $K_\sigma > 0$, und man kann die so entstehenden Systeme mit den Systemen einfacher Koppelung von Tabelle I bzw. IV vergleichen und abschätzen, ob sie günstiger wirken, insbesondere auch, wie sich ihre Dämpfung verhält.

Durch eine einfache, an Gleichung (89) anschließende Betrachtung ergibt sich: *wenn im Falle I (Tabelle I) $h^2 > \varepsilon$ ist, so muß bei gleichbleibendem K_ϱ für gemischte Koppelung h kleiner als im Falle I genommen werden*; *wenn $h^2 < \varepsilon$ ist, so muß h größer als im Falle I genommen werden.*

Dies ergibt sich daraus, daß $K_\sigma > 0$ werden muß.

Die Dämpfung δ_1 und damit auch δ', nimmt bei gleichbleibendem h, ε und K_ϱ gemäß (89) zu, wenn man K_σ von 0 an wachsen läßt. Dasselbe scheint auch zuzutreffen, wenn h dabei nicht konstant bleibt, sondern die soeben besprochene Veränderung erfährt, und ein einfaches Zahlenbeispiel scheint dies zu bestätigen.

Nach Tabelle I mit rein magnetischer Koppelung gehören z. B. bei $\varepsilon = 0{,}1$ folgende Werte zusammen: Verstimmung $h = 1{,}002$, Koppelungskoeffizient $K_\varrho = 0{,}05714$, Dämpfungen $\delta_1 = 0{,}0636\, n_1$, $\delta_2 = 0{,}00636\, n_1$, $\delta' = 0{,}2198\, n_1$, also $\mathfrak{d}_1 = 0{,}4004$, $\mathfrak{d}_2 = 0{,}0399$, $\mathfrak{d}' = 0{,}2198$. Hier bei gemischter, magnetischer und galvanischer Koppelung erhält man für dieselbe Koppelung ($K_\varrho = 0{,}05714$), aber mit der Verstimmung $h = 1$ folgendes: $K_\sigma = 0{,}1985$, $\delta_1 = 0{,}1257\, n_1$, $\delta_2 = 0{,}01257\, n_1$, $\delta' = 0{,}0696\, n_1$, also $\mathfrak{d}_1 = 0{,}7959$, $\mathfrak{d}_2 = \ldots$, $\mathfrak{d}' = 0{,}4371$. Man hat also ein sehr starkes Anwachsen der Gesamtkoppelung, da die hinzukommende galvanische Koppelung nahezu 20 Hundertstel der möglichen Maximalkoppelung ($K = 1$) beträgt; dafür steigt aber auch die Dämpfung gewaltig, so daß man kaum von einem nutzbringenden Ergebnis der Hinzufügung der galvanischen Koppelung sprechen kann. Nimmt man die Verstimmung h der Verstimmung von Tabelle I ähnlicher an, z. B. 1,0002 statt 1, so werden K_σ und

und δ' weniger groß, wenn auch größer als in Tabelle I. Doch ist der sichtbare Nutzen hier in jedem Falle gering.

2. *Dämpfungen der Teilsysteme einander gleich*, ($\varepsilon = 1$).

Im Fall I A war dies ein Grenzfall, bei dem die Koppelung sehr klein ist und die Dämpfung ganz plötzlich (unstetig) von Null auf den endlichen Wert 0,7 emporschnellt, wenn man die Verstimmung h von Null an wachsen läßt. In unmittelbarer Nähe dieser Stelle $h = 0$ sind die Verhältnisse also sehr labil.

Auch im Fall III A war $\varepsilon = 1$ ein Grenzfall, bei dem die Koppelung Null ist. (Da für III A immer $\varepsilon = h$ sein muß, so ist für $\varepsilon = 1$ auch $h = 1$ zu setzen.)

Hier im Fall IV A liegen die Verhältnisse nicht viel günstiger. Setzt man bei $\varepsilon = 1$ auch die Verstimmung $h = 1$, so wird

$$(92)\quad \begin{cases} K_\sigma = \dfrac{1}{K_\varrho}\left(1 - \sqrt{1 - K_\varrho^{\,2}}\right) \\ \quad\;\; = \dfrac{K_\varrho}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} K_\varrho^{\,2} + \dfrac{1}{8} K_\varrho^{\,4} + \ldots\right), \\ \dfrac{\delta_1}{n_1} = \sqrt{\dfrac{K_\varrho}{2 K_\sigma}}\,; \qquad \dfrac{\delta'}{n_1} = \sqrt{\dfrac{K_\varrho}{2 K_\sigma}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - K_\varrho^{\,2}}}\,. \end{cases}$$

