Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten.

Von

Fritz Carlson in Upsala.

1. Ich beweise im folgenden:

Satz A. *Es sei*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\geqq 1$, *die regulär ist in jedem Punkt des Bogens*)*

$$x = e^{i\varphi}, \quad |\varphi| \geqq \frac{\pi}{k}$$

(die Endpunkte inbegriffen) und $\varepsilon(n)$ *eine beliebige mit* $1:n$ *gegen Null konvergierende Funktion. Wenn, für jedes* n, $n(1-\varepsilon(n))$ *der* n *ersten Koeffizienten nur eine Anzahl* $\leqq k$ *verschiedener Werte annehmen, die für jedes* n *dieselben sein sollen, so muß*

$$f(x) = \frac{c}{1-x} + g(x), \tag{2}$$

wo c *eine Konstante ist und* $g(x)$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* > 1.

Satz B. *Es sei* (1) *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* $\geqq 1$, *die nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte auf dem Einheitskreise* $|x| = 1$ *hat und* $\varepsilon(n)$ *habe dieselbe Bedeutung wie früher. Wenn, für jedes* n, $n(1-\varepsilon(n))$ *der* n *ersten Koeffizienten eine endliche Anzahl verschiedener Werte annehmen, die für jedes* n *dieselben sein sollen, so muß*

$$f(x) = \frac{P(x)}{1-x^m} + g(x), \tag{3}$$

---

*) Die Argumente sind stets im Intervalle

$$-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$$

zu wählen. Für $k = 1$ soll $f(x)$ in $x = -1$ regulär sein. Diesen Fall führt man durch Subtraktion von $\frac{c}{1-x}$ auf einen bekannten Satz von Fabry zurück, der also auch aus A folgt.

wo $P(x)$ ein Polynom ist, m eine ganze Zahl und $g(x)$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius > 1.

Nehmen wir $\varepsilon(n) = 0$ an*), so kann B. folgendermaßen formuliert werden:

Satz C. *Die Folge* $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$

enthalte nur eine endliche Anzahl verschiedener Größen. Damit die Folge von einer gewissen Stelle ab periodisch sei, ist hinreichend und notwendig, daß die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte auf dem Einheitskreise hat, und dann ist

$$f(x) = \frac{P(x)}{1 - x^m}.$$

Es war meine Absicht, diese Sätze in Zusammenhang mit naheliegenden Fragen zu behandeln. Unter Verweisung auf eine spätere Mitteilung habe ich schon C. als Hilfssatz benutzt in einer Abhandlung „Über eine Interpolationsreihe für ganze Funktionen und über ganzwertige Funktionen", die 1917 zur Zeitschrift für Mathematik und Physik eingereicht wurde. Zwei Abhandlungen in Math. Ann. Bd. 78 von Herren Jentzsch (Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten, S. 276—285) und Pólya (derselbe Titel, S. 286—293) veranlassen mich, den Beweis von C. zu veröffentlichen; für diesen Beweis brauche ich Satz A als Hilfssatz. Der Hauptsatz von Herrn Jentzsch (S. 283) entspricht dem speziellen Fall von B. (mit $\varepsilon(n) = 0$), daß $f(x)$ eindeutig in einem Kreise $|x| < r > 1$ vorausgesetzt wird.

2. Für die Beweise brauche ich einige Hilfssätze, die ich hier zusammenstelle.

a) Es sei $u = \alpha$ eine Wurzel der Ordnung m der Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$P(u) = u^k + c_1 u^{k-1} + \cdots + c_k = 0.$$

Es sei ferner z eine reelle Veränderliche und $\psi(z)$ eine Funktion von z, die der Ungleichung

$$|\psi(z)| < e^{-(l-\varepsilon(z))z}, \qquad l > 0 \tag{4}$$

genügt. *Die Gleichung* $P(u) - \psi(z) = 0$

*) Dieser Fall entspricht dem Titel dieser Abhandlung; der Kürze halber wurde er so gewählt.

hat m Wurzeln $u = u_i(z)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, die gegen α konvergieren, wenn z unbegrenzt wächst, und zwar so, daß

$$|u_i(z) - \alpha| < e^{-(l-\varepsilon(z))\frac{z}{m}}.$$

Beweis:

$$P(u) = (u-\alpha)^m[(u-\alpha)^{k-m} + b_{k-m-1}(u-\alpha)^{k-m-1} + \cdots + b_0], \quad b_0 \neq 0.$$

