

Über einen Dirichletschen Satz.

Von

G. Herglotz in Leipzig.

In der die Theorie des allgemeinen relativ-quadratischen Körpers (Math. Ann. 51, S. 1 u. ff.) vorbereitenden und dem Dirichletschen Zahlkörper geltenden Arbeit (Math. Ann. 45, S. 309 u. ff.) hat Hilbert auf arithmetischem Wege den Dirichletschen Satz¹⁾ erschlossen, daß die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{m}, \sqrt{-m})$ dem Produkt der Klassenzahlen der Körper $k(\sqrt{m})$ und $k(\sqrt{-m})$ oder der Hälfte desselben gleich ist. Für die ursprüngliche transzendente Beweismethode des Satzes wie seiner Ausdehnung auf den $K(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_t})$ andererseits liefert die Hilbertsche Theorie des Galoisschen Körpers in Verbindung mit den Dedekindschen Feststellungen der Beziehungen zu seinen Teilern eine einfache Fassung, da derselbe einem vollen Kreiskörper angehört und also seine Z -Funktion und damit nach E. Hecke auch Diskriminante leicht gewonnen werden kann. Es sei daher gestattet, jenen Dirichletschen Satz auch aus diesem Gesichtspunkt Hilbertscher Resultate zu betrachten und vorab die Z -Funktion der Unterkörper eines Kreiskörpers in eine für den beabsichtigten Zweck bequeme Form zu setzen.

I. Z -Funktion und Diskriminante der Unterkörper des Kreiskörpers.

Sei zunächst Ω ein Galoisscher Körper der Gruppe G vom Grad n und ω ein Galoisscher, zur ausgezeichneten Untergruppe g von G gehörender, Unterkörper desselben vom Grad ϱ , wobei $n = r \cdot \varrho$.

Ist dann \mathfrak{P}_0 ein Primidealteiler in Ω der Primzahl p , und \mathfrak{p}_0 der durch \mathfrak{P} teilbare Primidealteiler in ω von p , so sind nach der Hilbert-Dedekindschen Theorie eines Galoisschen Körpers der Zerlegungs- und Trägheitskörper ω_s, ω_t von \mathfrak{p}_0 die Durchschnitte der Zerlegungs- und

¹⁾ Dirichlet, Werke, 1, S. 533.

Trägheitskörper Ω_z, Ω_t von \mathfrak{P}_0 mit ω . Seien demnach g_z, g_t die Zerlegungs- und Trägheitsgruppe von \mathfrak{P}_0 :

$$(1) \quad \underbrace{G\{g_z\}}_{f} \underbrace{\{g_t\}}_{e} \underbrace{\{1\}}_{m} = n,$$

so gehören ω_z, ω_t als Unterkörper von Ω zu den kleinsten gemeinsamen Vielfachen: $g'_z = g_z \cdot g, g'_t = g_t \cdot g$ der Gruppen g_z, g_t und g :

$$(2) \quad \underbrace{G\{g'_z\}}_{f'} \underbrace{\{g'_t\}}_{e'} \underbrace{\{g\}}_{m'} = \varrho,$$

und wenn weiter \bar{g}_z, \bar{g}_t die größten gemeinsamen Teiler (Durchschnitte) der Gruppen g_z, g_t und g sind:

$$(3) \quad \underbrace{g\{\bar{g}_z\}}_{\bar{f}} \underbrace{\{\bar{g}_t\}}_{\bar{e}} \underbrace{\{1\}}_{\bar{m}} = r,$$

so gilt

$$(4) \quad f = f' \bar{f}, \quad e = e' \bar{e}, \quad m = m' \bar{m}.$$

Es gelten dann die Zerlegungen:

$$(5) \quad \text{in } \omega: p = (\mathfrak{p}_0 \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_{f'-1})^{m'} \quad n(\mathfrak{p}_i) = p^{e'},$$

$$(6) \quad \text{in } \Omega: \mathfrak{p}_0 = (\mathfrak{P}_0 \cdot \mathfrak{P}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{P}_{\bar{f}-1})^{\bar{m}} \quad N_r(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{p}_0^{\bar{e}}$$

und die Z -Funktion des Körpers ω ist:

$$(7) \quad Z(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{e's}}\right)^{-f'}.$$