Also: K_σ wächst von 0 bis 1, wenn K_ϱ von 0 bis 1 zunimmt, wobei es für kleine K_ϱ annähernd gleich $1/2\, K_\varrho$ ist. Infolgedessen bewegt sich δ_1/n_1 dabei zwischen den Grenzen 1 (für $K_\varrho = 0$) und $\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707$ (für $K_\varrho = 1$); δ'/n_1 ebenso zwischen den Grenzen 1 und ∞. Es ergeben sich also außerordentlich starke Dämpfungen, die die resultierenden Systeme unbrauchbar machen.

Ähnliche Werte erhält man auch, wenn h nicht genau gleich 1 ist. Vollen Aufschluß über das Verhalten aller Größen kann jedoch nur eine nähere Untersuchung bringen, die hier zu weit führen würde.

Da die gemischte magnetische und galvanische Koppelung sehr vielfach angewandt wird (offenbar immer, wenn beide Kreise auf längere Strecken leitend miteinander verbunden sind), so ist eine besondere Untersuchung wohl angebracht.

V. Gleichzeitig magnetische und elektrische (Beschleunigungs- und Kraftkoppelung).

§ 19. Die Bedingungsgleichungen. Die Koppelungskoeffizienten sind

$\varrho_1, \varrho_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ von Null verschieden; $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung

$$
(93)\quad \left\{
\begin{aligned}
a_3 &= \frac{2(\delta_1 + \delta_2)}{1 - \varrho_1 \varrho_2} = \frac{2\,\delta_1}{n_1} \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 - K_\varrho^2} n_1 , \\
a_2 &= \frac{n_1^2 + n_2^2 + 4\,\delta_1 \delta_2 - \varrho_2 n_1^2 \vartheta_1 - \varrho_1 n_2^2 \vartheta_2}{1 - \varrho_1 \varrho_2} \\
&= \frac{1 + h^2 + \dfrac{4\,\varepsilon\,\delta_1^2}{n_1^2} - \varrho_2 \vartheta_1 - h^2 \varrho_1 \vartheta_2}{1 - K_\varrho^2} n_1^2 , \\
a_1 &= \frac{2(\delta_2 n_1^2 + \delta_1 n_2^2)}{1 - \varrho_1 \varrho_2} = \frac{2\,\delta_1}{n_1} \cdot \frac{h^2 + \varepsilon}{1 - K_\varrho^2} n_1^3 , \\
a_0 &= \frac{n_1^2 n_2^2 (1 - \vartheta_1 \vartheta_2)}{1 - \varrho_1 \varrho_2} = \frac{h^2 (1 - K_\vartheta^2)}{1 - K_\varrho^2} n_1^4 .
\end{aligned}
\right.
$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) werden

$$
(94)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{2\,\varkappa\, n_1 n_2 \sqrt{1 - \vartheta_1 \vartheta_2}}{\sqrt{1 - \varrho_1 \varrho_2}} &= \frac{n_1^2 + n_2^2 + 4\,\delta_1 \delta_2 - \varrho_2 n_1^2 \vartheta_1 - \varrho_1 n_2^2 \vartheta_2}{1 - \varrho_1 \varrho_2} \\
&\quad - \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{(1 - \varrho_1 \varrho_2)^2} ,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(95)\quad \frac{2\,\varkappa\, n_1 n_2 \sqrt{1 - \vartheta_1 \vartheta_2}}{\sqrt{1 - \varrho_1 \varrho_2}} = \frac{2(\delta_2 n_1^2 + \delta_1 n_2^2)}{\delta_1 + \delta_2} ,
$$

oder nach Einführung der Hilfsgrößen ε und h

$$
(94\text{a})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{2\,\varkappa\, h\, n_1^2 \sqrt{1 - K_\vartheta^2}}{\sqrt{1 - K_\varrho^2}} = \\
&\frac{(1 + h^2) n_1^2 + 4\,\varepsilon\,\delta_1^2 - (\varrho_2 \vartheta_1 + h^2 \varrho_1 \vartheta_2) n_1^2}{1 - K_\varrho^2} - \frac{\delta_1^2 (1 + \varepsilon)^2}{n_1^2 (1 - K_\varrho^2)^2} ,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(95\text{a})\quad \frac{2\,\varkappa\, h\, n_1^2 \sqrt{1 - K_\vartheta^2}}{\sqrt{1 - K_\varrho^2}} = \frac{2(h^2 + \varepsilon) n_1^2}{1 + \varepsilon} .
$$