Ist $$A \geqq 1, \quad A \geqq |b_i|, \qquad i = 1, 2, \cdots, k-m-1,$$

und wird $r = |u-\alpha|$ hinreichend klein gewählt, $r < r_1$, so wird

$$|P(u)| \geqq r^m\left(|b_0| - \frac{Ar}{1-r}\right) > r^m \frac{|b_0|}{2}.$$

Wir geben jetzt ein beliebiges $\varepsilon_1 > 0$ an, bestimmen z_0 so, daß, für alle $z > z_0$, in (4) $|\varepsilon(z)| < \varepsilon_1$ wird und daß

$$r = e^{-(l-2\varepsilon_1)\frac{z}{m}} \cdot \left(\frac{|b_0|}{2}\right)^{-\frac{1}{m}}$$

$< r_1$ ausfällt. Dann ist $$|P(u)| > e^{-(l-2\varepsilon_1)z}$$

$$\left|\frac{\psi(z)}{P(u)}\right| < e^{-\varepsilon_1 z} < 1.$$

Nach einem bekannten Satze hat $P(u) - \psi(z) = 0$ m Wurzeln im Kreise $|u-\alpha| < r$, was unsere Behauptung war.

b) Es sei

$$H(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{b_n^2}\right),$$

(5) $$b_n = n(1-\varepsilon(n)), \qquad b_n^2 > 0.$$

$H(z)$ ist eine ganze Funktion mit folgenden Eigenschaften: Für $\varepsilon > 0$ und beliebig klein gibt es unendlich viele Kreise C_n mit unendlich wachsenden Radien, auf denen

(6) $$|H(z)| > e^{-\varrho^{1+\varepsilon}}, \qquad z = \varrho e^{i\psi};$$

auf der reellen Achse ist

(7) $$H(\varrho) = O(e^{\varrho\,\varepsilon(\varrho)});$$

auf den Strahlen $\psi = \pm\eta$, $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, ist

(8) $$|H(z)| = e^{\varrho(\pi + \varepsilon(\varrho))\sin\eta}.$$

Die Ungleichung (6) ist eine unmittelbare Folge eines bekannten Satzes in der Theorie der ganzen Funktionen. (8) kann in folgender Weise bewiesen werden. Für $\psi = \pm\eta$ ist

$$|n^2 - z^2| \geqq n^2 \sin 2\eta, \quad |b_n^2 - z^2| \geqq b_n^2 \sin 2\eta,$$

$$\frac{1-\frac{z^2}{b_n^2}}{1-\frac{z^2}{n^2}}=1+z^2\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{b_n^2}}{1-\frac{z^2}{n^2}}, \qquad \frac{1-\frac{z^2}{n^2}}{1-\frac{z^2}{b_n^2}}=1+z^2\frac{\frac{1}{b_n^2}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{z^2}{b_n^2}},$$

$$\frac{1}{1+\frac{\varrho^2\varepsilon(n)}{n^2\sin 2\eta}}<\frac{1-\frac{z^2}{b_n^2}}{1-\frac{z^2}{n^2}}<1+\frac{\varrho^2\varepsilon(n)}{n^2\sin 2\eta},$$

$$e^{-\varrho\varepsilon(\varrho)}<\left|\frac{H(z)}{\sin\pi z}\right|<e^{\varrho\varepsilon(\varrho)},$$

was genau (8) enthält. (7) könnte ohne Schwierigkeit direkt bewiesen werden; indessen brauchen wir für das Folgende Hilfssatz c) unten, und mit Anwendung dieses Satzes kann (7) sogleich aus (8) abgeleitet werden. Denn ist $\varepsilon>0$ beliebig vorgegeben, und wählt man in (8) η so klein, daß, für ϱ hinreichend groß,

$$|H(\varrho e^{\pm i\eta})|<e^{\varepsilon_1\cdot\varrho}, \qquad 0<\varepsilon_1<\varepsilon\cos\eta,$$

wird, so kann c) auf $\quad \Phi(z)=H(z)\,e^{-\frac{z\varepsilon_1}{\cos\eta}}$

angewendet werden und dies gibt

$$H(\varrho)=O(e^{\varepsilon\varrho}).$$

c) Es sei $\Phi(z)$ für $z=\varrho e^{i\psi}$,

(9) $$-\eta\leqq\psi\leqq\eta<\frac{\pi}{2},$$ regulär. Wenn

(10) $$\Phi(\varrho e^{\pm i\eta})=O(1);$$

wenn ferner, für jedes $\varepsilon>0$,

(11) $$\Phi(z)=O(e^{\varrho^{1+\varepsilon}})$$

auf unendlich vielen Kreisbogen C_n mit unbegrenzt wachsenden Radien, so ist im ganzen Sektor (9)