Hier können die der Primzahl p zugeordneten Zahlen e', f' passend so erklärt werden: da

$$(8) \quad g_z = g_t + Z g_t + Z^2 g_t + \dots + Z^{e'-1} g_t$$

ist, und demnach

$$(9) \quad g'_z = g'_t + Z g'_t + Z^2 g'_t + \dots + Z^{e'-1} g'_t$$

wird, so ist $Z^{e'}$ die niedrigste Potenz ($e' \geq 1$) von Z , welche zu $g'_t = g_t \cdot g$ gehört, während $e' f' = G/g'_t$ der Index von g'_t in der Obergruppe G ist.

Ist nunmehr G eine Abelsche Gruppe und werden die Substitutionen s von g durch die ϱ Charakterenbedingungen:

$$(10) \quad \xi_0(s) = 1, \quad \xi_1(s) = 1, \quad \dots, \quad \xi_{\varrho-1}(s) = 1$$

aus G ausgeschnitten, so erhält man die entsprechenden Bedingungen für die Gruppe $g'_t = g_t \cdot g$, indem man hier nur jene ξ_i beibehält, welche in g_t durchaus 1 werden. Danach ist unmittelbar:

$$(11) \quad Z(s) = \prod_p \prod_i \left(1 - \frac{\xi_i(Z)}{p^s}\right)^{-1},$$

worin das innere Produkt jeweils über diejenigen der ϱ Charaktere ξ_i zu erstrecken ist, die in g_i Eins werden.

Sei endlich Ω insbesondere der Körper der a -ten Einheitswurzeln, so darf G mit der Gruppe der $n = \varphi(a)$ primen Restklassen $S \bmod a$ identifiziert werden. Ist dann $a = p^k \cdot b$ ($b: p$ unteilbar), so besteht g_i aus den $m = \varphi(p^k)$ Klassen $\bmod a$ mit Zahlen $A \equiv 1 \pmod{b}$, während für Z irgendeine der m Klassen $\bmod a$ mit Zahlen $A \equiv p \pmod{b}$ zu nehmen ist. Bezüglich der Charaktere $\xi(S) = \xi(A)$ der primen Restklassen $S \bmod a$ oder der zu a primen Zahlen A ist weiter daran zu erinnern, daß der einzelne Charakter ξ zu einem bestimmten Teiler d von a in dem Sinne „gehört“, daß d die kleinste Zahl ist, bei der

$$(12) \quad \xi(A) = 1 \quad \text{für alle } A \equiv 1 \pmod{d}$$

und dann in sofort ersichtlicher Weise für die primen Restklassen $\bmod d$ einen zum Teiler d gehörenden Charakter χ oder „eigentlichen“ Charakter $\bmod d$ festlegt²⁾. Demgemäß mögen die ϱ die Untergruppe g definierenden Charaktere ξ_i zu den Teilern d_i von a gehören und die χ_i die entsprechenden eigentlichen Charaktere $\bmod d_i$ bezeichnen. Es sind dann diejenigen ξ_i , welche in g_i Eins werden, genau jene, bei denen $b: d_i$ teilbar ist, und für sie gilt:

$$(13) \quad \xi_i(Z) = \xi_i(A) = \chi_i(p),$$

so daß man erhält:

$$(14) \quad Z(s) = \prod_p \prod_i \left(1 - \frac{\chi_i(p)}{p^s} \right)^{-1}$$

das innere Produkt jeweils über diejenigen χ_i erstreckt, für welche $b: d_i$ teilbar ist.

Will man hier die Multiplikationsordnung umkehren, so ist nur zu beachten, daß das einzelne $\chi_i(p)$ für die und nur die Primzahlen p auftritt, bei denen $a = p^k b$, $b: d_i$ teilbar ist, und diese wegen $a: d_i$ teilbar, $b: p$ unteilbar gerade mit den nicht in d_i aufgehenden zusammenfallen. Es wird also bei Absonderung des dem Hauptcharakter $\chi_0 = \xi_0 \equiv 1$, $d_0 = 1$ entsprechenden Faktors $\zeta(s)$ und Einführung der L -Reihen:

$$(15) \quad Z(s) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{v-1} L(s, \chi_i, d_i).$$

²⁾ Es ist die Anzahl der zum Teiler d gehörenden Charaktere $\bmod a$ gleich der Anzahl der eigentlichen Charaktere $\bmod d$ und gegeben durch:

$$d \prod_i \left(1 - \frac{2}{l_i} \right) \prod_j \left(1 - \frac{1}{l_j} \right)^2,$$

wo l_i die einfachen, l_j die mehrfachen Primteiler von d zu durchlaufen hat.

