Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Herr Gronwall[1]) hat für die Dirichletschen Reihen

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

welche einem komplexen Charakter[2]) mod k entsprechen, die bekannte Tatsache des Nichtverschwindens im Punkte 1, über die hinaus ich schon vordem

$$\frac{1}{|L(1)|} < c_1 \log^5 k$$

(wo c_1 und c_2 nachher eine absolute, positive Konstante ist) bewiesen hatte, zu

$$\frac{1}{|L(1)|} < c_2 \log k \, (\log \log k)^{\frac{3}{8}}$$

verschärft. Sein Beweis ist allerdings verschiedener Vereinfachungen fähig, durch die er kürzer und durchsichtiger wird. Eine derselben habe ich schon auf S. 286 meiner Arbeit *Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper*[3]) angegeben; des weiteren erwähne ich hier:

1. Bei der Behandlung der uneigentlichen Charaktere ist es nicht nötig, wie Herr Gronwall es auf S. 146—149 tut, den Faktor

---

[1]) Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXV (1913), S. 145—159.

[2]) Vgl. § 101 meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und Berlin 1909.

[3]) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1918, S. 285—295.

$\prod_{\nu=1}^{c}(1-\varepsilon_\nu p_\nu^{-s})$ nebst seiner Weierstraßschen Produktzerlegung und den daraus resultierenden Gliedern durch die Rechnung mitzuschleppen.

2. Auf S. 152 setzt er $t=\gamma$ zur Untersuchung der Lage einer bestimmten Wurzel in seine Ungleichung (23) ein, einem älteren Paradigma ($\zeta(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma=1$) zufolge, von dem sich hier die Abweichung empfiehlt, $t=0$ zu setzen; dadurch können sich die Entwicklungen der vorangehenden Seiten auf die reelle Achse beschränken.

Ohne Kenntnis der Gronwallschen Arbeit vorauszusetzen, will ich im folgenden mit der modifizierten Gronwallschen Methode einen allgemeineren, auf beliebige algebraische Zahlkörper $\varkappa$ vom Grade $n\geqq 1$ bezüglichen Satz beweisen.

Es werde in den Bezeichnungen meiner Arbeit *Über Ideale und Primideale in Idealklassen* [4]), auf die ich im übrigen verweise,

$$|\varDelta|\,N\mathfrak{f}=k$$

gesetzt. Bekanntlich[5]) ist $k\geqq 3$, also $\log\log k>0$.

Der Hauptsatz lautet nun: *Es sei* χ *ein beliebiger komplexer*[6]) *Charakter* mod $\mathfrak{f}$ *und* $\zeta(s,\chi)$ *die zugehörige Heckesche Zetafunktion im Sinne der Definition* XVII. *Dann ist*

$$\frac{1}{|\zeta(1,\chi)|}<\lambda_1\log^n k\,(\log\log k)^{\frac{3n}{8}},$$

wo $\lambda_1=\lambda_1(n)$ (desgl. $\lambda_2,\lambda_3,\ldots$ nachher) *eine positive, nur von* n (nicht vom Körper, $\mathfrak{f}$ und χ, also gewiß nicht von k) *abhängige Konstante ist.*

Dieser Satz enthält offenbar den Gronwallschen als speziellen Fall $n=1$ ($\varkappa$ Körper der rationalen Zahlen). Eine wesentliche Schwierigkeit bei der Ausdehnung seiner Beweismethode auf beliebige algebraische Zahlkörper werden nur die Hilfsformeln (28) und (40) seines § 2 machen, da hier kein Analogon zu der von ihm benutzten trivialen Abschätzung

$$\left|\sum_{m\leqq x}\chi(m)\right|<k$$

vorhanden ist.

---

[4]) Mathematische Zeitschrift, Bd. II (1918), S. 52–154.