Hier sind außer ε, h, K_ϱ und K_ϑ auch wieder Produkte der Wienschen Koeffizienten vorhanden, nämlich $\varrho_2\,\vartheta_1$ und $\varrho_1\,\vartheta_2$ Diese lassen sich auch wieder auf die gewöhnlichen Koppelungskoeffizienten zurückführen, wenn man die Gleichungen (59) benutzt, die für elektromagnetische Schwingungskreise abgeleitet sind, aber auch für analoge mechanische Systeme gelten. Danach wird

$$\varrho_2\,\vartheta_1 = \varrho_1\,\vartheta_2\,h_2 = \sqrt{\varrho_1\,\varrho_2\,\vartheta_1\,\vartheta_2\,h^2} = h\,K_\varrho\,K_\vartheta\,. \tag{96}$$

Mit Benutzung dieser Beziehung ergibt sich weiter

$$\left\{\begin{aligned} \frac{2\,\varkappa\,h\sqrt{1-K_\vartheta^2}}{\sqrt{1-K_\varrho^2}} &= \frac{1+h^2-2\,h\,K_\varrho\,K_\vartheta + \dfrac{4\,\varepsilon\,\delta_1^2}{n_1^2}}{1-K_\varrho^2} \\ &\quad - \frac{\delta_1^2\,(1+\varepsilon)^2}{n_1^2\,(1-K_\varrho^2)}\,, \end{aligned}\right. \tag{94b}$$

$$\frac{2\,\varkappa\,h\sqrt{1-K_\vartheta^2}}{\sqrt{1-K_\varrho^2}} = \frac{2\,(h^2+\varepsilon)}{1+\varepsilon}\,. \tag{95b}$$

Wie im Fall IV ist auch hier außer h und ε noch einer der Koppelungskoeffizienten (K_ϱ oder K_ϑ) willkürlich wählbar; am zweckmäßigsten wohl wieder K_ϱ. Dann wird der andere

$$K_\vartheta = \sqrt{1 - \frac{(h^2+\varepsilon)^2\,(1-K_\varrho^2)}{\varkappa^2\,h^2\,(1+\varepsilon)^2}}\,. \tag{97}$$

Zur Berechnung von δ_1/n_1 hat man diesen Wert von K_ϑ in (94b) einzusetzen; man kann jedoch letztere Gleichung vorher noch durch Kombination mit (95b) zweckentsprechend umformen und erhält

$$\frac{\delta_1}{n_1} = \sqrt{\frac{(1-K_\varrho^2)^2}{(1+\varepsilon)^2 - 4\,\varepsilon\,(1-K_\varrho^2)}\left(\frac{1+h^2-2\,h\,K_\varrho\,K_\vartheta}{1-K_\varrho^2} - \frac{2\,(h^2+\varepsilon)}{1+\varepsilon}\right)}\,. \tag{98}$$

§ 20. Der Unterfall VA ($\varkappa = 1$). Der Unterfall völliger Einwelligkeit mit gleichen Frequenzen und Dämpfungen beider Koppelungswellen ist hier leicht zu verwirklichen. Die erforderlichen Werte K_ϑ und δ_1/n_1 erhält man aus den allgemeinen Gleichungen (97) und (98), indem man daselbst überall $\varkappa = 1$ setzt. Dazu kommen die Werte der Dämpfung und der Frequenz dieser Koppelungsschwingungen, die besonders zu berechnen sind und ergeben:

$$\frac{\delta'}{n_1} = \frac{\delta_1}{n_1}\,\frac{1+\varepsilon}{2\,(1-K_\varrho^2)}\,, \tag{99}$$

$$\frac{\nu'}{n_1} = \sqrt{\frac{h^2+\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{\delta_1^2\,(1+\varepsilon)^2}{n_1^2\,4\,(1-K_\varrho^2)^2}} = \sqrt{\frac{h^2+\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{\delta'^2}{n_1^2}}\,. \tag{100}$$

Diese beiden Werte gehen natürlich in die Werte (45) des Falles I (nur magnetische Koppelung) über, wenn $K_\vartheta = 0$ gemacht wird, indem man K_ϱ gleich dem Werte von Gleichung

(41) der ersten Veröffentlichung wählt; sie gehen ebenso in die Werte (73) und (74) des Falles II (nur elektrische Koppelung) über, wenn man $K_\varrho = 0$ wählt, wodurch K_ϑ den Wert von Gleichung (71) erhält.

