Über Gebiete gleichmäßiger Konvergenz Dirichletscher Reihen.

Von

Ludwig Neder in Leipzig.

Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen in Gebieten, die an den Rand der Konvergenzhalbebene heranreichen, besitzt man,

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \text{ für } s = 0 \text{ konvergent}$$

vorausgesetzt, durch die Herren O. Perron[1]) bzw. E. Cahen[2]) folgende beiden grundlegenden Sätze:

Satz 1. *Die Dirichletsche Reihe* (1) *konvergiert gleichmäßig in jedem Gebiete*

$$(2) \qquad \sigma \geqq 1, \quad |t| \leqq e^{k\sigma},$$

wo $k > 0$ beliebig gegeben ist.

Satz 2. *Die Dirichletsche Reihe* (1) *konvergiert gleichmäßig in jedem Winkelraum*

$$(3) \qquad 0 < \sigma \leqq 1, \quad |t| \leqq k\sigma,$$

wo $k > 0$ beliebig gegeben ist.

Bei der Bedeutung, die diesen beiden Sätzen zukommt, ist die Frage am Platze, ob dieselben einer Verschärfung fähig sind, indem man in (2) die Konstante k ersetzt durch eine geeignete Funktion $\omega(\sigma)$, wo

$$(4) \qquad \omega(\sigma) > 0 \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1, \quad \text{und} \quad \overline{\lim_{\sigma=\infty}}\, \omega(\sigma) = \infty,$$

bzw. in (3) die Konstante k durch $\omega(1/\sigma)$, wo wiederum (4) gilt.

---

[1]) Zur Theorie der Dirichletschen Reihen [Journ. f. d. reine u. angew. Math. **131** (1908), S. 95], auf S. 106–109 (implizit).

[2]) Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues [Thèse, Paris 1894, auch Ann. de l'école norm. (3) **11** (1894), S. 75] in Nr. 7 (in allem wesentlichen).

Die Antwort lautet in beiden Fällen verneinend, jedoch in sehr verschiedenem Sinne, und ist durch folgende beiden Sätze gegeben:

Satz 3. a) *Zu jedem λ-Typus gibt es eine passende Funktion* (4) *der Art, daß sogar*

$$\lim_{\sigma=\infty} \omega(\sigma) = \infty \tag{5}$$

ist, und jede Reihe (1) *jenes Typus im zugehörigen Gebiete*

$$\sigma \geqq 1, \quad |t| \leqq e^{\sigma\omega(\sigma)} \tag{6}$$

gleichmäßig konvergiert.

b) *Dagegen gibt es zu jeder gegebenen Funktion* (4) *einen λ-Typus und von diesem eine Reihe* (1), *die im zugehörigen Gebiete* (6) *ungleichmäßig konvergiert.*

Satz 4. *Es gibt einen λ-Typus, nämlich den Typus $\lambda_n = n$ der Potenzreihen ohne konstantes Glied, welcher zu jeder gegebenen Funktion* (4) *eine Reihe* (1) *enthält, die im zugehörigen Gebiete*

$$0 < \sigma \leqq 1, \quad |t| \leqq \sigma\omega(1/\sigma) \tag{7}$$

ungleichmäßig konvergiert.

Wir geben nachstehend im § 1 den Beweis des Satzes 3.

Den Satz 4 hat bereits Herr I. Schur[3]) im Rahmen einer allgemeinen Theorie als Spezialfall erhalten.

Wegen der Analogie mit dem zu Satz 3b konstruierten Beispiel geben wir im § 2 einen direkten Beweis durch ein einfaches Beispiel.

§ 1.

Beweis des Satzes 3. a) Zunächst darf man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\lambda_1 > 0$ voraussetzen.

Ferner nehmen wir als „passende" Funktion (4) im Sinne der Behauptung

$$\omega(\sigma) = \lambda_m \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1,$$

wobei

$$m = [e^{\lambda_1 \sigma}], \quad \text{also} \quad 1 \leqq m \leqq e^{\lambda_1 \sigma}.$$

Dann gilt (4) und (5).

Endlich genügt es zu beweisen, daß für

$$C_n = c_1 + \ldots + c_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

aus der Voraussetzung

$$|C_n| \leqq C \tag{8}$$

[3]) Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen [Journ. f. d. reine u. angew. Math. **151** (1921), S. 79], vgl. S. 108, Zeile 12ff.

folgt, daß bei unserer Wahl von $\omega(\sigma)$ im zugehörigen Gebiete (6) gleichmäßig die Abschätzung gilt

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s}\right| \leqq 4C.$$

Denn man braucht dieses Ergebnis nur auf

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \leqq r \\ a_n & \text{für} \quad n > r \end{cases}$$

anzuwenden, um die Behauptung zu erhalten.

Nun ist bekanntlich bei jeder Dirichletschen Reihe unter der Voraussetzung (8) für $\sigma > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) = \sum_{n=1}^{m} + \sum_{n=m+1}^{\infty},$$

wo m die obige Bedeutung hat. In unserem Gebiete (6) wird daher der Betrag der linken Seite

$$\begin{aligned} &\leqq C \cdot \sum_{n=1}^{m} (e^{-\lambda_n \sigma} + e^{-\lambda_{n+1} \sigma}) + C \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|s|}{\sigma} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma}) \\ &\leqq C \cdot 2 m e^{-\lambda_1 \sigma} + C \cdot (1 + |t|) e^{-\lambda_m \sigma} \\ &\leqq 2C + C e^{-\lambda_m \sigma} + C e^{(\omega(\sigma) - \lambda_m)\sigma} \leqq 4C, \end{aligned}$$

wie behauptet.