[5]) Nach Minkowski (vgl. z. B. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. II, 2. Aufl. Braunschweig 1899, S. 691) ist nämlich

$$|\varDelta|\geqq\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\left(\frac{n^n}{n!}\right)^2,$$

woraus für $n\geqq 2$, wie man sich leicht überzeugt $|\varDelta|\geqq 3$, also $k\geqq 3$ folgt; für $n=1$ ist zwar $|\varDelta|=1$, aber bei jedem Nicht-Hauptcharakter $N\mathfrak{f}\geqq 3$.

[6]) D. h. der Charakter $\bar{\chi}$ des Satzes XXXVI sei von χ verschieden.

$\zeta_\varkappa(s)$ bedeute in der Folge die Dedekindsche Zetafunktion, die als Spezialfall $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$, χ Hauptcharakter in $\zeta(s, \chi)$ enthalten ist; $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion, also den Spezialfall von $\zeta_\varkappa(s)$ für den Körper der rationalen Zahlen.

Satz 1: *Es sei* $d_0 = 1$, *wenn* $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ *und zugleich* χ *der Hauptcharakter ist; für jeden anderen eigentlichen Charakter sei* $d_0 = 0$. *Dann ist für jeden eigentlichen* (reellen oder komplexen) *Charakter und* $1 < s < 2$, *wenn* $\varrho = \beta + \gamma i$ *die Wurzeln von* $\zeta(s, \chi)$ *im Streifen* $0 < \sigma < 1$ *durchläuft,*

(1) $$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \bar{\chi}) < \lambda_2 \log k + \frac{2 d_0}{s-1} - 2 \sum_\varrho \frac{s-\beta}{|s-\varrho|^2},$$

also für $\zeta(s, \chi) = \zeta_\varkappa(s)$ *a fortiori*

(2) $$-\frac{\zeta_\varkappa'}{\zeta_\varkappa}(s) < \lambda_2 \log k + \frac{1}{s-1},$$

für jedes andere $\zeta(s, \chi)$ *mit eigentlichem* χ

(3) $$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \bar{\chi}) < \lambda_2 \log k - 2 \sum_\varrho \frac{s-\beta}{|s-\varrho|^2}.$$

Beweis: Die durch (52), d. h. die Gleichung

$$(A(\mathfrak{f}))^s \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^q \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1 - q} (\Gamma(s))^{r_2} \zeta(s, \chi) = \Phi(s, \chi)$$

definierte Funktion $\Phi(s, \chi)$ genügt einerseits der Funktionalgleichung (53), die ich hier nur in der Konsequenz

(4) $$\frac{\Phi'}{\Phi}(s, \chi) + \frac{\Phi'}{\Phi}(1-s, \bar{\chi}) = 0$$

brauche. Andererseits ist nach Satz LXXII die über alle im Streifen $0 < \sigma < 1$ gelegenen Wurzeln von $\Phi(s, \chi)$, d. h. $\zeta(s, \chi)$, erstreckte Summe

$$\sum_\varrho \frac{1}{|\varrho|^2}$$

konvergent und nach Satz LXXIV

$$s^{d_0}(s-1)^{d_0} \Phi(s, \chi) = a e^{cs} \prod_\varrho \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}}.$$

Daraus folgt

(5) $$\frac{d_0}{s} + \frac{d_0}{s-1} + \frac{\Phi'}{\Phi}(s, \chi) = c + \sum_\varrho \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right);$$

ebenso ist (wenn ϱ immer noch die Wurzeln von $\zeta(s, \chi)$ im Streifen $0 < \sigma < 1$ durchläuft)

(6) $$\frac{d_0}{s} + \frac{d_0}{s-1} + \frac{\Phi'}{\Phi}(s, \bar{\chi}) = \bar{c} + \sum_\varrho \left(\frac{1}{s-\bar{\varrho}} + \frac{1}{\bar{\varrho}}\right),$$

wo $\bar{z}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl ist. Nach (4) ist daher

$$0 = c + \bar{c} + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{1-s-\bar{\varrho}} + \frac{1}{\bar{\varrho}} \right),$$

woraus sich, wenn $s = 1$ eingesetzt wird,

$$0 = c + \bar{c} + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{\varrho} \right)$$

ergibt; demnach ist

$$0 = c + \bar{c} + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}} + \frac{1}{\varrho} \right),$$

da die Menge der nach absolut wachsenden Ordinaten geordneten $\bar{\varrho}$ mit der ebenso geordneten Menge der $1-\varrho$ identisch ist.