Um für diejenigen Fälle, wo beide Koppelungen nebeneinander mit endlichen Werten vertreten sind, einen Überblick über den Verlauf der charakteristischen Systemgröße zu gewinnen, bleibt hier im allgemeinen nichts anderes übrig, als die Zahlenwerte derselben für eine Anzahl von unabhängig variablen Werten zu berechnen; das bedeutet natürlich eine große Rechenarbeit, da drei unabhängige Variablen zu berücksichtigen sind, z. B. ε, h und K_ϱ. Eine Anzahl so berechneter Werte sind in den Tabellen V bis VI enthalten, Die Anordnung derselben ist derjenigen der früheren Tabellen für einfache Koppelung möglichst ähnlich gemacht. Als Eingang ist in der ersten Spalte auch wieder die Verstimmung (das Frequenzverhältnis) $h = n_2/n_1$ der ungedämpften Frequenzen der Teilsysteme gewählt; die folgenden Spalten enthalten in der gleichen Aufeinanderfolge wie dort den Koppelungskoeffizienten (hier den elektrischen K_ϑ), Dämpfungen δ, Dekremente $\mathfrak{d}$ und Kreisfrequenzen ν der ungekoppelten Teilsysteme und des Koppelungssystems. Während aber früher eine und dieselbe Tabelle Untergruppen für verschiedene Werte von ε (des Verhältnisses der Dämpfungen δ_2 und δ_1 der Teilsysteme) enthielt, ist jetzt umgekehrt für jedes ε eine besondere Tabelle erforderlich mit Untergruppen für je einen konstanten Wert des magnetischen Koppelungskoeffizienten K_ϱ, der als dritte unabhängige Variable benutzt wird.

Von den in den früheren Tabellen (z. B. Tab. I oder III) der Rechnung zugrunde gelegten Werten ε (nämlich 0; 0,1; 0,5; 0,99; 1; 1,01; 2; 10; ∞) sind hier aber nur die Werte $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ als Extremwerte benutzt worden (sehr verschiedene Dämpfung und gleiche Dämpfung der Teilsysteme). Aus den Werten für $\varepsilon = 0$ lassen sich übrigens die für $\varepsilon = \infty$ leicht ableiten. Um zu zeigen, daß man hier die Gesamtkoppelung viel fester nehmen kann als bei einfacher Koppelung, ohne zu starke Dämpfungen zu bekommen, sind für die einzelnen Tabellen, die eine Gruppe mit konstantem ε bilden, die K_ϱ-Werte (magnetische Koppelung) 0,1 und 0,2 gewählt.

Die hier mitgeteilte kleine Auswahl von Tabellenwerten lehrt folgendes:

§ 21. Möglichkeit geringer Dämpfung bei fester Koppelung.

1. *Ist* $\varepsilon = \delta_2/\delta_1$ *von 1 verschieden, so kann man zwar die Systeme vom Einklang aus nach beiden Seiten hin verstimmen, d. h. man kann h größer oder kleiner als 1 wählen, jedoch nach der einen Seite nur so weit, bis* K_ϑ *Null wird.* Darüber hinaus müßte K_ϑ nach Gl (97) imaginär werden, was physikalisch unzulässig ist; nach der anderen Seite ist die Verstimmung beliebig weit möglich.

Für Werte $\varepsilon < 1$ liegt diese Grenze auf der Seite der h, die > 1 sind; für $\varepsilon > 1$ würde sie auf der Seite der $h < 1$ liegen. Mit anderen Worten:

Das schwächer gedämpfte Teilsystem kann beliebig kleinere Frequenz erhalten als das andere ($0 < h \leqq 1$); *größere Frequenzen* ($h > 1$) *sind für dasselbe aber nur bis zu einem Grenzwert zulässig, der von dem Wert des Koppelungskoeffizienten K abhängt und mit diesem selber wächst.*

Beispielsweise liegt für $K_\varrho = 0{,}02$ der Grenzwert der Verstimmung zwischen 1,0002 und 1,0003, also in allernächster Nähe der Resonanzstelle $h = 1$, während er für $K_\varrho = 0{,}2$ erst zwischen 1,020 und 1,021 liegt, wenn die Dämpfungen δ_2 und δ_1 extrem verschieden sind ($\varepsilon = 0$).