b) Bei gegebener Funktion (4) gibt es im zugehörigen Gebiete (6) eine Punktfolge $s_\nu = \sigma_\nu + i t_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) mit

$$\sigma_\nu \geqq 1, \quad \sigma_\nu \to \infty, \quad \lim_{\nu = \infty} \frac{\log t_\nu}{\sigma_\nu} = \infty.\text{[4]}$$

Wie man durch Auswahl einer passenden Teilfolge erkennt, darf man annehmen

$$\frac{\log t_\nu}{\sigma_\nu} \geqq 2(\nu + 1).$$

Setzt man dann

$$m_\nu = [t_\nu],$$

so lautet unser Beispiel

(9) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu(s+\sigma_\nu)} \sum_{\mu=0}^{m_\nu - 1} (e^{i - s/m_\nu})^\mu.$$

Dies ist formal eine Dirichletsche Reihe, bei der für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die Glieder mit $\nu \leqq \lambda_n < \nu + 1$ zu einer Gruppe zusammengefaßt sind.

---

[4]) Nur dies wird benutzt. Wir beweisen also etwas mehr als behauptet.

Unsere Dirichletsche Reihe konvergiert für $s=0$, und sogar überall. Denn es ist bei festem s und $m \leqq m_\nu$ für alle großen ν

$$|R| = \left|\sum_{\mu=0}^{m-1} (e^{i-s/m_\nu})^\mu\right| \leqq \frac{1+e^{|\sigma|}}{|1-e^{i-s/m_\nu}|} \leqq 3e^{|\sigma|},$$

also

$$|e^{-\nu(s+\sigma_\nu)} R| \leqq e^{-\nu} \cdot 3e^{|\sigma|},$$

und daher einerseits in (9) die $\sum\limits_\nu$ konvergent, andererseits

$$\Omega_\nu = \underset{\nu \leqq \lambda_r < \nu+1}{\text{Maximum}} \left|\sum_{\nu \leqq \lambda_n \leqq \lambda_r} a_n e^{-\lambda_n s}\right| \to 0. \tag{10}$$

Und es konvergiert unsere Dirichletsche Reihe ungleichmäßig bereits in der Menge der s_ν. Denn es ist

$$i - \frac{s_\nu}{m_\nu} = i - \frac{\sigma_\nu + i(m_\nu + \vartheta)}{m_\nu} = -\frac{\sigma_\nu}{m_\nu} - i\frac{\vartheta}{m_\nu} \quad (0 \leqq \vartheta < 1)$$

und daher

$$\left|\sum_{\nu \leqq \lambda_n < \nu+1} a_n e^{-\lambda_n s_\nu}\right| = e^{-2\nu\sigma_\nu} \left|\sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} e^{-\sigma_\nu \mu/m_\nu - i\vartheta\mu/m_\nu}\right|$$

$$\geqq e^{-2\nu\sigma_\nu} \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} e^{-\sigma_\nu \mu/m_\nu} \cos \vartheta\mu/m_\nu$$

$$\geqq e^{-2\nu\sigma_\nu} \cdot m_\nu \cdot e^{-\sigma_\nu} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\geqq e^{-2\nu\sigma_\nu + 2(\nu+1)\sigma_\nu - \sigma_\nu + O(1)} = e^{\sigma_\nu + O(1)} \to \infty,$$

was die gleichmäßige Konvergenz ausschließt.

§ 2.

Beweis des Satzes 4. Bei gegebener Funktion (4) gibt es im zugehörigen Gebiete (7) eine Punktfolge $s_\nu = \sigma_\nu + it_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ mit

$$\sigma_\nu > 0, \quad t_\nu \to 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{t_\nu}{\sigma_\nu} = \infty. \text{[4]}$$

Wie man durch Auswahl einer passenden Teilfolge erkennt, darf man annehmen

$$\frac{t_\nu}{\sigma_\nu} \geqq 4\nu^3 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sigma_\nu} \geqq 1 + \frac{1}{\sigma_1} + \ldots + \frac{1}{\sigma_{\nu-1}}.$$

Setzt man dann

$$m_\nu = \left[\frac{1}{\sigma_\nu}\right],$$

so lautet unser Beispiel

$$(11) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\sigma_\nu e^{-(m_1+\cdots+m_{\nu-1})s} \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} (e^{s_\nu - s})^\mu .$$

Dies ist formal eine Potenzreihe, bei der für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die Glieder mit $m_1 + \ldots + m_{\nu-1} \leqq n < m_1 + \ldots + m_\nu$ zu einer Gruppe zusammengefaßt sind, die wir $Q_\nu(s)$ nennen.

Unsere Potenzreihe konvergiert für $s = 0$. Denn es ist bei $m \leqq m_\nu$ für alle großen ν

$$|S| = \left| \sum_{\mu=0}^{m-1} (e^{s_\nu})^\mu \right| \leqq \frac{1 + e^{\sigma_\nu m_\nu}}{|1 - e^{s_\nu}|} \leqq \frac{4}{|s_\nu|} \leqq \frac{4}{t_\nu},$$

also

$$|\nu\sigma_\nu S| \leqq 4\nu \frac{\sigma_\nu}{t_\nu} \leqq \frac{1}{\nu^2},$$

und daher einerseits in (11) die $\sum\limits_\nu$ konvergent, andererseits auch das Analogon zu (10) erfüllt.

Und es konvergiert unsere Potenzreihe ungleichmäßig bereits in der Menge der s_ν. Denn es ist

$$|Q_\nu(s_\nu)| = \nu\sigma_\nu m_\nu e^{-(m_1+\cdots+m_{\nu-1})\sigma_\nu} \geqq \nu \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-1} \to \infty,$$

was die gleichmäßige Konvergenz ausschließt.

Leipzig, den 13. Mai 1922.

(Eingegangen am 13. Mai 1922.)