Also folgt aus (5) und (6)

$$(7) \qquad 2\frac{d_0}{s} + 2\frac{d_0}{s-1} + \frac{\Phi'}{\Phi}(s, \chi) + \frac{\Phi'}{\Phi}(s, \bar{\chi}) = \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{s-\bar{\varrho}} \right).$$

Andererseits ist

$$(A(\mathfrak{f}))^{2s} \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \right)^{2q} \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right)^{2(r_1-q)} (\Gamma(s))^{2r_2} \zeta(s, \chi)\, \zeta(s, \bar{\chi}) = \Phi(s, \chi)\, \Phi(s, \bar{\chi}),$$

mithin

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \bar{\chi}) = 2 \log A(\mathfrak{f}) + q \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) + (r_1 - q) \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right)$$
$$+ 2 r_2 \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \frac{\Phi'}{\Phi}(s, \chi) - \frac{\Phi'}{\Phi}(s, \bar{\chi}).$$

Hieraus folgt wegen

$$A(\mathfrak{f}) = 2^{-r_2} \pi^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|\Delta| N \mathfrak{f}} = 2^{-r_2} \pi^{-\frac{n}{2}} \sqrt{k}$$

für $1 < s < 2$ nach (7)

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \bar{\chi}) < \log k + \lambda_3 + \frac{2 d_0}{s-1} - 2 \sum_{\varrho} \frac{s-\beta}{|s-\varrho|^2}$$
$$< \lambda_2 \log k + \frac{2 d_0}{s-1} - 2 \sum_{\varrho} \frac{s-\beta}{|s-\varrho|^2},$$

womit (1) bewiesen ist.

Satz 2: *Für jeden Nicht-Hauptcharakter und* $1 < s < 2$ *ist*

$$(8) \qquad -\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \bar{\chi}) < \lambda_4 \log k.$$

Beweis: 1. Für eigentliche Charaktere folgt die Behauptung unmittelbar aus (3).

2. Für einen uneigentlichen Charakter, der nicht der Hauptcharakter ist, ergibt sie sich hieraus auf folgende Weise. Nach Satz LXII ist, wenn

X der zugehörige eigentliche Charakter mod $\mathfrak{f}_0$. und $\zeta_0(s, X)$ die ihm entsprechende Zetafunktion ist,

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) = -\sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}} \frac{X(\mathfrak{p}) \log N(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s - X(\mathfrak{p})} - \frac{\zeta_0'}{\zeta_0}(s, X);$$

und hierin ist für $1 < s < 2$

$$\left|\sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}} \frac{X(\mathfrak{p}) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s - X(\mathfrak{p})}\right| < \sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}-1} \leqq \sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}} \log N\mathfrak{p} = \log \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}} N\mathfrak{p}$$
$$= \log N \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}} \mathfrak{p} \leqq \log N\mathfrak{f} \leqq \log k,$$

woraus die Behauptung nach 1. wegen $N\mathfrak{f}_0 < N\mathfrak{f}$, $k_0 = |\Delta| N\mathfrak{f}_0 < k$ unmittelbar folgt.

Satz 3: *Es sei χ ein komplexer Charakter. Ich behaupte die Existenz eines $\lambda_5 < 1$, so daß im Kreise $|s-1| \leqq \frac{\lambda_5}{\log k}$*

$$\zeta(s, \chi) \neq 0$$

ist.