2. Der elektrische Koeffizient K_ϑ steigt vom Werte Null, der an dieser Grenzstelle gilt, bei fortschreitender Verstimmung nach entgegengesetzter Richtung dauernd an; bei $h = 1$ ist er gleich dem magnetischen K_ϱ und steigt dann weiter über diesen. Doch werden wesentlich höhere Werte als der angenommene Wert K_ϱ erst bei Verstimmungen erreicht, die über das gewöhnliche Maß hinausgehen. *Man kann normalerweise mit einem* K_ϑ *von gleicher Größenordnung rechnen wie* K_ϱ.

3. *Die bei gegebenem* ε *und gegebenem* K_ϱ *zu wählenden Dämpfungen der Teilsysteme sind für* $h = 1$ *sämtlich gleich Null*; mit dieser Einstellung der Frequenzen (Einklang) ist also kein einwelliges System herstellbar. *Mit wachsender Verstimmung (beiderseits) nimmt die erforderliche Dämpfung für beide Teilsysteme zu.* In dem extremen Fall $\varepsilon = 0$ bleibt δ_2 allerdings zahlenmäßig gleich Null; das bedeutet aber nur, daß δ_2 hier

Tabelle V.

Magnetische und elektrische (Beschleunigungs- und Kraftkoppelung). $s = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0$

K_ϱ	$h = \frac{n_2}{n_1}$	K_ϑ	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_2$	$\frac{\nu_1}{n_1}$	$\frac{\nu_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	$\mathfrak{d}'$	$\frac{\nu'}{n_1}$
	0,98	0,2218	0,12320	0	0,78004	0	0,992382	0,98	0,06222	0,39974	0,978023
	0,99	0,1723	0,07330	0	0,46181	0	0,997310	0,99	0,03702	0,23513	0,989308
	0,998	0,1181	0,01824	0	0,11464	0	0,999834	0,998	0,00921	0,05800	0,997958
	0,999	0,1094	0,00950	0	0,05969	0	0,999955	0,999	0,00480	0,03018	0,998989
	0,9998	0,1020	0,00197	0	0,01238	0	0,999998	0,9998	0,00100	0,00625	0,999795
	0,9999	0,1010	0,00099	0	0,00622	0	0,999999	0,9999	0,00050	0,00314	0,999900
0,1	1	0,1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	1,0001	0,0990	0,00100	0	0,00628	0	0,999999	1,0001	0,00051	0,00317	1,000100
	1,0002	0,0980	0,00201	0	0,01263	0	0,999998	1,0002	0,00102	0,00638	1,000200
	1,001	0,0895	0,01050	0	0,06596	0	0,999945	1,001	0,00530	0,03328	1,000986
	1,002	0,0777	0,02240	0	0,14075	0	0,999749	1,002	0,01131	0,07093	1,001936
	1,005	0,0087	0,09137	0	0,57649	0	0,995809	1,005	0,04614	0,28880	1,003940
	1,006	imaginär	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,98	0,2793	0,08163	0	0,51462	0	0,996663	0,98	0,04252	0,27284	0,979077
	0,99	0,2431	0,04420	0	0,27800	0	0,999023	0,99	0,02302	0,14615	0,989732
	0,998	0,2094	0,00957	0	0,06015	0	0,999954	0,998	0,00499	0,03132	0,997988
	0,999	0,2047	0,00484	0	0,03042	0	0,999988	0,999	0,00252	0,01585	0,998970
	0,9998	0,2010	0,00098	0	0,00614	0	0,999999	0,9998	0,00051	0,00320	0,999800
	0,9999	0,2005	0,00049	0	0,00307	0	1,000000	0,9999	0,00025	0,00160	0,999900
0,2	1	0,2	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	1,0001	0,1995	0,00049	0	0,00308	0	1,000000	1,0001	0,00026	0,00160	1,000100
	1,0002	0,1990	0,00098	0	0,00618	0	0,999999	1,0002	0,00051	0,00322	1,000200
	1,001	0,1951	0,00496	0	0,03116	0	0,999988	1,001	0,00258	0,01621	1,000997
	1,002	0,1901	0,01005	0	0,06312	0	0,999950	1,002	0,00523	0,03281	1,001988
	1,01	0,1439	0,05694	0	0,35833	0	0,998378	1,01	0,02965	0,18466	1,009564
	1,02	0,0349	0,16571	0	1,05591	0	0,986064	1,02	0,08631	0,53357	1,016337
	1,021	imaginär	—	—	—	—	—	—	—	—	—

immer sehr klein gegen δ_1 bleibt, es wächst aber mit wachsendem δ_1.

In unmittelbarer Umgebung der Resonanzstelle $h = 1$ sind beide Dämpfungen sehr klein, und zwar um so kleiner, je kleiner die vorgegebene Koppelung K_ϱ ist.