Der Vergleich ³⁾ der allgemeinen Heckschen Funktionalgleichung für $Z(s)$ mit der aus dieser Darstellung folgenden ergibt für die Diskriminante Δ des Körpers ω nach leichter Vorzeichenbestimmung:

$$(16) \quad \Delta = \prod_{i=1}^{g-1} \chi_i(-1) d_i.$$

II. Die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_t})$.

Ein quadratischer Körper der Diskriminante Δ ist im Kreiskörper Ω enthalten, sobald $\alpha:\Delta$ teilbar ist, und die Untergruppe g , zu der er gehört, wird aus G durch $\chi = 1$ ausgeschnitten, falls $\chi = \chi(\Delta, \Delta)$ der eigentliche Charakter mod $|\Delta|$ ist, welcher die Primzahlzerlegung im quadratischen Körper regelt⁴⁾.

Der durch t voneinander unabhängige Quadratwurzeln $(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_t})$ erzeugte Körper K des Grades $n = 2^t$ enthält $n - 1$ quadratische Unterkörper k_i der Diskriminanten Δ_i , die je durch die sämtlichen, mit jenen t Wurzeln zu bildenden Produkte erzeugt werden. Er selbst ist enthalten im Kreiskörper Ω , falls α gemeinsames Vielfaches der Δ_i ist und die n Charaktere χ_i , welche die Untergruppe g , zu der er gehört, aus G ausschneiden, sind gerade die $n - 1$ jenen Diskriminanten Δ_i zugeordneten Charaktere $\chi_i = \chi_i(\Delta, \Delta_i)$ nebst dem Hauptcharakter $\chi_0 \equiv 1$ ⁵⁾.

Danach ist Z -Funktion und Diskriminante des Körpers K :

$$(17) \quad Z(s) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{n-1} L(s, \chi_i, \Delta_i),$$

$$(18) \quad \Delta = \prod_{i=1}^{n-1} \Delta_i.$$

Für die Primzahlzerlegung in K ist aus (17) leicht zu entnehmen: die in keinem Δ_i aufgehenden Primzahlen p zerfallen in n Primideale ersten oder $\frac{n}{2}$ Primideale zweiten Grades, je nachdem die n Charaktere $\chi_i(p)$

³⁾ Dieses Prinzip der Verwendung der Funktionalgleichung zur Diskriminantenbestimmung erstmalig bei E. Hecke (Gött. Nachr. 1917).

⁴⁾ Für die Primdiskriminanten $\Delta = -4, +8, -8, (-1)^{\frac{l-1}{2}} l$ bzw. $\chi = (-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}$
 $(-1)^{\frac{\Delta^2-1}{8}}, (-1)^{\frac{\Delta-1}{2} + \frac{\Delta^2-1}{8}}, \left(\frac{\Delta}{l}\right)$ und für zusammengesetztes Δ das Produkt der den Primdiskriminanten in Δ entsprechenden Charaktere. (Vgl. Weber, Algebra III.)

⁵⁾ Unter Hinzunahme von $\Delta_0 = 1$, dem $\chi_0 \equiv 1$ entspreche, bilden die Δ_i und die χ_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) zwei untereinander und mit der Gruppe von K isomorphe Gruppen.