Beweis: 1. Es sei χ ein eigentlicher komplexer Charakter. Für jedes reelle φ ist

$$6 + 8\cos\varphi + 2\cos 2\varphi = 4(1+\cos\varphi)^2 \geqq 0.$$

Für $(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ setze ich $\chi(\mathfrak{p}) = e^{\omega(\mathfrak{p})i}$, $0 \leqq \omega(\mathfrak{p}) < 2\pi$; dann hat für $(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ der Charakter $\chi^2(\mathfrak{p})$ die Gestalt $\chi^2(\mathfrak{p}) = e^{2\omega(\mathfrak{p})i}$. Daraus folgt für $1 < s < 2$, wenn χ_0 der Hauptcharakter ist,

$$-6\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi_0) - 8\,\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) - 2\,\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi^2)$$
$$= \sum_{\mathfrak{p}, m}{}' \frac{\log N\mathfrak{p}\,(6 + 8\cos m\,\omega(\mathfrak{p}) + 2\cos 2m\,\omega(\mathfrak{p}))}{N\mathfrak{p}^{ms}} \geqq 0,$$

wobei $\sum'$ bedeutet, daß $(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist. Also ist für $1 < s < 2$

$$(9) \quad -6\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi_0) - 4\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\bar\chi)\right) - \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi^2) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\bar\chi^2)\right) \geqq 0.$$

Hierin ist

$$(10) \qquad -\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi_0) = \sum_{\mathfrak{p}, m}{}' \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}} \leqq \sum_{\mathfrak{p}, m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}} = -\frac{\zeta_\varkappa'}{\zeta_\varkappa}(s).$$

Aus (2), (3), (8) (letztere Relation auf χ^2 angewendet), (9) und (10) folgt für $1 < s < 2$ und jede im Streifen $0 < \sigma < 1$ gelegene Wurzel ϱ von $\zeta(s, \chi)$

$$2\frac{s-1}{|s-\varrho|^2} < 2\frac{s-\beta}{|s-\varrho|^2} < \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\bar\chi) + \lambda_2 \log k$$
$$< \tfrac{3}{2}\lambda_2 \log k + \tfrac{3}{2}\frac{1}{s-1} + \tfrac{1}{4}\lambda_4 \log k + \lambda_2 \log k < \tfrac{3}{2}\frac{1}{s-1} + \lambda_6 \log k,$$

worin $\lambda_6 > 1$ gewählt werden kann. Setze ich hierin

$$s = 1 + \frac{1}{4\lambda_6 \log k} = s_0$$

ein (wobei $1 < s_0 < 2$ ist), so erhalte ich

$$2\frac{s_0 - 1}{|s_0 - \varrho|^2} < \tfrac{7}{4}\frac{1}{s_0 - 1},$$

$$|s_0 - \varrho| > \sqrt{\tfrac{8}{7}}(s_0 - 1),$$

$$|1 - \varrho| = |(s_0 - \varrho) - (s_0 - 1)| > \left(\sqrt{\tfrac{8}{7}} - 1\right)(s_0 - 1) = \left(\sqrt{\tfrac{8}{7}} - 1\right)\frac{1}{4\lambda_6 \log k} = \frac{\lambda_5}{\log k},$$

wo $\lambda_5 < 1$ ist.

2. χ sei ein uneigentlicher komplexer Charakter. Ist X der zu χ gehörende eigentliche Charakter mod $\mathfrak{f}_0$, so ist für $|s-1| \leqq \frac{\lambda_5}{\log k_0}$ nach 1.

$$\zeta_0(s, X) \neq 0,$$

also nach Satz LXII

$$\zeta(s, \chi) \neq 0.$$

Letzteres gilt also a fortiori in dem kleineren Kreise $|s-1| \leqq \frac{\lambda_5}{\log k}$.