Wegen der Kleinheit der erforderlichen Dämpfungen beider Teilsysteme ist es hier schwierig, mit sehr geringer Verstimmung und loser Koppelung Einwelligkeit zu erzielen. Dies wird um so leichter, je fester man die Koppelung K_ϱ macht und je weiter man verstimmt. Hier zeigen sich bedeutende Vorteile der gemischten Koppelung gegenüber den einfachen Koppelungen.

Die resultierende Dämpfung δ' des Koppelungssystems ist von derselben Größenordnung wie die der Teilsysteme; im besonderen bei $\varepsilon = 0$ ist sie näherungsweise halb so groß wie die des Teilsystems 1 ($\mathfrak{d}'$ annähernd $= {}^1/_2\, \mathfrak{d}_1$),

Tabelle VI.

Magnetische und elektrische (Beschleunigungs- und Kraft-) Koppelung.

$$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 1.$$

K_ϱ	$h = \frac{n_2}{n_1}$	K_ϑ	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_2$	$\frac{\nu_1}{n_1}$	$\frac{\nu_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	$\mathfrak{d}'$	$\frac{\nu'}{n_1}$
0,1	0,99	0,099499	0,04981	0,04981	0,31338	0,31652	0,998758	0,988771	0,05032	0,31814	0,993739
	0,999	0,099995	0,00498	0,00498	0,03127	0,03131	0,999988	0,998988	0,00503	0,03161	0,999487
	1	0,1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	1,001	0,099995	0,00498	0,00498	0,03131	0,03127	0,999988	1,000988	0,00503	0,03161	1,000487
	1,01	0,099509	0,04981	0,04981	0,31335	0,31022	0,998759	1,008746	0,05031	0,31494	1,003752
0,2	0,99	0,199757	0,02450	0,02450	0,15401	0,15555	0,999700	0,989697	0,02552	0,16123	0,994685
	0,999	0,199998	0,00247	0,00247	0,01549	0,01551	0,999997	0,998997	0,00257	0,01614	0,999497
	1	0,2	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	1,001	0,199998	0,00245	0,00245	0,01540	0,01538	0,999997	1,000997	0,00255	0,01603	1,000497
	1,01	0,199762	0,02450	0,02450	0,15399	0,15245	0,999700	1,009700	0,02552	0,15979	1,003532

für $\varepsilon = \infty$ würde dasselbe mit Bezug auf Teilsystem 2 gelten.

4. *Ist $\varepsilon = 1$, sind also beide Teilsysteme gleich stark gedämpft, so haben die Koppelungskoeffizienten und die Dämpfungen annähernd dieselben Werte wie für $\varepsilon = 0$ bei gleichem K_ϱ.* In der Umgebung der Resonanzstelle hat K_ϑ annähernd den Wert wie K_ϱ und die Dämpfungen steigen von Null an. Bei einer Verstimmung von $^1/_{100}$ (ein Hundertstel) ist das log. Dekrement der beiden Teilsysteme etwa 0,15 und das resultierende Dekrement ebenfalls, bei $^1/_{1000}$ (ein Tausendstel) Verstimmung ist es etwa 0,016.

VI. Gleichzeitig galvanische und elektrische (Widerstands- und Kraftkoppelung) vorhanden.

§ 22. Die Bedingungsgleichungen. Die Koppelungskoeffizienten sind $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, σ_1, σ_2, ϑ_1, ϑ_2 von Null verschieden. Die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung:

$$(101)\quad \begin{cases} a_3 = 2(\delta_1 + \delta_2) = \frac{\delta_1}{n_1}(1+\varepsilon)n_1\,, \\ a_2 = n_1{}^2 + n_2{}^2 + 4\delta_1\delta_2(1-\sigma_1\sigma_2) \\ \qquad = \left[1 + h^2 + \frac{4\delta_1{}^2\varepsilon}{n_1{}^2}(1 - K_\sigma{}^2)\right] n_1{}^2, \\ a_1 = 2(\delta_2 n_1{}^2 + \delta_1 n_2{}^2 - \delta_2\sigma_2 n_1{}^2\vartheta_1 - \delta_1\sigma_1 n_2{}^2\vartheta_2)\,, \\ a_0 = n_1{}^2 n_2{}^2(1 - \vartheta_1\vartheta_2) = h^2(1 - K_\vartheta{}^2) n_1{}^4. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) geben:

$$(102)\quad 2\varkappa n_1 n_2\sqrt{1 - K_\vartheta{}^2} = n_1{}^2 + n_2{}^2 + 4\delta_1\delta_2(1 - K_\sigma{}^2) - (\delta_1 + \delta_2)^2,$$

$$(103)\quad 2\varkappa n_1 n_2(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{1 - K_\vartheta{}^2} = 2(\delta_2 n_1{}^2 + \delta_1 n_2{}^2 - \delta_2\sigma_2 n_1{}^2\vartheta_1 - \delta_1\sigma_1 n_2{}^2\vartheta_2).$$