alle $= +1$ oder zur Hälfte $= +1$ zur Hälfte $= -1$ ausfallen, die Primteiler $l \neq 2$ der Δ_i zerfallen in die Quadrate von $\frac{n}{2}$ Primidealen ersten oder $\frac{n}{4}$ Primidealen zweiten Grades, je nachdem die den $\frac{n}{2}$ durch l unteilbaren Δ_i ($\Delta_0 = 1$ mit $\chi_0 = 1$ hinzu gedacht) entsprechenden $\frac{n}{2}$ Charaktere $\chi_i(l)$ alle $= +1$ oder zur Hälfte $= +1$ zur Hälfte $= -1$ ausfallen, der Primteiler $l = 2$ endlich zerfällt in entsprechender Weise in lauter zweifache oder vierfache Primidealfaktoren, je nachdem in den Diskriminanten der t Grundkörper $(\sqrt{m_1}), \dots, (\sqrt{m_t})$ nur eine oder mehrere der Primdiskriminanten $-4, +8, -8$ vorkommt (je nachdem sind nämlich $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n}{4}$ der Δ_i ($\Delta_0 = 1$ hinzugedacht) ungerade.)

Sind die Diskriminanten $\delta_1, \dots, \delta_t$ der t Grundkörper $(\sqrt{m_1}), \dots, (\sqrt{m_t})$ relativ prim, so fallen die Δ_i mit den sämtlichen aus ihnen zu bildenden Produkten zusammen, wonach:

$$(19) \quad \Delta = \delta^{\frac{n}{2}}, \quad \delta = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \dots \cdot \delta_t$$

oder K sich als unverzweigt über $k(\sqrt{\delta})$ erweist.

Sind $\delta_1, \dots, \delta_t$ überdies Primdiskriminanten, so ist K der Körper der Geschlechter⁶⁾ von $k(\sqrt{\delta})$.

Durch Gl. (17) wird nunmehr für $s \rightarrow 1$ unter Beachtung von Gl. (18) unmittelbar die Klassenzahl H von K mit dem Produkt der Klassenzahlen h_i aller $n - 1$ quadratischen Unterkörper k_i in Beziehung gesetzt. Hierzu ist nur vorweg zu bemerken, daß die Anzahl r der reellen Körper k_i , deren Grundeinheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ ($\varepsilon_i > 1$) seien, in den beiden Fällen

$$(A) \quad K \text{ reell: } r = n - 1,$$

$$(B) \quad K \text{ imaginär: } r = \frac{n}{2} - 1$$

beträgt und beidemal mit der Anzahl der Grundeinheiten E_1, \dots, E_r von K übereinstimmt, und daß ferner der Grad der in K liegenden, also aus Quadratwurzeln zusammensetzbaren, Einheitswurzeln ein Teiler von 24 sein muß⁷⁾. Dann folgt, unter $R(E_i)$ den Regulator der Einheiten verstanden, zunächst:

⁶⁾ R. Fueter, Diss. Göttingen 1903. Dasselbst der arithmetische Beweis der Unverzweigkeit desselben. Den Beweis der Unverzweigkeit des Klassenkörpers von $k(\sqrt{\delta})$ für $\delta < 0$ aus der Funktionalgleichung der Z -Funktion bei E. Hecke, l. c.

⁷⁾ Ein Galoischer Körper ist dann aus Quadratwurzeln zusammensetzbar, wenn für alle Substitutionen desselben $S^2 = 1$ gilt. Der Körper Ω der a -ten Einheitswurzeln also dann, wenn für alle Primreste mod a : $A^2 \equiv 1 \pmod{a}$ gilt, was einzig für die Teiler a von 24 zutrifft.

$$(20) \quad H = \sigma \frac{\prod_{i=1}^r \lg \varepsilon_i}{R(E_i)} \prod_{i=1}^{n-1} h_i,$$

wo $\sigma = 2, 1$, je nachdem K die achten Einheitswurzeln, d. h. also $\sqrt{-1}$ und $\sqrt{2}$, enthält oder nicht.

Den hier auftretenden Quotienten noch etwas weiter zu entwickeln, sind die Fälle (A) und (B) eines reellen und imaginären Körpers K zu trennen.

