

AGGIUNTA ALLA MEMORIA: "SULLE SERIE DI DIRICHLET", ¹⁾.

Nota di **Pia Nalli** (Palermo).

Adunanza del 14 novembre 1915.

Lo scopo della presente Nota è di generalizzare alcuni risultati da me ottenuti nella Memoria: « *Sulle serie di DIRICHLET* » ¹⁾.

Al n° 13 della Memoria citata, ho dimostrato il seguente teorema:

Perchè una serie di DIRICHLET, avente un semipiano di convergenza, sia sommabile dell'ordine r (intero) nel semipiano $\sigma > r$, è necessario che la funzione analitica $f(s)$, rappresentata dalla serie nel semipiano di convergenza di questa, quando si fissi $\varepsilon > 0$ arbitrario, soddisfi nel semipiano $\sigma > r + \varepsilon$ uniformemente alla condizione

$$f(s) = o(|t|^{r+\varepsilon}),$$

ed è sufficiente che, fissati ε e δ positivi, si abbia uniformemente nel semipiano $\sigma > r + \varepsilon$

$$(I) \quad f(s) = O(|t|^{r+\delta}).$$

Il teorema è valido anche quando r non è intero, ma è semplicemente un numero reale non minore di 1.

Infatti, attribuendo ad r quest'ultimo significato, la prima parte del teorema, relativa alla condizione necessaria, è stata già dimostrata al n° 6 della Memoria citata. La seconda parte, relativa alla condizione sufficiente, si può dimostrare facilmente, utilizzando invece del teorema enunciato al principio del n° 5, l'altro enunciato alla fine del medesimo numero.

Accenno qui alla dimostrazione.

Sia la serie di DIRICHLET

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

convergente nel semipiano $\sigma > \sigma_1$ ed s_0 un punto del semipiano $\sigma < \eta$.

Se s è un punto del semipiano $\sigma > \sigma_1$ si avrà

$$(II) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \frac{(s - s_0)^r}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} A(r-1, u) u^{r-1} e^{-(s-s_0)u} du;$$

dove $A(r-1, y)$ è definita per mezzo della (11) della Memoria citata.

¹⁾ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XL (2° semestre 1915), pp. 44-70.

Si ha inoltre

$$A(r-1, y) = o(e^{\beta y})$$

qualunque sia $\beta > \sigma_1 - \sigma_0$.

Tenendo conto della (I) e del teorema dimostrato al n° 12, si conclude che l'integrale che compare nel secondo membro della (II) converge nel semipiano $\sigma > \tau$, restando così dimostrato il teorema.

Aggiungo ancora che la formula (57) del n° 13 si può generalizzare (con considerazioni analoghe a quelle ora fatte) nel modo seguente:

Se α ed α' sono due numeri reali ed è $\alpha' > \alpha \geq 1$, si avrà

$$\Lambda(\alpha') < \Lambda(\alpha),$$

a meno che non sia

$$\Lambda(\alpha'') = \Lambda(\alpha)$$

per qualunque $\alpha'' > \alpha$.

Palermo, novembre 1915.

PIA NALLI.