Satz 4: *Für jeden Nicht-Hauptcharakter gilt im Rechteck* $-1 \leqq \sigma \leqq 9$, $|t| \leqq 4$

$$|\zeta(s, \chi)| < k^{\lambda_7}.$$

Beweis: 1. χ sei eigentlich. Denken wir uns (41) bei irgendeiner bestimmten Wahl des Repräsentanten $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{K}^{-1}$ über alle Klassen $\mathfrak{K}$ summiert, so entsteht

$$\Phi(s, \chi) = \Psi_1(s, \chi) + \Psi_2(1 - s, \chi), \tag{11}$$

wo $\Psi_1(s, \chi)$ bzw. $\Psi_2(1-s, \chi)$ die über alle $\mathfrak{K}$ summierte zweite und dritte, bzw. vierte und fünfte Zeile von (41) bezeichnet. Ein Blick auf den Beweis des Satzes LVII lehrt, daß für $\sigma \leqq 9$ die Abschätzungen

$$|\Psi_1(s, \chi)| \leqq (A(\mathfrak{f}))^9 \left(\Gamma\left(\frac{9+1}{2}\right)\right)^q (\Gamma(\tfrac{9}{2}))^{r_1 - q} (\Gamma(9))^{r_2} \zeta_\varkappa(9),$$

$$|\Psi_2(s, \chi)| \leqq (A(\mathfrak{f}))^9 \left(\Gamma\left(\frac{9+1}{2}\right)\right)^q (\Gamma(\tfrac{9}{2}))^{r_1 - q} (\Gamma(9))^{r_2} \zeta_\varkappa(9)$$

gelten.

Für $s > 1$ ist[7])

$$\zeta_\varkappa(s) \leqq (\zeta(s))^n < \left(1 + \frac{1}{s-1}\right)^n. \tag{12}$$

---

[7]) Vgl. meine Arbeit: Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1918, S. 79—97 [S. 90].

Für $\sigma \leqq 9$ ist also

$$|\Psi_1(s, \chi)| < \lambda_8 k^{\frac{9}{2}},$$

für $\sigma \geqq -8$

$$|\Psi_2(1-s, \chi)| < \lambda_8 k^{\frac{9}{2}}.$$

Für $-1 \leqq \sigma \leqq 9$ ist daher wegen (11)

$$|\Phi(s, \chi)| < 2\lambda_8 k^{\frac{9}{2}}.$$

Aus (52) folgt demnach für $-1 \leqq \sigma \leqq 9$, $|t| \leqq 4$

$$|\zeta(s, \chi)| \leqq \lambda_9 k^{\frac{1}{2}} |\Phi(s, \chi)| < \lambda_{10} k^5 < k^{\lambda_{11}}.$$

2. χ sei uneigentlich. Aus Satz LXII folgt (vgl. Definition XVIII) in der ganzen Ebene

$$(13) \qquad |\zeta(s, \chi)| = |\zeta_0(s, \mathrm{X})| \left| \sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{d})\mathrm{X}(\mathfrak{d})}{N\mathfrak{d}^s} \right|.$$

Nun ist im Rechteck $-1 \leqq \sigma \leqq 9$, $|t| \leqq 4$ einerseits nach 1.

$$|\zeta_0(s, \mathrm{X})| < k_0^{\lambda_{11}} < k^{\lambda_{11}},$$

andererseits

$$\left| \sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{d})\mathrm{X}(\mathfrak{d})}{N\mathfrak{d}^s} \right| \leqq \sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{f}} N\mathfrak{d} \leqq k \sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{f}} 1 \leqq k \sum_{N\mathfrak{d} \leqq k} 1,$$

also[8]) höchstens gleich der k-fachen Lösungszahl von $u_1 u_2 \ldots u_n \leqq k$ in positiven ganzen rationalen Zahlen, also a fortiori $\leqq k^{n+1}$. Demnach ergibt sich aus (13)

$$|\zeta(s, \chi)| < k^{\lambda_{11}+n+1} = k^{\lambda_{12}}.$$

Satz 5: *Für jeden Nicht-Hauptcharakter gilt im Rechteck* $1 - \frac{1}{\log k} \leqq \sigma \leqq 3$, $|t| \leqq 1$ *die Ungleichung*

$$|\zeta(s, \chi)| < \lambda_{13} \log^n k.$$ [9])