Fall A. Bedeutet hier $N_i(\alpha)$ die Relativnorm einer Zahl α aus K bezüglich k_i , so wird:

$$(21) \quad N_i(E_j) = \pm \varepsilon_i^{\lambda_{ij}} \quad (i, j = 1, \dots, r)$$

sein, woraus, die E_j positiv gewählt, folgt

$$(22) \quad E_j^{\frac{n}{2}} = \prod_{i=1}^r \varepsilon_i^{\lambda_{ij}} \quad (j = 1, \dots, r).$$

Da andererseits aber auch

$$(23) \quad \varepsilon_i = \prod_{j=1}^r E_j^{\kappa_{ij}} \quad (i = 1, \dots, r)$$

sein muß, so ergibt sich für die ganzzahligen Absolutbeträge der Determinanten der λ_{ij} und κ_{ij} :

$$(24) \quad \lambda = ||\lambda_{ij}||, \quad \kappa = ||\kappa_{ij}||, \quad \lambda \cdot \kappa = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}.$$

Es ist also die Anzahl λ der Verbände, in welche die Einheiten $\varepsilon_1^{\nu_1}, \varepsilon_2^{\nu_2}, \dots, \varepsilon_r^{\nu_r}$ zerfallen, falls demselben Verband solche zugezählt werden, die durch Multiplikation mit der $\frac{n}{2}$ -ten Potenz einer Einheit aus K ineinander überführbar sind, ebenso wie κ eine Potenz von 2.

Nunmehr folgt leicht:

$$(25) \quad R(E_i) = \frac{1}{\kappa} R(\varepsilon_i), \quad R(\varepsilon_i) = n^{\frac{n}{2}-1} \prod_{i=1}^r \lg \varepsilon_i$$

und damit:

$$(A) \quad H = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{n}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} h_i.$$

Fall B. Hier bilden zunächst die $r = \frac{n}{2} - 1$ reellen k_i zusammen den Unterkörper k vom Grad $\frac{n}{2}$ aller reellen Zahlen von K und die eben gemachten Feststellungen gelten hier für den Zusammenhang der Einheiten e_1, \dots, e_r von k mit den Einheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$, so daß

$$(26) \quad R_k(e_i) = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{8}{n}\right)^{\frac{n}{4}} \prod_{i=1}^r \lg \varepsilon_i,$$

$$(27) \quad R(e_i) = 2^r R_k(e_i)$$

wird. Ist weiter $N_k(\alpha) = \alpha \bar{\alpha}$ die Relativnorm einer Zahl α aus K bezüglich k , so wird:

$$(28) \quad N_k(E_j) = \prod_{i=1}^r e_i^{\lambda_{ij}^0} \quad (j = 1, \dots, r)$$

sein, woraus wegen $N_k(E_j) = \vartheta_j E_j^2$ (ϑ_j Einheitswurzel) folgt:

$$(29) \quad \vartheta_j E_j^2 = \prod_{i=1}^r e_i^{\lambda_{ij}^0} \quad (j = 1, \dots, r).$$

Da andererseits aber auch (η_i Einheitswurzel):

$$(30) \quad e_i = \eta_i \prod_{j=1}^r E_j^{\lambda_{ij}^0} \quad (i = 1, \dots, r),$$

so ergibt sich für die ganzzahligen Absolutbeträge der Determinanten der λ_{ij}^0 und λ_{ij}^0 :

$$(31) \quad \lambda_0 = ||\lambda_{ij}^0||, \quad \kappa_0 = ||\lambda_{ij}^0||, \quad \lambda_0 \cdot \kappa_0 = 2^r.$$

Es ist also die Anzahl λ_0 der Verbände, in welche die Einheiten $e_1^{r_1} \cdot e_2^{r_2} \cdot \dots \cdot e_r^{r_r}$ von k zerfallen, falls demselben Verband solche zugezählt werden, die durch Multiplikation mit der Relativnorm einer Einheit aus K ineinander überführbar sind, ebenso wie κ_0 , eine Potenz von 2.

Da nun

$$(32) \quad R(E_i) = \frac{1}{\kappa_0} R(e_i)$$

ist, so folgt

$$(B) \quad H = \frac{2^\sigma}{\lambda \lambda_0} \left(\frac{n}{8}\right)^{\frac{n}{4}} \prod_{i=1}^{n-1} h_i,$$

wo $\sigma = 2, 1$, je nachdem K die achten Einheitswurzeln, d. h. also $\sqrt{-1}$ und $\sqrt{2}$ enthält oder nicht.

Walchensee, den 16. September 1921.

(Eingegangen am 17. September 1921.)