Diese Gleichungen werden bei Einführung der Bezeichnungen $K_\sigma = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$, $K_\vartheta = \sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}$, $\delta_2 = \varepsilon\delta_1$, $n_2 = hn_1$:

$$(102\text{a})\quad \begin{cases} 2\varkappa h n_1{}^2\sqrt{1 - K_\vartheta{}^2} = n_1{}^2(1 + h^2) + 4\varepsilon\delta_1{}^2(1 - K_\sigma{}^2) \\ \qquad - \delta_1{}^2(1+\varepsilon)^2, \end{cases}$$

$$(103\text{a})\quad 2\varkappa h n_1{}^2\delta_1(1+\varepsilon)\sqrt{1 - K_\vartheta{}^2} = 2\delta_1 n_1{}^2\left[h^2 + \varepsilon - 2h\sqrt{\varepsilon}K_\sigma K_\vartheta\right].$$

Auch hier ist wieder außer h und ε noch eine dritte Größe, etwa K_ϑ frei wählbar. Und damit folgt:

(104) $$K_\sigma = \frac{h^2 + \varepsilon - \varkappa h(1+\varepsilon)\sqrt{1-K_\vartheta^2}}{2hK_\vartheta\sqrt{\varepsilon}},$$

(105) $$\frac{\delta_1}{n_1} = \sqrt{\frac{2\varkappa h\sqrt{1-K_\vartheta^2} - (h^2+1)}{4\varepsilon(1-K_\sigma^2) - (1+\varepsilon)^2}}.$$

Aus (104) folgt, daß in allen drei Fällen A, B und C, also für $\varkappa \gtreqless 1$, ε weder Null noch ∞ sein darf, daß also die Teilsysteme nicht sehr verschieden starke Dämpfungen haben dürfen, wenn nicht noch zwischen h, $\varkappa$ und K_ϑ bestimmte Beziehungen bestehen. Diese sind:

(106) $$\begin{cases} \text{für } \varepsilon = 0 \text{ muß } h - \varkappa\sqrt{1-K_\vartheta^2} = 0, \\ \text{für } \varepsilon = \infty \text{ muß } 1 - \varkappa h\sqrt{1-K_\vartheta^2} = 0 \end{cases}$$

sein. Dabei wird dann nach einigen Umformungen

$$\text{für } \varepsilon = 0 \qquad \frac{\delta_1}{n_1} = \sqrt{1 - \varkappa^2 + \varkappa^2 K_\vartheta^2},$$

$$\text{für } \varepsilon = \infty \qquad \frac{\delta_1}{n_1} = 0.$$

Für $K_\vartheta = 0$ erhält man aus den Gleichungen wieder den Fall III der alleinigen galvanischen Koppelung, für $K_\sigma = 0$ dagegen den Fall II der elektrischen Koppelung.

§ 23. Der Unterfall VI A ($\varkappa = 1$). Für vollkommene Einwelligkeit erhält man aus (104) und (105) die Bedingungen:

(107) $$K_\sigma = \frac{h^2 + \varepsilon - h(1+\varepsilon)\sqrt{1-K_\vartheta^2}}{2hK_\vartheta\sqrt{\varepsilon}},$$

(108) $$\frac{\delta_1}{n_1} = \frac{\left(h + \frac{1}{h}\right) - 2\sqrt{1-K_\vartheta^2}}{\frac{1}{h}\left[(1-\varepsilon)^2 + 4\varepsilon K_\sigma^2\right]}.$$

Weiter folgt aus den bekannten Gleichungen:

(109) $$\frac{\delta'}{n_1} = \frac{\delta_1}{n_1}\,\frac{1+\varepsilon}{2},$$

(110) $$\frac{\nu'}{n_1} = \sqrt{h\sqrt{1-K_\vartheta^2} - \frac{\delta_1^2}{n_1^2}\,\frac{(1+\varepsilon)^2}{4}}.$$