(12) $$\Phi(z)=O(1).$$

3. Satz D. *Es sei $\varphi(z)$ eine für $z=\varrho e^{i\psi}$,*

$$-\eta\leqq\psi\leqq\eta<\frac{\pi}{2}$$

reguläre Funktion, die den Ungleichungen

$$\varphi(\varrho e^{\pm i\eta})=O(e^{\varrho\theta\sin\eta}) \quad \text{mit} \quad \theta<\frac{\pi}{k}$$
$$\varphi(z)\quad=O(e^{a\varrho}), \qquad a \text{ konst.}$$

genügt. Wenn, für jedes n, $n(1-\varepsilon(n))$ der Größen

$$\varphi(1),\ \varphi(2),\ \cdots,\ \varphi(n)$$

eine Anzahl $\leqq k$ *verschiedener Werte annehmen, die für jedes* n *dieselben sind, so lassen sich zwei Zahlen* c *und* $\delta > 0$ *derart finden, daß, für* z *reell und positiv,*

$$(13) \qquad |\varphi(z) - c| < e^{-(\delta - \varepsilon(z))z}.$$

Beweis: Es seien $c_1, c_2, \cdots, c_k$ die k Werte von $\varphi(n)$ und

$$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \cdots$$

die nach wachsender Größe geordneten ganzen Zahlen, für welche $\varphi(b_n)$ einen Wert $c_1, c_2, \cdots, c_k$ annimmt. Nach der Voraussetzung ist (5) erfüllt und mithin auch die Ungleichungen (6), (7), (8) für die ganze Funktion $H(z)$. Schreiben wir

$$(14) \qquad \psi(z) = \prod_{\nu=1}^{k} (\varphi(z) - c_\nu),$$

$$\Phi(z) = e^{lz} \frac{\psi(z)}{H(z)},$$

so ist $\Phi(z)$ im Sektor (9) regulär und genügt der Ungleichung (11) für z auf den Bogen C_n. Wird die Konstante l so gewählt, daß

$$0 < l \cos \eta < (\pi - k\theta) \sin \eta,$$

was ja immer möglich ist, so ist (10) erfüllt und folglich (12) im ganzen Sektor (9). Nach (7) muß also, für z reell und positiv,

$$|\psi(z)| < e^{-(l - \varepsilon(z))z}$$

Jetzt können wir Hilfssatz a) auf die Gleichung (14) anwenden, und dies führt zur behaupteten Ungleichung (13), wo also $c = c_1 = c_2 = \cdots = c_k$, $\delta = l$ zu setzen ist.

Im allgemeinen gilt selbstverständlich nicht $\varphi(z) = c$. Dies ist aber der Fall, wenn $\eta = \frac{\pi}{2}$:

Zusatz. *Bleiben die Voraussetzungen in Satz* D *für* $\eta = \frac{\pi}{2}$ *gültig, so muß*

$$\varphi(z) = c$$

identisch gelten. Denn $\psi(z)$ muß identisch verschwinden, wie der folgende Satz zeigt:*)

Es sei $\psi(z)$ *für* $\Re(z) \geqq 0$ *regulär und für diese* z

$$\psi(z) = O(e^{a\varrho}), \qquad a \text{ konst.},$$

ferner

$$\psi(\pm i\varrho) = O(e^{\theta_1 \varrho}) \quad \text{mit} \quad \theta_1 < \pi.$$

---

*) Ein Beweis dieses Satzes findet sich in meiner Dissertation (Sur une classe de séries de Taylor, Upsala 1914, S. 58). Für eine ganze Funktion $\psi(z)$, die für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ verschwindet, hat ihn Herr Wigert wiedergefunden (Sur un théorème concernant les fonctions entières, Arkiv för Matematik, Bd. 11, 1916, Nr. 21).

Wenn, für jedes n, die Anzahl der von Null verschiedenen Werte von $\psi(\nu)$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$ gleich $n\varepsilon(n)$ ist, so muß $\psi(z)$ identisch verschwinden.

