

# Bemerkung zu der vorstehenden Abhandlung: Über die Konvergenz eines mit einer Potenzreihe assoziierten Kettenbruches von H. Hamburger in Berlin.

Von

F. Bernstein in Göttingen.

Die Resultate der vorstehenden schönen Arbeit von H. Hamburger decken sich im speziellen Fall mit den Ergebnissen der von mir im 28. Bd. des Jahresberichts der deutschen Mathematikervereinigung 1. bis 6. Heft, 1919 veröffentlichten Arbeit: *Die Übereinstimmung derjenigen beiden Summationsverfahren, welche von T. J. Stieltjes und E. Borel herrühren*<sup>1)</sup>. Das gegenseitige Verhältnis beider Arbeiten, welche in ihrer Verallgemeinerungsrichtung auseinandergehen, wird unter Benutzung der Bezeichnungen meiner Arbeit durch folgendes Schema gekennzeichnet:

I

Übereinstimmung der Summationsverfahren unter Voraussetzung von

1.  $\kappa = 1$
2.  $A_n > 0$ .

II

Übereinstimmung der Summationsverfahren unter Voraussetzung von

1.  $0 < \kappa < 2$ <sup>2)</sup>
2.  $A_n > 0, B_n > 0$ .

<sup>1)</sup> Am Schluß meiner Arbeit befindet sich, wie mir Herr Hamburger freundlichst mitteilt, ein kleines Versehen. Dieses läßt sich aber durch folgende Bemerkung beseitigen: Die Funktionen  $e^{-z^{1/\kappa} \cdot \lambda} \mathfrak{B}_n^{-1} \frac{P_n}{Q_n}$  ( $0 < \kappa < 2$ ) konvergieren gleichmäßig für sämtliche  $\lambda \geq 0$  gegen  $e^{-z^{1/\kappa} \cdot \lambda} F_n(\lambda)$ , da die  $\mathfrak{B}_n^{-1} \frac{P_n}{Q_n}$  in jedem endlichen Intervall  $\lambda_0 \leq \lambda \leq 0$  gleichmäßig gegen  $F_n(\lambda)$  konvergieren und überdies für alle  $\lambda \geq 0$  unterhalb einer von  $n$  unabhängigen Schranke liegen. Damit sind die Operationen (62) bis (65) legitimiert. Übrigens ist für  $\kappa = 1$  die Borelsche Schreibweise der Laplaceschen Transformation  $\int_0^\infty e^{-t} F(\lambda t) dt$  von vornherein, um den Anschluß an (36) zu wahren, konsequent durch  $\int_0^\infty e^{-\lambda z} F(\lambda) d\lambda$  zu ersetzen.

<sup>2)</sup> Es läßt sich, wie mir Herr Hamburger nachträglich mitteilte, der Grenzfall  $\kappa = 2$  durch eine einfache Transformation aus seinem Resultat ableiten.

## III

der beiden Arbeiten gemeinsame Fall:

$$1. \kappa = 1$$

$$2. A_n > 0, B_n > 0.$$

I ist die Arbeit von Hamburger, II entspricht meiner Veröffentlichung. ( $A_n$  und  $B_n$ <sup>3)</sup> bedeuten die bekannten Stieltjesschen Determinanten,  $\kappa$  ist der Le Roysche Summationsindex.)

Beide Verallgemeinerungen haben ihr besonderes Interesse, die von Herrn Hamburger für die von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstreckten Stieltjesschen Integrale, die von mir herrührende für das in der Einleitung daselbst genannte Problem (Positivität der Fourierintegrale).

---

<sup>3)</sup> Für  $A_n$  und  $B_n$  ist in der Hamburgerschen Arbeit  $C_m$  und  $B_m$  geschrieben.

(Angenommen 15. 4. 1920.)