Um kleine Dämpfungen δ_1 und damit auch kleine resultierende Dämpfungen δ' zu bekommen, muß man den Zähler von (108) klein machen. Er wird Null in einem Grenzfall, nämlich wenn $h + \frac{1}{h} = 2\sqrt{1-K_\vartheta^2}$ ist. Dies kann aber nur geschehen, wie sich leicht nachweisen läßt, wenn gleichzeitig $K_\vartheta = 0$ und $h = 1$ ist, denn $h + \frac{1}{h}$ hat seinen *kleinsten* Wert 2 für $h = 1$, sonst ist es größer, $2\sqrt{1 - K_\vartheta^2}$ dagegen hat seinen *größten* Wert 2 für $K_\vartheta = 0$, sonst ist es kleiner; nur am Punkte $h = 1$, $K_\vartheta = 0$ kommen beide Werte zusammen.

Verhältnismäßig einfach lassen sich die Koppelungen K_σ und die Dämpfungen δ_1 der Größenordnung nach für den Fall bestimmen, wenn die Verstimmung der Teilsysteme gleich Null gemacht wird, d. h. für $h = 1$. Man erhält:

$$\text{Größenordnung von } K_\sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} K_\vartheta, & \text{wenn } \varepsilon \ll 1, \\ \dfrac{1}{2} K_\vartheta, & \text{wenn } \varepsilon = 1, \\ \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{4} K_\vartheta, & \text{wenn } \varepsilon \gg 1, \end{cases}$$

$$\text{Größenordnung von } \frac{\delta_1}{n_1} = \begin{cases} K_\vartheta, & \text{wenn } \varepsilon \ll 1, \\ \sqrt{1 + \frac{1}{4} K_\vartheta^2}, & \text{wenn } \varepsilon = 1, \\ \dfrac{K_\vartheta}{\varepsilon}, & \text{wenn } \varepsilon \gg 1. \end{cases}$$

Einen vollständigen Überblick erhält man durch zahlenmäßige Berechnung bestimmter Fälle, wie dies z. B. in den Tabellen der vorhergehenden Paragraphen für die anderen Koppelungsarten geschehen ist. Es dürfte aber kaum lohnen, diese umständliche Arbeit in größerer Ausdehnung auszuführen, da der Fall der galvanisch-elektrischen Koppelung ohne gleichzeitige magnetische Koppelung kaum praktisch verwirklicht ist und zurzeit keine besondere Bedeutung hat.

VII. Gleichzeitig alle drei Koppelungen (magnetische, galvanische, elektrische).

§ 24. Zweifellos birgt dieser allgemeinste Koppelungsfall interessante und wichtige, für die Praxis bedeutungsvolle Einzelheiten in sich. Da man aber bei seiner Behandlung die unverkürzten Werte der Koeffizienten $a_0 \ldots a_3$ von Gleichung (32) mit allen drei Koppelungsparametern K_ϱ, K_σ, K_ϑ zu benutzen hat, so werden die Verhältnisse sehr unübersichtlich. Die Mannigfaltigkeit der möglichen Veränderungen ist wegen der

5 Variablen (ε, δ, K_ϱ, K_σ, K_ϑ) die auch nur durch die bisherigen zwei Bedingungsgleichungen (15) und (16) zusammengehalten werden, so groß, daß eine kurze Behandlung unmöglich erscheint. Man kann nur folgendes feststellen:

Sind die drei Koppelungen annähernd gleich stark, so gilt das soeben Gesagte in vollem Umfange.

Ist aber eine oder sind gar zwei Koppelungen wesentlich schwächer vertreten, so nähert sich das System jeweils einem der in dieser Arbeit behandelten Systeme mit gemischter oder einfacher Koppelung und man kann die hier aufgestellten Gesetze mit gewisser Annäherung auf das allgemeine System anwenden. Wie weit das berechtigt ist, muß die Erfahrung lehren.

Zusammenfassung.

Auf Grund der in der ersten Veröffentlichung abgeleiteten Bedingungen für die Einwelligkeit gekoppelter, aus zwei Teilsystemen zusammengesetzter Schwingungssysteme werden außer der magnetischen (Beschleunigungs-) Koppelung andere mögliche Koppelungsarten, insbesondere auch gemischte Koppelungen bezüglich der Herstellung einwelliger Systeme untersucht. Formeln und Zahlenmaterial in Tabellenform zur Beurteilung der Wirkungsweise derselben werden mitgeteilt.

Danzig-Langfuhr, Technische Hochschule, Juli 1922.

(Eingegangen 17. Juli 1922.)