4. Satz E. *Es sei*

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\geqq 1$, *die regulär ist in jedem Punkte des Bogens*

$$x = e^{i\varphi}, \quad |\varphi| \geqq \frac{\pi}{k}$$

(die Endpunkte inbegriffen). Dann gibt es eine) Funktion $\varphi(z)$ mit folgenden Eigenschaften. $\varphi(z)$ ist regulär in einem Sektor*

$$z = \varrho e^{i\psi}, \quad -\eta \leqq \psi \leqq \eta,$$

der die positive reelle Achse im Innern enthält. Für z in diesem Sektor ist

$$\varphi(z) = O(e^{a\varrho}), \quad a \text{ konst.}$$

Auf den Begrenzungsstrahlen $\psi = \pm\eta$ ist

$$\varphi(z) = O(e^{\varrho\theta \sin\eta}) \quad \textit{mit} \quad \theta < \frac{\pi}{k}. \tag{15}$$

Für $n = 0, 1, 2, \cdots$ ist $\varphi(n) = a_n$.

Beweis: Nach der Voraussetzung können

$$R > 1, \quad \theta_1 < \frac{\pi}{k}$$

so gewählt werden, daß $f(x)$ im Innern und auf der Begrenzung des Sektors

$$|x| = R; \quad |\arg x| \geqq \theta_1$$

regulär ist. Mit einem $r < 1$, das wir unten festsetzen wollen, wird der geschlossene Weg S folgendermaßen definiert:

1. der Bogen $|x| = R$, $|\arg x| > \theta_1$,
2. der Bogen $|x| = r$, $|\arg x| < \theta_1$,
3. die geradlinigen Stücke $r \leqq |x| \leqq R$, $\arg x = \pm\theta_1$.

Dann ist
$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(x)}{x^{z+1}}\,dx$$

die behauptete Funktion, wenn S im positiven Sinne durchlaufen wird mit $x = Re^{-\pi i}$ als Ausgangspunkt. Offenbar ist $\varphi(z)$ ganz und $\varphi(n) = a_n$. Wird $|f(x)|_S \leqq M$ gesetzt, so ist

$$|\varphi(z)| < \frac{2MR}{r}\left\{\frac{e^{\varrho\pi\sin\psi}}{R^{\varrho\cos\psi}} + \frac{e^{\varrho\theta_1\sin\psi}}{r^{\varrho\cos\psi}}\right\}. \tag{16}$$

---

*) Oder unendlich viele ganze Funktionen; immer kann $a = \pi + \varepsilon$ gewählt werden.

Wir wählen ein θ im Intervalle

$$\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{k}$$

und r so, daß
$$\theta - \theta_1 > (\pi - \theta_1)\frac{\log\frac{1}{r}}{\log\frac{R}{r}},$$

was immer möglich ist. η wird dann aus

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{\log\frac{R}{r}}{\pi - \theta_1}, \qquad 0 < \eta < \frac{\pi}{2}$$

bestimmt. Aus (16) und

$$(\pi - \theta_1)\sin\eta - \log\frac{R}{r}\cos\eta = 0,$$

$$(\theta - \theta_1)\sin\eta - \log\frac{1}{r}\cos\eta > 0$$

folgt (15), w. z. b. w.

5. Satz A ist nun eine unmittelbare Folge von Satz D und Satz E. In diesem Zusammenhange sind die einfachsten Reihen mit k verschiedenen Koeffizienten zu betrachten, die von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{p} \frac{c_\nu}{1 - xe^{i s_\nu}}, \qquad s_\nu \text{ rational}$$

sind. Die Reihen

$$\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1 - xe^{\frac{\pi i}{k}}} - \frac{1}{1 - xe^{-\frac{\pi i}{k}}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin\frac{\pi n}{k}, \qquad k \text{ ungerade}$$

$$2\cos\frac{\pi}{k} + (1+x)\left[\frac{1}{1 - xe^{\frac{\pi i}{k}}} + \frac{1}{1 - xe^{-\frac{\pi i}{k}}}\right] = 4\cos\frac{\pi}{2k}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos\frac{\pi(2n-1)}{2k},$$

k gerade,

haben k verschiedene Koeffizienten und die singulären Punkte $x = e^{\pm\frac{\pi i}{k}}$. Sie sind also auf dem Bogen

$$x = e^{i\varphi}, \qquad |\varphi| > \frac{\pi}{k}$$

regulär. Anderseits gibt es Reihen mit k verschiedenen Koeffizienten und einer einzigen singulären Stelle:

$$\frac{1}{1 - xe^{\frac{2\pi i}{k}}} = \sum_{0}^{\infty} x^n e^{\frac{2\pi i n}{k}}.$$