Beweis: Nach dem Hadamardschen Dreikreisesatz[10]) gilt für $0 < r_1 < r_2 < r_3$, wenn $F(z)$ für $|z - z_0| \leqq r_3$ regulär ist und $\underset{|z-z_0| \leqq r_\nu}{\mathrm{Max}} |F(z)| = M_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ gesetzt wird, die Ungleichung

$$(14) \qquad M_2 \leqq M_3^{\log\frac{r_2}{r_1} : \log\frac{r_3}{r_1}} M_1^{\log\frac{r_3}{r_2} : \log\frac{r_3}{r_1}}.$$

---

[8]) Vgl. Hilfssatz 1 meiner in Anm. [7]) genannten Abhandlung.

[9]) Übrigens wird diese Ungleichung in voller Schärfe nur ganz am Ende der Abhandlung auf der Strecke $1 < s < 2$ gebraucht; im Gesamtrechteck kommt nachher nur die Abschätzung $\log^{\lambda_{14}} k$ zur Anwendung.

[10]) Vgl. § 21 meiner *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin 1916.

Dies wende ich, wenn s irgendein Punkt im Rechteck der Behauptung ist, auf $F(z) = \zeta(z, \chi)$, $z_0 = s + 1 + \frac{2}{\log k}$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1 + \frac{2}{\log k}$, $r_3 = 3$ an. Da der Kreis $|z - z_0| \leqq r_3$ dem Rechteck $-1 \leqq \Re z \leqq 9$, $|\Im z| \leqq 4$ angehört, ist nach Satz 4

$$M_3 < k^{\lambda_7};$$

andererseits ist

$$\log \frac{r_2}{r_1} : \log \frac{r_3}{r_1} = \log\left(1 + \frac{2}{\log k}\right) : \log 3 < \log\left(1 + \frac{2}{\log k}\right) < \frac{2}{\log k};$$

daher ergibt sich

$$(15) \qquad M_3^{\log \frac{r_2}{r_1} : \log \frac{r_3}{r_1}} < k^{\lambda_7 \frac{2}{\log k}} = e^{2\lambda_7}.$$

Für M_1 ergibt sich, weil der Kreis $|z - z_0| \leqq r_1$ der Halbebene $\Re z \geqq 1 + \frac{1}{\log k}$ angehört, nach (12)

$$(16) \qquad M_1 \leqq \zeta_\varkappa\left(1 + \frac{1}{\log k}\right) < (1 + \log k)^n < 2^n \log^n k.$$

Aus (14), (15) und (16) folgt also, weil der Exponent von M_1 in (14) kleiner als 1 und die rechte Seite von (16) größer als 1 ist,

$$M_2 < e^{2\lambda_7} 2^n \log^n k = \lambda_{13} \log^n k.$$

Da nun der Punkt $z = s$ auf dem Rande des Kreises $|z - z_0| \leqq r_2$ liegt, ist Satz 5 bewiesen.

Satz 6: *Es sei χ ein komplexer Charakter. Ich setze $s_1 = 1 + \frac{\lambda_5}{4 \log k}$. Dann gilt im Kreise $|s - s_1| \leqq \frac{\lambda_5}{2 \log k}$, in dem $\zeta(s, \chi)$ nach Satz 3 nicht verschwindet, also die für $\sigma > 1$ durch*

$$\sum_{\mathfrak{p}, m} \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{m N \mathfrak{p}^{ms}}$$

definierte Funktion $G(s) = \log \zeta(s, \chi)$ regulär ist,

$$|G(s)| < \lambda_{15} \log \log k.$$

Beweis: Ich wende die Carathéodorysche Ungleichung[11])

$$(17) \qquad |G(s)| \leqq |\Im G(s_1)| + |\Re G(s_1)| \frac{r + \varrho}{r - \varrho} + 2 \operatorname*{Max.}_{|s - s_1| \leqq r} \Re G(s) \cdot \frac{\varrho}{r - \varrho}$$
$$(0 < \varrho < r)$$