Diese Stelle muß auf dem Bogen $|\varphi| \geqq \frac{\pi}{k}$ liegen. *Allgemeiner kann man behaupten, daß Satz A gültig bleibt, wenn man voraussetzt, daß $f(x)$ regulär* *ist in jedem Punkte eines Bogens von der Größe* $2\pi - \frac{2\pi}{k}$ *(die Endpunkte inbegriffen), dessen Mittelpunkt auf dem Bogen*

$$x = e^{i\varphi}, \quad \pi - \varphi \leqq \frac{\pi}{k}$$

liegt. Einen Grenzfall liefert hier die Reihe

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1 - xe^{\frac{2\pi i}{k}}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\left(1 + e^{\frac{2\pi i n}{k}}\right).$$

6. Um B zu beweisen nehmen wir an, daß, für jedes n, $n(1-\varepsilon(n))$ der n ersten Koeffizienten der Reihe (1) eine Anzahl $< k$ verschiedener Werte annehmen, die für jedes n dieselben sind. Es seien

$$x = e^{i\varphi_\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p$$

die singulären Punkte von $f(x)$ auf dem Einheitskreise. Dann lassen sich bekanntlich eine in den Grenzen 1, $(2q)^p$ liegende ganze Zahl m und dazu p andere ganze Zahlen

$$m_1, m_2, \cdots, m_p \qquad \text{derart angeben, daß}$$

$$\left|\varphi_\nu - \frac{2\pi m_\nu}{m}\right| < \frac{\pi}{mq}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, p$$

wird. Mit

$$x = e^{\frac{2\pi i s}{m}}, \qquad s = 0, 1, \cdots, m-1$$

als Mittelpunkt legen wir einen Bogen b_s von der Größe $2\delta = \frac{2\pi}{mq}$. *Dann liegen alle singulären Punkte von* $f(x)$ *auf* $|x| = 1$ *innerhalb der Bogen* b_s. Schreiben wir

$$f_\mu(x) = a_\mu + a_{\mu+1}x + a_{\mu+2}x^2 + \cdots,$$

$$F_\mu(x) = \sum_{s=0}^{m-1} f_\mu\left(xe^{-\frac{2\pi i s}{m}}\right),$$

so ist

$$F_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^\lambda a_{\lambda+\mu} \sum_{s=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i s\lambda}{m}}$$

$$= m\sum_{\lambda=0}^{\infty} x^{m\lambda} a_{\mu+m\lambda}, \qquad \text{folglich}$$

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu F_\mu(x) = m\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\lambda=0}^{\infty} x^{\mu+m\lambda} a_{\mu+m\lambda} \tag{17}$$

$$= mf(x).$$

$f_\mu(x)$ hat dieselben singulären Punkte wie $f(x)$; die singulären Stellen von $F_\mu(x)$ liegen innerhalb der Bogen b_s. Setzen wir in $F_\mu(x)$

$$x^m = t, \qquad \text{so wird}$$

$$\frac{1}{m} F_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} t^\lambda a_{\mu+m\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} t^\lambda \alpha_\lambda = g_\mu(t).$$

Für jedes n nehmen $n(1-\varepsilon(n))$ der n ersten Koeffizienten α_λ eine Anzahl $\leqq k$ verschiedener Werte an, die für jedes n dieselben sind. Ferner ist $g_\mu(t)$ auf dem Bogen

$$t = e^{iv}, \quad v \geqq \delta m = \frac{\pi}{q}$$

regulär. Ist $q \geqq k$ gewählt, was uns frei steht, so folgt nach A

$$g_\mu(t) = \frac{c_\mu}{1-t} + G_\mu(t),$$

wo c_μ eine Konstante ist und $G_\mu(t)$ eine Taylorsche Reihe mit dem Konvergenzradius > 1. Führen wir dies in (17) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu F_\mu(x) \\ &= \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{c_\mu x^\mu}{1-x^m} + \sum_{\mu=0}^{m-1} G_\mu(x^m) x^\mu \\ &= \frac{P(x)}{1-x^m} + g(x), \end{aligned}$$

wo $P(x)$ ein Polynom ist und $g(x)$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius > 1, w. z. b. w.

Wenn $g(x)$ in A oder B einen endlichen Konvergenzradius ϱ hat, muß der Konvergenzkreis $|x| = \varrho$ singuläre Linie sein.