[11]) Vgl. z. B. § 73 meines *Handbuchs.*

auf unser $G(s)$ mit $r = \frac{\lambda_5}{\log k}$, $\varrho = \frac{\lambda_5}{2\log k}$ an. Da $G(s)$ nach Satz 3 für $|s - s_1| \leqq r$ regulär und $\lambda_5 < 1$ ist, ist nach Satz 5

$$\underset{|s-s_1|\leqq r}{\text{Max.}} \Re G(s) = \log \underset{|s-s_1|\leqq r}{\text{Max.}} |\zeta(s, \chi)| < \log \lambda_{13} + n \log\log k < \lambda_{16} \log\log k.$$

Nach (12) ist

$$|G(s_1)| \leqq \log \zeta_\varkappa(s_1) < n \log \frac{2}{s_1 - 1} < \lambda_{17} \log\log k.$$

(17) ergibt also im Kreise $|s - s_1| \leqq \frac{\lambda_5}{2\log k}$

$$|G(s)| < \lambda_{17} \log\log k + \lambda_{17} \log\log k \cdot 3 + 2\lambda_{16} \log\log k = \lambda_{15} \log\log k.$$

Satz 7: *Es sei χ ein komplexer Charakter. Für* $|s - s_1| \leqq \frac{3}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$ *ist*

$$|G'(s)| = \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) \right| < \lambda_{18} \log k \log\log k.$$

Beweis: Für $|s - s_1| \leqq \frac{3}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$ ist im Kreise $|z - s| \leqq \frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$ nach Satz 6

$$|G(z)| < \lambda_{15} \log\log k,$$

also

$$|G'(s)| < \frac{\lambda_{15} \log\log k}{\frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}} = \lambda_{18} \log k \log\log k.$$

Satz 8: *Es sei χ ein komplexer Charakter. Es werde von jetzt ab*

$$s_2 = 1 + \frac{\lambda_5 \sqrt{\log\log 3}}{4 \log k \sqrt{\log\log k}} \quad \textit{gesetzt.} \quad \textit{Für} \quad 1 \leqq s \leqq s_2 \quad \textit{ist}$$

$$|G'(s)| < \lambda_{19} \log k \sqrt{\log\log k}.$$

Beweis: Ich wende die Carathéodorysche Ungleichung auf $G'(s)$ und die Kreise mit dem Mittelpunkt s_2 und den Radien $r = \frac{\lambda_5 \sqrt{\log\log 3}}{4 \log k \sqrt{\log\log k}} + \frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$, $\varrho = \frac{\lambda_5 \sqrt{\log\log 3}}{4 \log k \sqrt{\log\log k}}$ an. Der Kreis $|s - s_2| \leqq r$ gehört dem Kreis $|s - s_1| \leqq \frac{3}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$ des Satzes 7 an, da $1 < s_2 \leqq s_1$ ist und der erstere Kreis durch $s = 1 - \frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$ geht. Es ist nach (2)

$$|G'(s_2)| = \left| \sum_{\mathfrak{p}, m} \frac{\chi(\mathfrak{p}^m) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{m s_2}} \right| \leqq -\frac{\zeta_\varkappa'}{\zeta_\varkappa}(s_2)$$

$$< \lambda_2 \log k + \frac{1}{s_2 - 1} < \lambda_{20} \log k \sqrt{\log\log k},$$

also für $|s - s_2| \leqq \varrho$ (d. h. speziell für $1 \leqq s \leqq s_2$) nach Satz 7 und der Carathéodoryschen Ungleichung

$$| G'(s) | < \lambda_{20} \log k \sqrt{\log \log k} + \lambda_{20} \log k \sqrt{\log \log k} \cdot \frac{\frac{\lambda_5 \sqrt{\log \log 3}}{2 \log k \sqrt{\log \log k}} + \frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}}{\frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}}$$

$$+ 2 \lambda_{18} \log k \log \log k \cdot \frac{\frac{\lambda_5 \sqrt{\log \log 3}}{4 \log k \sqrt{\log \log k}}}{\frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}} < \lambda_{19} \log k \sqrt{\log \log k}.$$

Beweis des Hauptsatzes: Es sei χ ein komplexer Charakter. s_2 habe die gleiche Bedeutung wie in Satz 8. Dann ist

$$-\log \zeta(1, \chi) = -\log \zeta(s_2, \chi) + \int_1^{s_2} \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi)\, ds,$$

$$-\log |\zeta(1, \chi)| = -\Re \log \zeta(s_2, \chi) + \Re \int_1^{s_2} \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi)\, ds.$$

Nach Satz 8 ist

$$\left| \int_1^{s_2} \frac{\zeta'}{\zeta}(s; \chi)\, ds \right| < \frac{\lambda_5 \sqrt{\log \log 3}}{4 \log k \sqrt{\log \log k}} \lambda_{19} \log k \sqrt{\log \log k} = \lambda_{21},$$

(18) $$-\log |\zeta(1, \chi)| < -\Re \log \zeta(s_2, \chi) + \lambda_{21}.$$

Aus

$$3 \log \zeta(s_2, \chi_0) + 4 \Re \log \zeta(s_2, \chi) + \Re \log \zeta(s_2, \chi^2)$$

$$= 3 \sum_{\mathfrak{p}, m}' \frac{1}{m N \mathfrak{p}^{m s_2}} + 4 \Re \sum_{\mathfrak{p}, m}' \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{m N \mathfrak{p}^{m s_2}} + \Re \sum_{\mathfrak{p}, m}' \frac{\chi^2(\mathfrak{p}^m)}{m N \mathfrak{p}^{m s_2}}$$

$$= \sum_{\mathfrak{p}, m}' \frac{3 + 4 \cos m\omega(\mathfrak{p}) + \cos 2 m \omega(\mathfrak{p})}{m N \mathfrak{p}^{m s_2}} \geqq 0$$

folgt

(19) $$-\Re \log \zeta(s_2, \chi) \leqq \tfrac{3}{4} \log \zeta(s_2, \chi_0) + \tfrac{1}{4} \log |\zeta(s_2, \chi^2)|.$$

Hierin ist nach (12)

(20) $$\log \zeta(s_2, \chi_0) \leqq \log \zeta_{\varkappa}(s_2) < n \log \frac{2}{s_2 - 1} < n \log \log k + \frac{n}{2} \log \log \log k + \lambda_{22};$$

ferner, da χ^2 nicht Hauptcharakter ist, nach Satz 5

(21) $$\log |\zeta(s_2, \chi^2)| < n \log \log k + \lambda_{23}.$$

Aus (18), (19), (20) und (21) folgt

$$
\begin{aligned}
&-\log|\zeta(1,\chi)| \\
&\quad < \tfrac{3}{4}\, n \log\log k + \tfrac{3}{8}\, n \log\log\log k + \tfrac{3}{4}\,\lambda_{22} + \tfrac{1}{4}\, n \log\log k + \tfrac{1}{4}\,\lambda_{23} + \lambda_{21} \\
&\quad = n \log\log k + \tfrac{3}{8}\, n \log\log\log k + \lambda_{24},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{|\zeta(1,\chi)|} < \lambda_1 \log^n k\, (\log\log k)^{\frac{3n}{8}},
$$

q. e. d.

Göttingen, den 1. Februar 1919.

(Eingegangen am 3. Februar 1919.)